1 時間追跡，動く座標系，モーメント

【メモ】

・問 1 は力積の計算．入試では，「力積」と出てきて初めて力積を考えればよい．力積の計算方法は次の通りに分類される．

$$\begin{cases} f \text{ の関数形が既知} & \to \quad \text{定義通りの計算（積分，もしくは } f-t \text{ 図の面積評価）} \\ f \text{ の関数形が不明} & \to \quad \text{運動量収支から逆算} \end{cases}$$

・問 4 は非等速円運動の問題．非等速円運動は，以下の 2 式を連立する[*1][*2]．

$$\begin{cases} \text{運動方程式（中心成分）} & \leftarrow \quad v \text{ を決定した後，拘束力の決定} \\ \text{力学的エネルギー保存則} & \leftarrow \quad v \text{ の決定} \end{cases}$$

・問 5，問 6 は複数物体系の運動．複数物体系の運動は，

$$\begin{cases} \text{外力のない方向の運動量保存則} \\ \text{力学的エネルギー保存則} \\ \text{（束縛条件）} \end{cases}$$

を連立して解くことが基本となる．本問は束縛条件まで考える必要のある問題であり，このタイプは，受験生としては（束縛条件が見抜けないことで）手が付かないことが多く，計算も煩雑になるので，基本的に試験時間内で処理するのは難しい．方針はわかっているとしても，試験場では「捨て問」としてしまうのが賢明である（立式だけして部分点をもらう問題)[*3]．

【解答】

問 1　静止摩擦力を R とする．個々の運動方程式より，

$$\begin{cases} ma = -R\,, \\ Ma = -kx_0 + R\,, \end{cases} \qquad \therefore a = -\underline{\frac{kx_0}{M+m}}\,, \quad R = \frac{m}{M+m}kx_0\,.$$

問 2　鉛直方向の運動方程式より，垂直抗力の大きさは mg である．よって，問 1 より，

$$\frac{m}{M+m}kx_0 < \mu_0 mg\,, \qquad \therefore x_0 < \underline{\frac{\mu_0(M+m)g}{k}}\,(= x_{\mathrm{A}})\,.$$

問 3　以下，板に関する物理量を大文字で，直方体に関する物理量を小文字で表す．運動方程式より，

$$\begin{cases} ma = -\mu' mg\,, \\ MA = -kx + \mu' mg\,, \end{cases} \qquad \therefore a = -\mu' g\,, \quad A = -\frac{k}{M}\left(x - \frac{\mu' mg}{k}\right)\,.$$

[*1] 等速円運動は，運動方程式（中心成分）と必要に応じて各種つりあいを立てる．

[*2] 単振り子やベータトロンなどでは，力学的エネルギー保存則ではなく，それと数学的には同値な接線方向の運動方程式を考える．

[*3] だからこそ解ききったらかっこいい．

$t=0$ で，$v=V=0$，$x=X=x_{\mathrm{B}}$ より，

$$\begin{cases} x = x_{\mathrm{B}} - \dfrac{1}{2}\mu' g t^2\,, \\ X = \dfrac{\mu' m g}{k} + \left(x_{\mathrm{B}} - \dfrac{\mu' m g}{k}\right)\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{M}}\,t\right), \\ v = -\mu' g t\,, \\ V = -\left(x_{\mathrm{B}} - \dfrac{\mu' m g}{k}\right)\sqrt{\dfrac{k}{M}}\,\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{M}}\,t\right). \end{cases}$$

ここで，$x=\dfrac{\mu' m g}{k}$ を満たす時刻は $t=\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{M}{k}}$ であり，この瞬間速度が等しいことから，

$$-\mu' g\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{k}} = -\left(x_{\mathrm{B}} - \frac{\mu' m g}{k}\right)\sqrt{\frac{k}{M}}\,, \qquad \therefore x_{\mathrm{B}} = \underline{\frac{\mu' g}{k}\left(\frac{\pi}{2}M + m\right)}.$$

問 4　2 物体とばねを合わせた系のエネルギー保存則より[*4]，

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(M+m)\left(-\mu' g\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{k}}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{\mu' m g}{k}\right)^2$$

$$\therefore x = \underline{-\frac{\mu' m g}{k}\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}\left(1+\frac{M}{m}\right)\frac{M}{m}}}\,.$$

問 5　問 4 より，

$$\begin{aligned} \frac{\Delta U}{U} &= 1 - \frac{U_{\mathrm{fin}}}{U} \\ &= 1 - \frac{\dfrac{1}{2}k\left(\dfrac{\mu' m g}{k}\right)^2\left\{1+\dfrac{\pi^2}{4}\left(1+\dfrac{M}{m}\right)\dfrac{M}{m}\right\}}{\dfrac{1}{2}k\left(\dfrac{\mu' m g}{k}\right)^2\left(1+\dfrac{\pi}{2}\dfrac{M}{m}\right)^2} \end{aligned}$$

[*4] 静止摩擦力の仕事率は 2 物体間で相殺する．

2 内部構造の見えるコンデンサ

【メモ】

・$vB\ell$ 公式を用いる（回路の一部・全体が磁場中を運動する）電磁誘導の問題.

・回路の状態（回路を流れる電流 I，コンデンサに蓄えられる電荷 Q の）決定は，

$$\begin{cases} \text{キルヒホッフ則} \\ \text{電荷保存則} \\ \text{素子の性質} \end{cases}$$

によって行う.

・電磁誘導の問題は，基本的には以下の流れで構成される.

① 誘導起電力の決定

② 回路の議論

③ 運動の議論

④ エネルギーの議論

なお，今回はエネルギーに関する設問は設けられていない.

【解答】

問 1　$vB\ell$ 公式より，

$$V = \underline{vB\ell}\,,\ \ \underline{（\mathrm{Q}\text{ の方が高電位}）}\,.$$

また，キルヒホッフ則より，

$$vB\ell - \frac{q}{C} = 0\,, \qquad \therefore q = \underline{CvB\ell}\,.$$

問 2　公式より，

$$F = -IB\ell = -\frac{\Delta q}{\Delta t}B\ell = -C\frac{\Delta v}{\Delta t}(B\ell)^2 = \underline{-C(B\ell)^2 a}\,.$$

問 3　運動方程式より，

$$ma = -kx - C(B\ell)^2 a\,, \qquad \therefore a = \frac{k}{m + C(B\ell)^2}x\,.$$

よって，ばねに押されている区間では振動中心 $x = 0$，角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m + C(B\ell)^2}}$ の単振動を行う．初期条件より，導体棒の位置，および速度は時刻 t の関数として，

$$\begin{cases} x = -d\cos(\omega t)\,, \\ v = d\omega\sin(\omega)\,, \end{cases}$$

と表される．$x=0$ を解いて，

$$t=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m+C(B\ell)^2}{k}}}\,,\quad v=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{d\sqrt{\frac{k}{m+C(B\ell)^2}}}\,.$$

問 4　キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} vB\ell-RI_{\mathrm{R}}=0\,, \\ vB\ell-\dfrac{q}{C}=0\,, \end{cases}\qquad \therefore I_{\mathrm{R}}=\frac{vB\ell}{R}\,,\quad I_{\mathrm{C}}=\frac{\Delta q}{\Delta t}=CB\ell\frac{\Delta v}{\Delta t}=CB\ell a\,.$$

よって，公式より，

$$F=-(I_{\mathrm{R}}+I_{\mathrm{C}})B\ell=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{-\frac{(B\ell)^2}{R}v-C(B\ell)^2a}\,.$$

問 5　運動方程式より，

$$\begin{aligned} m\frac{\Delta v}{\Delta t}&=-\frac{(B\ell)^2}{R}\frac{\Delta x}{\Delta t}-C(B\ell)^2\frac{\Delta v}{\Delta t} \\ \{m+C(B\ell)^2\}\Delta v&=-\frac{(B\ell)^2}{R}\Delta x\,,\qquad \therefore \alpha=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{-\frac{R}{(B\ell)^2}\{m+C(B\ell)^2\}}\,. \end{aligned}$$

問 6　問 5 より，

$$\begin{aligned} x-0&=-\frac{R}{(B\ell)^2}\{m+C(B\ell)^2\}\left(0-d\sqrt{\frac{k}{m+C(B\ell)^2}}\right) \\ \therefore x&=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{Rd}{(B\ell)^2}\sqrt{k\{m+C(B\ell)^2\}}}\,. \end{aligned}$$

【補足 1】問 5 の時間追跡

運動方程式より，

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt}&=\frac{1}{\alpha}v \\ \int_0^t\frac{1}{v}\frac{dv}{dt}\,dt&=\int_0^t\frac{1}{\alpha}\,dt \\ \log\frac{v(t)}{v(0)}&=\frac{1}{\alpha}t \\ \therefore v(t)&=v(0)e^{\frac{1}{\alpha}t}\,. \end{aligned}$$

さらに t で積分して，

$$\begin{aligned} \int_0^t\frac{dx}{dt}\,dt&=\int_0^t v(0)e^{\frac{1}{\alpha}t}\,dt \\ \therefore x(t)-x(0)&=\alpha v(0)\left(e^{\frac{1}{\alpha}t}-1\right) \end{aligned}$$

ここに $x(0)=0$，$v(0)=d\sqrt{\dfrac{k}{m+C(B\ell)^2}}$ を代入し，$t\to\infty$ とすれば当然同様の結果を得る．なお，空気抵抗型の微分方程式に従う運動ゆえ，エネルギー的な解法は選択できない．

【補足２】ジュール熱の計算

系のエネルギー収支は，運動方程式，およびキルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} mv\dfrac{dv}{dt} = -(I_{\mathrm{R}}+I_{\mathrm{C}})B\ell v\,, \\ R{I_{\mathrm{R}}}^2 = vB\ell I_{\mathrm{R}}\,, \\ \dfrac{q}{C}I_{\mathrm{C}} = vB\ell I_{\mathrm{C}}\,, \end{cases} \qquad \therefore\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right)+R{I_{\mathrm{R}}}^2 = 0\,.$$

よって，導体棒が止まるまでに抵抗で生じたジュール熱は，

$$J = -\mathit{\Delta} K - \mathit{\Delta} U = \frac{1}{2}(CB\ell)^2v^2+\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kd^2\,.$$

なお，【補足１】から，

$$I(t) = \frac{B\ell}{R}v(0)e^{\frac{1}{\alpha}t}$$

であり，ジュール熱の定義より，

$$J = \int_0^\infty \frac{\{B\ell v(0)\}^2}{R}e^{\frac{2}{\alpha}t}\,dt = -\frac{\alpha}{2}\frac{\{B\ell v(0)\}^2}{R} = \frac{1}{2}kd^2\,.$$

3 微小変化の計算，分子運動論

【メモ】

・熱力学で用いる基本的な公式は，状態方程式[*5]，熱力学第 1 法則[*6]，内部エネルギーの公式，ポアソンの公式[*7]しかない[*8]．論理としては，どれか 3 つを仮定すれば残りの 1 つが導けるようになっている．

・問 1 から問 4 は熱力学の問題．ポアソンの公式の導出と同様の計算手順を辿る．

・問 5 は分子運動論．誘導がなく，自分で全体の議論をしないといけない（これが難しいかもしれない）．分子運動論は，一連の流れを身に付けておけばよい．容器の形状は直方体，球を押さえておく．

【解答】

問 1　状態方程式は，

$$\begin{cases} pAL = kN_{\mathrm{A}}T\,, \\ (p+\Delta p)A(L+\Delta x) = kN_{\mathrm{A}}(T+\Delta T)\,. \end{cases}$$

問 2　公式より，

$$\Delta U = C_V \Delta T\,.$$

また，熱力学第 1 法則より[*9]，

$$\Delta U + pA\Delta x = 0\,.$$

問 3　ピストンのつりあいより，

$$\Delta F = pA - (p+\Delta p)A = -\Delta pA\,.$$

ここで問 1（状態方程式），問 2（熱力学第 1 法則）より，

$$\begin{cases} \Delta pAL + pA\Delta x = kN_{\mathrm{A}}\Delta T\,, \\ C_V\Delta T + pA\Delta x = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore \Delta pA = -p\left(1+\frac{kN_{\mathrm{A}}}{C_V}\right)\frac{A}{L}\Delta x\,.$$

*5 圧力は可動部分のつりあい，体積は容器の容積，モルウ数が与えられたときに温度を決める式，という認識が基本．

*6 内部エネルギー変化は公式，仕事は $p-V$ 図の面積，熱量は熱力学第 1 法則を介して間接的に計算される．

*7 ゆっくりとした断熱過程において用いる式．ポアソンの公式から圧力または体積が求まり，状態方程式によって温度が求まる．なお，この断熱過程では熱力学第 1 法則が仕事の決定式となる．

*8 熱効率の定義式，比熱の定義式は一旦置いといて．

*9 ピストンのつりあいより圧力は $pA-\Delta F$ であり，この微小変化の間に気体がした仕事は，

$$W = (pA-\Delta F)\Delta V \fallingdotseq pA\Delta V\,.$$

よって，

$$\Delta F = p\left(1+\frac{kN_{\mathrm{A}}}{C_V}\right)\frac{A}{L}\Delta x\,, \qquad \therefore B = p\left(1+\frac{kN_{\mathrm{A}}}{C_V}\right).$$

問 4　長さの次元を L，質量の次元を M，時間の次元を T とすると，B，および ρ の次元はそれぞれ，

$$[B] = \mathrm{ML^{-1}T^{-2}}\,,\quad [\rho] = \mathrm{ML^{-3}}\,.$$

よって，

$$\alpha = \frac{1}{2}\,,\quad \beta = -\frac{1}{2}\,.$$

問 5　Δt 間に単原子分子がピストンに与える力積は，

$$\sum_{i=1}^{N} 2mv_{i,x}\frac{v_{i,x}}{2L}\Delta t = \frac{m}{L}\sum_{i=1}^{N}(v_{i,x})^2\Delta t = \frac{mN\overline{{v_x}^2}}{L}\Delta t = \frac{mN\overline{v^2}}{3L}\Delta t\,.$$

これが気体の与える力積と同一視して，

$$pAL\Delta t = \frac{mN\overline{v^2}}{3L}\Delta t\,, \qquad \therefore p = \frac{1}{3}\rho\overline{v^2}\,.$$

問 6　問 4 より $s = \sqrt{\dfrac{B}{\rho}}$，問 5 より $\sqrt{\rho} = \sqrt{\dfrac{3p}{\overline{v^2}}}$ ゆえ，

$$s = \sqrt{\frac{B\overline{v^2}}{3p}} = \sqrt{\frac{1}{3}\left(1+\frac{kN_{\mathrm{A}}}{3kN_{\mathrm{A}}/2}\right)\overline{v^2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\overline{v^2}}\,, \qquad \therefore D = \frac{\sqrt{5}}{3}\,.$$