# $\boxed{1}$ 非等速円運動，衝突

【メモ】

・問 1，問 4 は非等速円運動．非等速円運動は，

$$\begin{cases} \text{運動方程式（中心成分）} \\ \text{力学的エネルギー保存則} \end{cases}$$

を連立する．

・問 2，問 3 は衝突．衝突は，

$$\begin{cases} \text{外力のない方向の運動量保存則} \\ \text{与えられた条件} \end{cases}$$

を連立するのが基本．

【解答】

問 1　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + 2mg\ell = \frac{1}{2}m{v_0}^2 , \qquad \therefore v_1 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{{v_0}^2 - 4g\ell}} .$$

運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{v^2}{\ell} = T + mg , \qquad \therefore T = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{m\frac{{v_0}^2}{\ell} - 5mg} .$$

よって，$T \geq 0$ を考えて，

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{v_0 \geq \sqrt{5g\ell}} .$$

問 2　水平方向の運動量保存則，はね返り係数の式より，

$$\begin{cases} mv_{\mathrm{A}} + Mv_{\mathrm{B}} = mv , \\ v_{\mathrm{A}} - v_{\mathrm{B}} = -1 \cdot (v - 0) , \end{cases} \qquad \therefore v_{\mathrm{A}} = \underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{m-M}{M+m}v} , \quad v_{\mathrm{B}} = \underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{2m}{M+m}v} .$$

なお，A が反時計回りすることから $M > m$ を満たす．

問 3　2 回目の衝突直前の 2 物体の速度は，運動の様子，および力学的エネルギー保存則より 1 回目の衝突直後の速度と等しい．よって，水平方向の運動量保存則，はね返り係数の式より，

$$\begin{cases} mv'_{\mathrm{A}} + Mv'_{\mathrm{B}} = mv , \\ v'_{\mathrm{A}} - v'_{\mathrm{B}} = -1 \cdot (-v - 0) , \end{cases} \qquad \therefore v'_{\mathrm{A}} = \underset{\sim}{v} , \quad v_{\mathrm{B}} = \underset{\sim}{0} .$$

問 4　1 回目の衝突と 2 回目の衝突を合わせて 1 つとした一連の運動を繰り返す．

問 5　A の運動と B の運動が等しいものとなればよい．すなわち，A の最高点での速さと B の最高点での速さが等しければよい．B の最高点での速さは，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}MV^2 + 2Mg\ell = \frac{1}{2}M{v_\mathrm{B}}^2\,, \qquad \therefore V = \sqrt{\left(\frac{2m}{M+m}v\right)^2 - 4g\ell}\,.$$

よって，

$$\begin{aligned}\left(\frac{m-M}{M+m}v\right)^2 &= \left(\frac{2m}{M+m}v\right)^2 - 4g\ell \\ \left\{4m^2 - (m-M)^2\right\}({v_0}^2 - 4g\ell) &= 4(M+m)^2 g\ell \\ (3m-M)(M+m)\cdot 12g\ell &= 4(M+m)^2 g\ell \\ \therefore \frac{M}{m} &= \underset{\sim}{2}\,.\end{aligned}$$

問 6　問 5 の途中計算より，

$$(3m-M)(M+m)\left(\frac{{v_0}^2}{g\ell} - 4\right) = 4(M+m)^2\,, \qquad \therefore \frac{{v_0}^2}{g\ell} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{16}{3-\dfrac{M}{m}}}\,.$$

また，$v_\mathrm{B} \geq \sqrt{5g\ell}$ かつ $\dfrac{{v_0}^2}{g\ell} > 0$ かつ $M > m$ より[*1]，

$$\begin{cases}\left(\dfrac{2}{1+M/m}\right)^2 \dfrac{16}{3-M/m} \geq 5\,, \\ \dfrac{M}{m} < 3\,, \\ 1 < \dfrac{M}{m}\,,\end{cases} \qquad \therefore \underset{\sim\sim\sim}{\frac{5+2\sqrt{5}}{5} \leq \frac{M}{m} < 3}\,.$$

*1 $v_\mathrm{B} \geq \sqrt{5g\ell}$ を満たせば A の最下点での速さは $\sqrt{5g\ell}$ を超える．

## 2　電気回路

【メモ】

・回路の状態（回路を流れる電流 $I$，コンデンサに蓄えられる電荷 $Q$ の）決定は，

$$\begin{cases} \text{キルヒホッフ則} \\ \text{電荷保存則} \\ \text{素子の性質} \end{cases}$$

によって行う（直流交流で考える物理法則は変わらない）.

・素子が 2 種類以上直列となった交流回路については，キルヒホッフ則が高校範囲では解けない微分方程式となるため，解を三角関数として仮定する（振幅と初期位相を未知定数に置く）ことで解く．仮定した三角関数で表される解を，キルヒホッフ則に代入し，$t$ についての恒等式として未知定数を決定する.

・素子のリアクタンス，および回路のインピーダンスは，電流と電圧の振幅を見ればよい.

【解答】

問 1　キルヒホッフ則，および素子の性質より，

$$\begin{cases} E - \dfrac{Q}{C} = 0\,, \\ E - L\cdot 0 - RI = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore Q = CE\,,\quad I = \frac{E}{R}\,.$$

よって，消費電力は，

$$P = RI^2 = \underline{\frac{E^2}{R}}\,.$$

問 2　回路のエネルギー収支より，問 1 の結果を用いて，

$$J = -\mathit{\Delta} U_{\mathrm{C}} - \mathit{\Delta} U_{\mathrm{L}} = \underline{\frac{1}{2}\left(C + \frac{L}{R^2}\right)E^2}\,.$$

問 3　キルヒホッフ則より交流電源の電源電圧を $V(t)$ として[*2]，

$$V(t) = L\frac{dI}{dt} + RI = I_0 L\omega\cos(\omega t) + I_0 R\sin(\omega t) = I_0\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}\,\sin(\omega t + \theta)\,.$$

ここで，$\sin\theta = \dfrac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$，$\cos\theta = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$ である.

よって，電圧の最大値は振幅を読んで，

$$\max\{V(t)\} = \underline{I_0\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}\,.$$

---

[*2] $V(t) = V_0\sin(\omega t + \alpha)$ とおいて，両辺時刻 $t$ に関する恒等式と見れば，未知定数 $V_0$，$\alpha$ が求まる.

また，このとき $\omega t+\theta=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$（$n$ は整数）より，

$$L\frac{dI}{dt}=I_0L\omega\sin\theta=\underline{\frac{(L\omega)^2I_0}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}}\,.$$

問 4　キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} V_0\sin(\omega t)-\dfrac{Q}{C}=0\,, \\ V_0\sin(\omega t)-ri_{\mathrm{r}}=0\,, \end{cases}\qquad \therefore\ i_{\mathrm{c}}=\frac{dQ}{dt}=C\omega V_0\cos(\omega t)\,,\quad i_{\mathrm{r}}=\frac{V_0}{r}\sin(\omega t)\,.$$

よって，キルヒホッフ則より*3，

$$\overline{(i_{\mathrm{c}}+i_{\mathrm{r}})^2}=\overline{\left\{V_0\sqrt{\frac{1}{r^2}+(C\omega)^2}\,\sin(\omega t+\theta')\right\}^2}=\underline{\frac{{V_0}^2}{2}\left\{\frac{1}{r^2}+(C\omega)^2\right\}}\,.$$

問 5　問 4 より，電流の振幅を読んで*4，

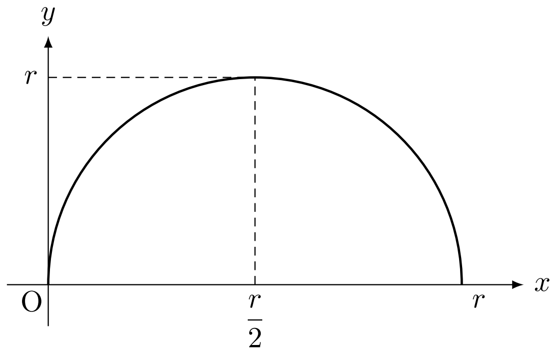
$$Z=\frac{(\text{電圧の振幅})}{(\text{電流の振幅})}=\underline{\frac{r}{\sqrt{1+(rC\omega)^2}}}\,.$$

問 6　$\tan\alpha=rC\omega$ より，

$$x=Z\cos\alpha=\frac{r}{\sqrt{1+(rC\omega)^2}}\frac{1}{\sqrt{1+(rC\omega)^2}}=\frac{r}{1+(rC\omega)^2}\,,$$
$$y=Z\sin\alpha=\frac{r}{\sqrt{1+(rC\omega)^2}}\frac{rC\omega}{\sqrt{1+(rC\omega)^2}}=\frac{r^2C\omega}{1+(rC\omega)^2}\,.$$

となる．ここで，$\omega>0$ ゆえ，$0\leq x\leq r$，$0\leq y\leq\dfrac{r}{2}$ である*5．よって，

$$x^2+y^2=rx\,,\qquad \therefore\ \underline{\left(x-\frac{r}{2}\right)^2+y^2=\frac{r^2}{4}\quad(y\geq 0)}\,.$$




---

*3 $\overline{\sin^2(\omega t+\theta)}=\dfrac{1}{2}$ である．

*4 時間平均による係数はともに $\dfrac{1}{2}$ で等しいので，振幅を見ればよい．

*5 $\omega\to 0$ で $x\to r$，$y\to 0$，$\omega\to\infty$ で $x\to 0$，$y\to 0$ である．

## 3 浮力絡みの熱力学

【メモ】

・液面から深さ $z$ での静止液体（密度 $\rho$）の圧力 $p(z)$ は，液面での圧力を $p(0)$ とすると，

$$p(z) = p(0) + \rho g z$$

と与えられる．浮力の扱いがわからないときは，圧力から丁寧に計算すればよい（浮力と圧力による力を同時に考えてはいけない）．

・圧力は可動部分のつりあい，体積は状況から判断し，状態方程式から温度を決定するのが基本．

・準静的な断熱操作は，ポアソンの公式と状態方程式によって気体の状態決定を行う．また，このとき熱力学第 1 法則は仕事の決定式となる（内部エネルギー変化は通常通り公式より求める）．

【解答】

問 1　ピストンのつりあいより，

$$0 = mg + p_0 S - pS\,, \qquad \therefore pSp = \underline{p_0 + \frac{mg}{S}}\,.$$

問 2　ピストンのつりあいより，

$$0 = mg + pS - \{p_0 + \rho(h+\ell)g\}S\,, \qquad \therefore p = \underline{p_0 + \rho g(h+\ell) - \frac{mg}{S}}\,.$$

問 3　容器のつりあいより，

$$0 = Mg + \left\{p_0 + \rho\left(h - \frac{V}{S}\right)g\right\}S - pS\,, \qquad \therefore V = \underline{\frac{M+m}{\rho} - S\ell}\,.$$

問 4　状態方程式より，

$$T = \frac{pV}{nR} = \underline{\frac{1}{nR}\left\{p_0 + \rho g(h+\ell) - \frac{mg}{S}\right\}\left(\frac{M+m}{S\rho} - \ell\right)}\,.$$

問 5　ポアソンの公式より，

$$\left\{p_0 + \rho g(H+\ell) - \frac{mg}{S}\right\}W^\gamma = \left\{p_0 + \rho g(H+\ell) - \frac{mg}{S}\right\}V^\gamma$$

$$\therefore \frac{W}{V} = \underline{\left\{\frac{p_0 + \rho g(h+\ell) - mg/S}{p_0 + \rho g(H+\ell) - mg/S}\right\}^{\frac{1}{\gamma}}}\,.$$

問 6　容器にはたらく力は，鉛直下向きを正として，

$$\begin{aligned} F &= \left\{p_0 + \rho g\left(H - \frac{W}{S}\right)\right\} S + Mg - \left\{p_0 + \rho g(H+\ell) - \frac{mg}{S}\right\} \\ &= -\rho g W + (M+m)g - \rho S\ell g \\ &= -\rho g W + \rho g V \\ &= \rho g\left(1 - \frac{W}{V}\right) V \\ &= \underline{\left\{(M+m) - \rho S\ell\right\} g \left[1 - \left\{\frac{p_0 + \rho g(h+\ell) - mg/S}{p_0 + \rho g(H+\ell) - mg/S}\right\}^{\frac{1}{\gamma}}\right]} . \end{aligned}$$

$\dfrac{W}{V} < 1$ より，$F$ は鉛直下向きであり，容器は鉛直下向きに運動する．

【補足 1】問 **3** の浮力について

全体を 1 つと見て，浮力と重力のつりあいより，

$$0 = (M+m)g - \rho(V + S\ell)g\,, \qquad \therefore V = \frac{M+m}{\rho} - S\ell\,.$$