

1 図1のように、一端が壁に固定されたばねがあり、ばねのもう一端には厚さが一定で質量 M の板がつながれて、水平な床の上に置かれている。板の上には、密度が一様で質量 m の直方体が、ばねの延長線に沿ってのせられている。直方体の厚さは W であり、ばねに沿った方向の長さは L ($L > W$) である。板は床の上をなめらかに運動することができる。ばねが伸びる方向を x 軸の正の方向とし、板の重心の x 座標を板の位置と呼ぶことにする。板は x 軸方向にのみ運動するものとし、ばねが自然の長さのときの板の位置を $x = 0$ とする。ばね定数を k 、板と直方体の間の静止摩擦係数を μ_0 、動摩擦係数を μ' 、重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。

問1 板を引き、ばねを自然の長さから x_0 だけ伸ばして静かに手をはなしたところ、直方体は板と一体となって運動した。手をはなした瞬間の板の加速度を求めよ。

問2 手をはなした後に、直方体が一体となって運動するために x_0 が取り得る最大の値 x_A を求めよ。

次に x_0 の値を x_B ($x_B > x_A$) にして手をはなしたところ、直方体は板に対してすべり出した。板の位置が $x = \frac{\mu' mg}{k}$ のときに板と直方体は同じ速度となり、それ以降はそのまま一体となって運動した。

問3 x_B を求めよ。

問4 板と直方体が一体となって運動し始めてから初めて速度が0になったときの板の位置を求めよ。

問5 最初に手をはなした瞬間のばねの弾性力による位置エネルギーを U とし、直方体と板が一体となって運動するまでに摩擦によって失われた力学的エネルギーを ΔU とする。 $\frac{\Delta U}{U}$ の値は $\frac{m}{M}$ の値によって変化する。 $\frac{\Delta U}{U}$ が最大になるときの $\frac{m}{M}$ を求めよ。

今度は図2のように直方体を 90° 回転させて板の上に立てた。従って、ばねの方向の長さは W であり、高さは L である。 x_0 をさまざまな値にして手をはなしたところ、直方体は板と一体となって運動し始めるか、手をはなした瞬間に傾くかのいずれかであり、立ったまますべり出すことはなかった。

問6 $\frac{W}{L}$ が満たすべき条件を求めよ。

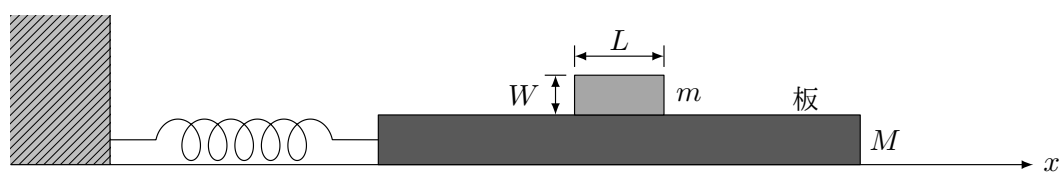


图 1

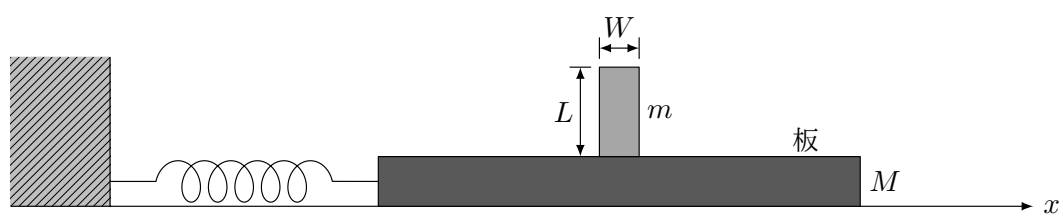


图 2

2 一辺の長さが L の正方形の極板からなる間隔 $d (L \gg d)$ の平行板コンデンサー C, スイッチ S, および起電力 V の電池 V を, 空気中において図 1 のように接続した. 最初, C は帯電していなかったものとする. S を閉じ, 十分時間が経過してから S を開いた. 空気中の誘電率を真空の誘電率 ϵ_0 と同じとみなして, 以下の問いに答えよ.

問 1 S を開いた直後の極板電荷の大きさを求めよ.

次に, 長さど幅が L で, 厚さ d の直方体の誘電体 D を, 図 2 のように, すき間なく C に挿入した. 十分に時間が経過した後, 極板と接する D の片側表面に誘起された電荷の絶対値が Q_D であった.

問 2 D の比誘電率を求めよ. ただし比誘電率は 1 より大きいとする.

続いて, 図 3 に示すように, S を開いたままで, C 内の D の長さが $x (0 < x < L)$ となるように, D を外力で動かし, 十分な時間が経過した. 以下の問いでは, D はなめらかに動くものとし, 問 1 の電荷の大きさを Q , 問 2 の比誘電率を ϵ_r とおいて答えよ.

問 3 C が蓄える静電エネルギー $U(x)$ を求めよ.

問 4 x を微小な量 Δx だけ変化させたときの静電エネルギーの変化 ΔU を計算し, C 内の D の長さが x のときに, D に作用する静電気力の大きさ, および向きを求めよ. ここで, 微小量 δ が $|\delta| \ll 1$ のとき, $\frac{1}{1+\delta} \approx 1 - \delta$ の近似式を用いよ. また, ΔU の計算において, $(\Delta x)^2$ に比例する項がある場合は無視せよ.

最後に, 図 4 のように, $x = a$ のときに S を閉じ, $x = a$ の状態で十分な時間が経過した. その後, S を閉じたまま, D を $x = b$ の位置まで, 外力でゆっくりと動かした.

問 5 D を $x = a$ から $x = b$ の位置まで動かす間に外力がした仕事を求めよ.

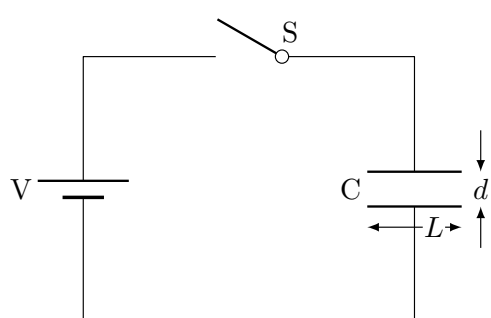


図 1

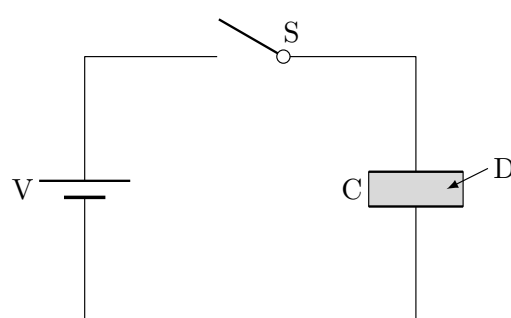


図 2

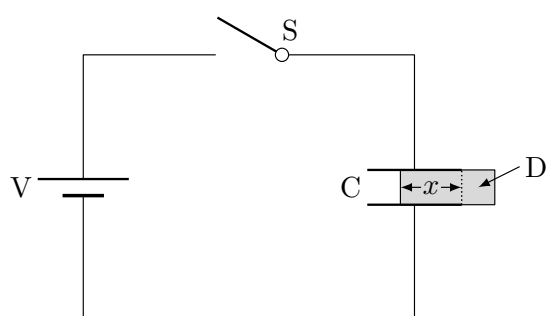


図 3

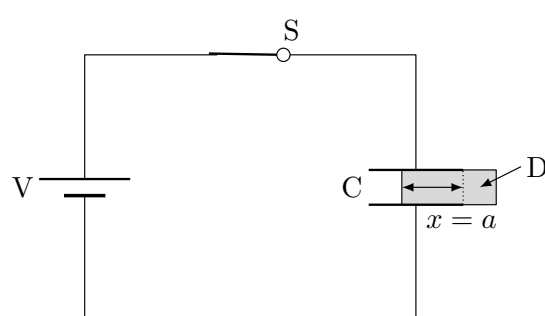


図 4

3

ドップラー効果が車の衝突防止システムに使われている。その原理を理解するために、次の状況を考える。

図に示すように、一定の速度 v_1 で動く小物体 P の前方に、小物体 Q が P と同じ向きに一定の速度 v_2 で動いている。P から振動数 f の音波が出ている。P から出た音波は Q で反射した後に再び P に戻る。音速を V とし、 $0 < v_2 < v_1 < V$ とする。風は吹いていないものとして、以下の問いに答えよ。

問1 Q 上にいる観測者が観測する音波の振動数を求めよ。

問2 Q で反射した音波を P 上の観測者が観測する。その振動数 F を求めよ。ただし、Q で反射が起こるとき、Q 上の観測者が観測した振動数と同じ振動数の音波が Q から出されたと思なしてよい。

問3 P 上の観測者は、観測した音波の振動数 F から Q の速度 v_2 を求めることができる。 v_2 を f , F , v_1 , V を用いて表せ。

時刻 $t = 0$ に P から出た音波の波面が再び P に戻る時刻を $t = T_0$ 、P が Q と衝突する時刻を $t = T$ とする。

問4 T を T_0 , v_1 , v_2 , V を用いて表せ。

問5 前問の結果に対して、問3の結果を用いて v_2 を消去することで、 T を T_0 , f , F , v_1 , V の中から必要なものを用いて表せ。

次に、P と Q が運動する向きに一定の風速 w ($w < V$) の風が吹いている場合を考える。P と Q の速度をそれぞれ v_1 , v_2 、時刻 $t = 0$ に P から出た音波の波面が再び P に戻る時刻を $t = T'_0$ 、P 上の観測者が観測する反射波の振動数を F' 、P が Q と衝突する時刻を $t = T'$ とする。

問6 T' を T'_0 , f , F' , v_1 , V , w のうち必要なものを用いて表せ。ただし、風が吹いている場合、音速は風速の分だけ変化する。

