第 1 問（非等速円運動，複数物体系，束縛条件）

【メモ】

・問 1 から問 3 までは非等速円運動の問題．非等速円運動は，

$$\begin{cases} \text{運動方程式（中心成分）} \\ \text{力学的エネルギー保存則} \end{cases}$$

を連立して解く[*1]．

・問 4 以降は複数物体系の運動．複数物体系の運動は，

$$\begin{cases} \text{外力のない方向の運動量保存則} \\ \text{力学的エネルギー保存則} \\ \text{（束縛条件）} \end{cases}$$

を連立して解くことが基本となる．本問は束縛条件まで考える必要のある問題である．このタイプは，受験生としては手が付かないことが多くかつ計算も煩雑になり，基本的に試験時間内で処理するのは難しい．

【解答】

問 1　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR\cos\theta = mgR\cos\theta_0\,, \qquad \therefore v = \sqrt{2gR(\cos\theta_0 - \cos\theta)}\,.$$

問 2　運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{v^2}{R} = -N + mg\cos\theta\,, \qquad \therefore N = (3\cos\theta - 2\cos\theta_0)mg\,.$$

向きは，物体の位置を P としたとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の向き．

問 3　問 2 より，

$$(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)mg = 0\,, \qquad \therefore \cos\theta_1 = \frac{2}{3}\cos\theta_0\,.$$

問 4　相対速度の大きさを u とすると[*2]，

$$\begin{cases} v_x - V = u\cos\theta\,, \\ v_y - 0 = -u\sin\theta\,, \end{cases} \qquad \therefore v_y = -(v_x - V)\tan\theta\,.$$

[*1] 力学的エネルギー保存則は接線方向の運動方程式と同値な関係にある．主要なテーマとしては，微小角の単振り子，ベータトロンでは，例外的に接線方向の運動方程式を考える．

[*2] 誘導に従わず束縛条件を考えるのがシンプル．

問 5　運動量保存則（x 成分）より，

$$mv_x + MV = 0\,,\qquad \therefore V = \underset{\sim\sim\sim\sim}{-\frac{m}{M}v_x}\,.$$

問 6　力学的エネルギー保存則，問 4，問 5 より，

$$\frac{1}{2}m({v_x}^2 + {v_y}^2) + \frac{1}{2}MV^2 + mgR\cos\theta = mgR\cos\theta_0$$

$$\frac{1}{2}m\left\{{v_x}^2 + \left(1+\frac{m}{M}\right)^2 {v_x}^2\tan^2\theta\right\} + \frac{1}{2}M\frac{m^2}{M^2}{v_x}^2 = mgR(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

$$\frac{1}{2}m\left(1+\frac{m}{M}\right)\left\{1+\left(1+\frac{m}{M}\right)\tan^2\theta\right\}{v_x}^2 = mgR(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

$$\therefore v_x = \sqrt{\frac{2gR(\cos\theta_0 - \cos\theta)}{\left(1+\frac{m}{M}\right)\left\{1+\left(1+\frac{m}{M}\right)\tan^2\theta\right\}}}\,.$$

問 7　半球に固定された座標系から観測した小球の運動方程式と台の運動方程式は[*3]，

$$\begin{cases} m\dfrac{(v_x - V)^2 + {v_y}^2}{R} = -N + mg\cos\theta + mA\sin\theta\,, \\ MA = -N\sin\theta\,. \end{cases}$$

小球が半球から離れる瞬間 $N = 0$ より，

$$m\frac{(v_x - V)^2 + {v_y}^2}{R} = mg\cos\theta_2\,.$$

ここに，

$$v_x - V = \left(1+\frac{m}{M}\right)v_x\,,\quad v_y = -\left(1+\frac{m}{M}\right)v_x\tan\theta$$

を代入して，

$$\left\{\left(1+\frac{m}{M}\right)^2 + \left(1+\frac{m}{M}\right)^2\tan^2\theta_2\right\}{v_x}^2 = gR\cos\theta_2$$

$$\left(1+\frac{m}{M}\right)(1+\tan^2\theta_2)\frac{2gR(\cos\theta_0 - \cos\theta_2)}{1+\left(1+\frac{m}{M}\right)\tan^2\theta_2} = gR\cos\theta_2$$

$$2(\cos\theta_0 - \cos\theta_2) = \frac{\cos^3\theta_2}{1+\frac{m}{M}}\left\{1+\left(1+\frac{m}{M}\right)\frac{1-\cos^2\theta_2}{\cos^2\theta_2}\right\}$$

$$\therefore \cos\theta_0 = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{m}{M+m}\cos^2\theta_2\right)\cos\theta_2\,.$$

[*3] この 2 式により N を θ の関数として求めることができる．

【補足１】束縛条件

小球の位置を (x, y)，半球の中心位置を $(X, 0)$ とする．このとき，小球が半球上を運動することから，

$$\begin{cases} x - X = R\sin\theta\,, \\ y - 0 = R\cos\theta\,, \end{cases}$$

の関係を満たす．両辺の時間変化を考えて[*4][*5]，

$$\begin{cases} v_x - V = R\dot{\theta}\cos\theta\,, \\ v_y - 0 = -R\dot{\theta}\sin\theta\,. \end{cases}$$

よって，

$$v_y = -(v_x - V)\tan\theta$$

を得る．また，半球に対する小球の相対速度の大きさは，

$$\sqrt{(v_x - V)^2 + {v_y}^2} = R\dot{\theta}\,.$$

【補足２】垂直抗力

半球に固定された座標系から観測した小球の運動方程式と台の運動方程式

$$\begin{cases} m\dfrac{(v_x - V)^2 + {v_y}^2}{R} = -N + mg\cos\theta + mA\sin\theta\,, \\ MA = -N\sin\theta\,, \end{cases}$$

より A を消去すれば，

$$N = \frac{\left\{3\left(1 + \dfrac{m}{M}\right) - \dfrac{m}{M}\cos^2\theta\right\}\cos\theta - 2\left(1 + \dfrac{m}{M}\right)\cos\theta_0}{\left(1 + \dfrac{m}{M}\sin^2\theta\right)^2} mg\,.$$

[*4] θ が時間変化することに注意して，

$$\frac{d}{dt}(\sin\theta) = \frac{d}{d\theta}(\sin\theta)\frac{d\theta}{dt} = \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\,,\quad \frac{d}{dt}(\cos\theta) = \frac{d}{d\theta}(\cos\theta)\frac{d\theta}{dt} = -\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\,.$$

[*5] $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt}$ であり，これは角速度を指す．

第２問（電磁誘導ーファラデイ則，荷電粒子の運動）

【メモ】

・ベータトロンは，ファラデイ則によって計算した誘導起電力をもとに誘導電場を逆算し，接線方向の運動方程式を考える．この大まかな流れは知っておいた方が良い．

【解答】

問 1　運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{v^2}{r} = qvB\,, \qquad \therefore v = \frac{qBr}{m}\,.$$

問 2　ファラデイ則より，円形ループの誘導起電力は，z 軸正方向から見て反時計回りを正に，

$$\mathcal{E} = -\pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}\,.$$

よって，電位と電場の関係より，

$$|\mathcal{E}| = E \cdot 2\pi r\,, \qquad \therefore E = \frac{r}{2}\frac{\Delta B}{\Delta t}\,.$$

問 3　荷電粒子は，誘導電場から円の接線方向の静電気力を受けることで加速される．接線方向の運動方程式より，

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = q\frac{r}{2}\frac{\Delta B}{\Delta t}\,, \qquad \therefore \Delta v = \frac{qr}{2m}\Delta B\,.$$

問 4　ローレンツ力を f，遠心力を $\widetilde{f}$ とする．それぞれ公式，および問 1，問 3 より，

$$\begin{aligned} f &= q(v+\Delta v)(B+\Delta B) = qvB\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)\left(1+\frac{\Delta B}{B}\right) \\ &= \frac{(qB)^2 r}{m}\left(1+\frac{\Delta B}{2B}\right)\left(1+\frac{\Delta B}{B}\right), \\ \widetilde{f} &= m\frac{(v+\Delta v)^2}{r} = \frac{(qB)^2 r}{m}\left(1+\frac{\Delta B}{2B}\right)^2\,. \end{aligned}$$

以上より，ローレンツ力の大きさの方が大きいことがわかる．

問 5　同様の議論をすれば[*6]，

$$\Delta v = \frac{qr}{2m}\Delta\overline{B}$$

[*6] ファラデイ則はループを貫く磁束を計算するので平均の値を用いる．一方，運動方程式でローレンツ力を計算する際は半径 r 地点での磁束密度の値を用いる．

となり，運動方程式（中心成分），問 1，問 3 より，

$$
\begin{aligned}
m\frac{(v+\mathit{\Delta} v)^2}{r} &= q(v+\mathit{\Delta} v)(B+\mathit{\Delta} B') \\
m\frac{v^2}{r}\left(1+\frac{\mathit{\Delta}\overline{B}}{2B}\right)^2 &= qvB\left(1+\frac{\mathit{\Delta}\overline{B}}{2B}\right)\left(1+\frac{\mathit{\Delta} B'}{B}\right) \\
\therefore \frac{\mathit{\Delta}\overline{B}}{\mathit{\Delta} B'} &= \underset{\sim}{2}.
\end{aligned}
$$

第３問（熱力学の基本処理，断熱過程）

【メモ】

・圧力はピストンのつりあい，体積は状況から判断し，状態方程式から温度を決定するのが基本.

・内部エネルギー変化は公式，仕事は $p-V$ 図の面積評価，熱は熱力学第 1 法則を通して計算する.

・準静的な断熱操作は，ポアソンの公式と状態方程式によって気体の状態決定を行う．また，このとき熱力学第 1 法則は仕事の決定式となる（内部エネルギー変化は通常通り公式より求める）.

【解答】

問 1　A，B のつりあいより，

$$\begin{cases} \mathrm{A}:0=P_0S+mg-2kd\,, \\ \mathrm{A}:0=P_1S+mg-3kd\,, \\ \mathrm{B}:0=P_0S+mg-P_1S\,, \end{cases} \qquad \therefore P_0=\frac{mg}{S}\,,\quad P_1=\frac{2mg}{S}\,,\quad k=\frac{mg}{d}\,.$$

問 2　ばねの縮みを x とすると，気体の体積を考えて，

$$V=S(x+d)\,,\qquad x=\frac{V}{S}-d\,.$$

よって，A のつりあいより，

$$P=\frac{k}{S}x-\frac{mg}{S}=\frac{mg}{S^2d}(V-2Sd)\,.$$

問 3　$x=x_2$ のとき $P=4\sqrt{2}\,P_1$ より，

$$\frac{8\sqrt{2}\,mg}{S}=\frac{1}{S}\frac{mg}{d}x_2-\frac{mg}{S}\,,\qquad \therefore x_2=(8\sqrt{2}+1)d\,.$$

問 4　内部エネルギー変化は公式より，

$$\varDelta U_{1\to 2}=\frac{3}{2}R\left\{\frac{4\sqrt{2}\,P_1(x_2+d)Sd}{R}-\frac{P_1\cdot 4Sd}{R}\right\}=12(15+2\sqrt{2})mgd\,.$$

仕事は $P-V$ 図の面積を評価して，

$$W_{1\to 2}=\int_{4Sd}^{(8\sqrt{2}+2)Sd}\frac{mg}{S^2d}(V-2Sd)\,dV=62mgd\,.$$

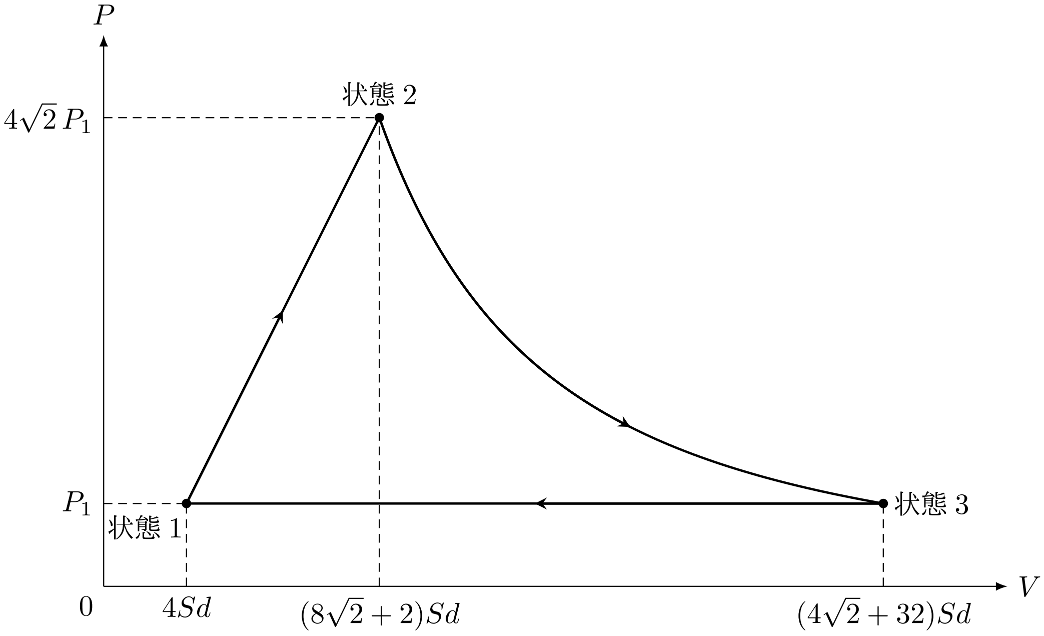
よって，熱力学第 1 法則より，

$$Q=\varDelta U_{1\to 2}+W_{1\to 2}=2(12\sqrt{2}+121)mgd\,.$$

問 5　B のつりあいより，内部気体の圧力は P_1 に等しい．ポアソンの公式より，

$$4\sqrt{2}\,P_1\{(8\sqrt{2}+2)Sd\}^{\frac{5}{3}}=P_1\{S(h+4d)\}^{\frac{5}{3}}\,,\qquad \therefore h=4(7+\sqrt{2})d\,.$$

問 6　グラフは次のようになる．



問 7　状態 2 から状態 3 における仕事は，熱力学第 1 法則より，

$$W_{2\to3} = -\frac{3}{2}R\left\{\frac{(4\sqrt{2}+32)P_1Sd}{R} - \frac{4\sqrt{2}(8\sqrt{2}+2)P_1Sd}{R}\right\} = 12(8+\sqrt{2})mgd\,.$$

状態 3 から状態 3 における仕事は，$P-V$ 図より，

$$W_{3\to1} = P_1\mathit{\Delta}V = P_1\{4-(4\sqrt{2}+32)\}Sd = -8(7+\sqrt{2})mgd\,.$$

以上より，

$$\begin{aligned} e = \frac{W_{\mathrm{cyc}}}{Q_{1\to2}} &= \frac{62mgd + 12(8+\sqrt{2})mgd - 8(7+\sqrt{2})mgd}{2(12\sqrt{2}+121)mgd} \\ &= \frac{51+2\sqrt{2}}{121+12\sqrt{2}} \\ &= 0.39\ldots \\ &\fallingdotseq 0.4\,. \end{aligned}$$