1 荷電粒子の運動，円運動

【メモ】

・静磁場中を動く荷電粒子は等速円運動を行う．等速円運動は，運動方程式の中心成分を考える．式が不足する場合，各種つりあいを立てればよい．

【解答】

問 1　力学的エネルギー保存則より[*1]，

$$\frac{1}{2}m{v_1}^2 = qEd\,, \qquad \therefore v_1 = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}\,.$$

問 2　荷電粒子は磁場からローレンツ力を受けるが，速度と磁束密度が直交しているため磁場から仕事はされず，運動エネルギーの値が一定のまま一定の力で曲げられる．曲率一定の曲線が円のため，荷電粒子は円軌道を描く．運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{{v_1}^2}{r_1} = qv_1B\,, \qquad \therefore r_1 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mEd}{q}}\,.$$

領域 R 内にいる時間は，

$$t_1 = \frac{1}{2}\frac{2\pi r_1}{v_1} = \frac{\pi m}{qB}\,.$$

問 3　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 = \frac{1}{2}m{v_1}^2 + qEd = m{v_1}^2\,, \qquad \therefore v_2 = \sqrt{2}\,v_1\,.$$

問 4　運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{(\sqrt{2}\,v_1)^2}{r_2} = \sqrt{2}\,qv_1B\,, \qquad \therefore r_2 = \sqrt{2}\,r_2\,.$$

領域 L 内にいる時間は，

$$t_2 = \frac{1}{2}\frac{2\pi r_2}{v_2} = t_1\,.$$

問 5　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m{v_n}^2 = \frac{1}{2}m{v_{n-1}}^2 + qEd = \frac{1}{2}m{v_{n-2}}^2 + 2qEd = \cdots = nqEd$$
$$\therefore v_n = \sqrt{n}\,v_1\,.$$

[*1] 荷電粒子のみを系と見て，荷電粒子の運動エネルギー変化がされた仕事 $W = qEd$ に等しいとしても良い．

運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{(\sqrt{n}\,v_1)^2}{r_n} = \sqrt{n}\,qv_1B\,, \qquad \therefore r_n = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{n}\,r_1}\,.$$

問 6　運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{(\sqrt{n}\,v_1)^2}{r_1} = \sqrt{n}\,qv_1B_n\,, \qquad \therefore B_n = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{n}\,B_1}\,.$$

2 熱機関，断熱過程

【メモ】

・断熱過程以外の熱力学第 1 法則では熱を求める式という認識が基本で，内部エネルギー変化は公式，仕事は $p-V$ 図の面積，熱力学第 1 法則を介して間接的に熱を計算する．

・断熱過程では，気体の状態決定は状態方程式（温度の決定）とポアソンの公式（圧力/体積の決定）で行い，熱力学第 1 法則は，内部エネルギー変化を公式から計算することで間接的に系のした仕事を求める式となる．

・熱機関の熱効率は，サイクル 1 周での内部エネルギー変化が 0 であることから，

$$e=\frac{W_{\rm cyc}}{Q_{\rm in}}=\frac{Q_{\rm in}-Q_{\rm out}}{Q_{\rm in}}=1-\frac{Q_{\rm out}}{Q_{\rm in}}\,.$$

【解答】

問 1　状態方程式，およびポアソンの公式より，

$$p_2{V_2}^{\frac{5}{3}}=\frac{RT_1}{V_1}{V_1}^{\frac{5}{3}}\,,\qquad \therefore p_2=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{RT_1}{V_2}}\,,\ \ T_2=\frac{p_2V_2}{R}=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{2}{3}}T_2}\,.$$

問 2　熱力学第 1 法則，および内部エネルギーの公式より，

$$W_{\rm AB}=\mathit{\Delta}U_{\rm AB}=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right\}RT_1}\,.$$

問 3　状態方程式より，

$$p_2V_3=RT_3\,,\qquad \therefore T_3=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{V_3}{V_2}T_1}\,.$$

問 4　仕事は $p-V$ 図の面積より，

$$W'_{\rm BC}=p_2(V_3-V_2)=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{V_3}{V_2}-1\right)RT_1}\,.$$

内部エネルギー変化は公式より，

$$\mathit{\Delta}U_{\rm BC}=\frac{3}{2}R(T_3-T_2)=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{3}{2}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{V_3}{V_2}-1\right)RT_1}\,.$$

よって，熱力学第 1 法則より，

$$Q_{\rm BC}=\mathit{\Delta}U_{\rm BC}+W'_{\rm BC}=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{5}{2}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{V_3}{V_2}-1\right)RT_1}\,.$$

問 5　状態方程式，およびポアソンの公式より，D の温度 T_4 は，

$$\frac{RT_4}{V_1}V_1{}^{\frac{5}{3}} = \frac{RT_3}{V_3}V_3{}^{\frac{5}{3}}\,, \qquad \therefore T_4 = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\frac{5}{3}T_1} \,.$$

よって，熱力学第 1 法則，および内部エネルギーの公式より，

$$W'_{\mathrm{CD}} = -\mathit{\Delta} U_{\mathrm{CD}} = \frac{3}{2}\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\frac{5}{3}}\left\{\left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right\}RT_1\,.$$

問 6　DA 間に放出した熱は，熱力学第 1 法則より，

$$Q'_{\mathrm{DA}} = -Q_{\mathrm{DA}} = -\mathit{\Delta} U_{\mathrm{DA}} = -\frac{3}{2}\left\{1 - \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\frac{5}{3}}\right\}RT_1\,.$$

よって，熱効率の定義より[*2]，

$$e = 1 - \frac{Q'_{\mathrm{DA}}}{Q_{\mathrm{BC}}} = 1 - \frac{3}{5}\frac{\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\frac{5}{3}} - 1}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{2}{3}}\left\{\left(\frac{V_3}{V_2}\right) - 1\right\}} = 1 - \frac{3}{5}\frac{V_3{}^{\frac{5}{3}} - V_2{}^{\frac{5}{3}}}{V_1{}^{\frac{2}{3}}(V_3 - V_2)}\,.$$

[*2] 素直に誘導に乗れば，

$$e = \frac{W'_{\mathrm{AB}} + W'_{\mathrm{BC}} + W'_{\mathrm{CD}}}{Q_{\mathrm{BC}}} = \frac{3\left\{1 - \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\frac{5}{3}}\right\} + 5\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{V_3}{V_2} - 1\right)}{5\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{V_3}{V_2} - 1\right)} = \frac{3(V_2{}^{\frac{5}{3}} - V_3{}^{\frac{5}{3}}) + 5V_1{}^{\frac{2}{3}}(V_3 - V_2)}{5V_1{}^{\frac{2}{3}}(V_3 - V_2)}$$

となるが，放熱量を計算した方が計算量は少ない気がする．

3　複数物体系の力学，束縛条件，衝突

【メモ】

・問 1，問 3，問 4，問 5，問 6 は複数物体系の運動．複数物体系の運動は，

$$\begin{cases} \text{外力のない方向の運動量保存則} \\ \text{力学的エネルギー保存則} \\ \text{（束縛条件）} \end{cases}$$

を連立して解くのが基本．問 6 は束縛条件まで考える必要のある問題であり，問 5 が束縛条件の立式となっている．問 6 の計算を試験時間内で合わせるのは困難なため，実際の試験では式だけ立てて部分点をもらうのが賢明である．

・問 2 は衝突．衝突は，

$$\begin{cases} \text{外力のない方向の運動量保存則} \\ \text{与えられた条件} \end{cases}$$

を連立するのが基本．

【解答】

問 1　以下，速度は全て左向きを正とする．水平方向の運動量保存則，および力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} m(-v_0) + MV_0 = 0\,, \\ \dfrac{1}{2}m{v_0}^2 + \dfrac{1}{2}M{V_0}^2 = mgH\,, \end{cases} \qquad \therefore v_0 = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{2MgH}{M+m}}}\,,\quad V_0 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{m}{M}\sqrt{\frac{2MgH}{M+m}}}\,.$$

問 2　はね返り係数 1 の式より[*3]，

$$v - U = -1\cdot(-v_0 - U)\,,\qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim}{v_0 + 2U}\,.$$

問 3　水平方向の運動量保存則，および力学的エネルギー保存則より[*4]，

$$\begin{cases} mu + Mu = mv_0 + MV_0 = 2m\sqrt{\dfrac{2MgH}{M+m}}\,, \\ \dfrac{1}{2}mu^2 + \dfrac{1}{2}Mu^2 + mgh = \dfrac{1}{2}m{v_0}^2 + \dfrac{1}{2}M{V_0}^2 = mgH\,, \end{cases} \qquad \therefore h = \underset{\sim\sim\sim}{\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 H}\,.$$

問 4　2 物体の速度は等しい値を取り，水平方向の運動量保存則より，

$$mu' + Mu' = m(1+2\alpha)v_0 + MV_0 = 2(1+\alpha)mv_0\,,\qquad \therefore u' = \frac{2m}{M+m}(1+\alpha)v_0\,.$$

[*3] 可動壁の速度が一定という条件も利用している．

[*4] 水平方向の相対位置が極値を取ることにより，相対速度の水平成分が 0 となる．

よって，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mu'^2+\frac{1}{2}Mu'^2+mgH=\frac{1}{2}m(1+2\alpha)^2{v_0}^2+\frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}v_0\right)^2$$

$$\frac{1}{2}\frac{4m^2}{M+m}(1+\alpha)^2{v_0}^2+\frac{1}{2}\left(1+\frac{m}{M}\right)m{v_0}^2=\frac{1}{2}(1+2\alpha)^2m{v_0}^2+\frac{1}{2}\frac{m}{M}m{v_0}^2$$

$$\frac{4m}{M+m}(1+\alpha)^2-(1+2\alpha)^2+1=0$$

$$4(1+\alpha)\left\{\frac{m}{M+m}(1+\alpha)-\alpha\right\}=0$$

$$\therefore \alpha=\underset{\sim\sim}{\frac{m}{M}}\,.$$

問 5　束縛条件より，

$$v_y-0=\tan 45^\circ(v_x-V)\,,\qquad \therefore \underset{\sim\sim\sim\sim}{u_{\mathrm{r}}=v_{\mathrm{r}}}\,.$$

問 6　水平方向の運動量保存則，力学的エネルギー保存則，束縛条件を用いる．

力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m({v_x}^2+{v_y}^2)+\frac{1}{2}MV^2+mgH=\frac{1}{2}m(3+2\alpha)^2{v_0}^2+\frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}v_0\right)^2\,.$$

ここで，問 1 より $mgH=\frac{1}{2}(1+\alpha)m{v_0}^2$ であるので，

$$\frac{1}{2}m({v_x}^2+{v_y}^2)+\frac{1}{2}MV^2=2(1+\alpha)(2+\alpha)m{v_0}^2\,.$$

今，左辺に束縛条件・与式を用いて，

$$\begin{aligned}(\mathrm{LHS})&=\frac{1}{2}m{v_x}^2+\frac{1}{2}m(v_x-V)^2+\frac{1}{2}MV^2\\&=\frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{MV+mv_x}{M+m}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}(v_x-V)^2+\frac{1}{2}m(v_x-V)^2\,.\end{aligned}$$

第 1 項は運動量保存則

$$mv_x+MV=m(3+2\alpha)v_0+MV_0=2(2+\alpha)mv_0$$

を用いて，

$$\begin{aligned}(\mathrm{LHS})&=\frac{1}{2}\frac{4(2+\alpha)^2m^2}{M+m}{v_0}^2+\frac{1}{2}\frac{2M+m}{M+m}m(v_x-V)^2\\&=m\left\{\frac{2\alpha(2+\alpha)^2}{\alpha+1}{v_0}^2+\frac{1}{2}\frac{2+\alpha}{1+\alpha}(v_x-V)^2\right\}\,.\end{aligned}$$

以上より，

$$\frac{2\alpha(1+\alpha)^2}{1+\alpha}{v_0}^2+\frac{1}{2}\frac{2+\alpha}{1+\alpha}(v_x-V)^2=2(1+\alpha)(2+\alpha){v_0}^2$$

$$(2+\alpha)(v_x-V)^2=4(2+\alpha)\left\{(1+\alpha)^2-\alpha(2+\alpha)\right\}{v_0}^2$$

$$\therefore v_x-V=2v_0\,.$$

ここで，小球が台から飛び出すことから $v_x - V > 0$ の解が今の現象を指す解である．

よって，小球の鉛直方向の位置，および小球と台の水平方向の相対位置は，飛び出す瞬間をそれぞれ $y = H$，$x - X = 0$ とすると，

$$\begin{cases} y = H + 2v_0 - \dfrac{1}{2}gt^2\,, \\ x - X = 2v_0 t\,. \end{cases}$$

$y = 0$ を満たす時刻を求めて，

$$H + 2v_0 - \frac{1}{2}gt^2 = 0\,, \qquad \therefore t = \frac{2v_0}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{gH}{2{v_0}^2}}\right).$$

よって ${v_0}^2 = \dfrac{2gH}{1+\alpha}$ を代入して，

$$x - X = \frac{4{v_0}^2}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{gH}{2{v_0}^2}}\right) = \underline{\frac{8H}{1+\alpha}\left(1 + \frac{\sqrt{5+\alpha}}{2}\right)}.$$

【補足１】問 2 について

可動壁の質量を W とする．衝突ゆえ，外力のない方向の運動量保存則，およびはね返り係数 1 の式より，

$$\begin{cases} mv + WU' = m(-v_0) + WU\,, \\ v - U' = -1 \cdot (-v_0 - U)\,, \end{cases} \qquad \therefore v = \frac{(W-m)v_0 + 2WU}{W+m}\,,\quad U' = \frac{W}{W+m}U\,.$$

ここで，$\dfrac{m}{W} \ll 1$ の下では，

$$v = \frac{(1 - m/W)v_0 + 2U}{1 + m/W} \fallingdotseq v_0 + 2U\,,$$
$$U' = \frac{1}{1 + m/W}U \fallingdotseq U\,.$$

【補足２】問 6 を上手い計算をしなかった場合の道標的なメモ

$u = \dfrac{v_x}{v_0}$ とする．運動量保存則，束縛条件より，

$$\begin{cases} mv_x + MV = 2(2+\alpha)mv_0\,, \\ v_y = v_x - V\,, \end{cases}$$

$$\therefore \frac{V}{v_0} = \alpha\{2(2+\alpha) - u\}\,,\quad \frac{v_y}{v_0} = (1+\alpha)t - 2\alpha(2+\alpha)\,.$$

よって，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m{v_x}^2+\frac{1}{2}m{v_y}^2+\frac{1}{2}MV^2+mgH=\frac{1}{2}m(3+2\alpha)^2{v_0}^2+\frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}v_0\right)^2$$
$$\left(\frac{v_x}{v_0}\right)^2+\left(\frac{v_y}{v_0}\right)^2+\frac{1}{\alpha}\left(\frac{V}{v_0}\right)^2=4(1+\alpha)(2+\alpha)\,.$$

ここで，左辺は，

$$\begin{aligned}(\text{LHS})&=u^2+\left\{(1+\alpha)^2u^2-4\alpha(2+\alpha)(1+\alpha)u+4\alpha^2(2+\alpha)^2\right\}\\&\qquad+\left\{\alpha u^2+4\alpha(2+\alpha)u+4\alpha(2+\alpha)^2\right\}\\&=(1+\alpha)(2+\alpha)u^2-4\alpha(2+\alpha)^2t+4\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)^2\end{aligned}$$

と書けるので，

$$\begin{aligned}(1+\alpha)(2+\alpha)u^2-4\alpha(2+\alpha)^2t+4\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)^2-4(1+\alpha)(2+\alpha)&=0\\(2+\alpha)\left\{(1+\alpha)u^2-4\alpha(2+\alpha)u+4(1+\alpha)(\alpha^2+2\alpha-1)\right\}&=0\end{aligned}$$

となり，これを解けば，

$$u=2(1+\alpha)\,,\quad\frac{2(\alpha^2+2\alpha-1)}{1+\alpha}$$

を得る．よって，V は，

$$\frac{V}{v_0}=2\alpha\,,\quad\frac{2\alpha(3+\alpha)}{1+\alpha}\,.$$

ここで v_x-V を計算して，

$$\frac{v_x-V}{v_0}=2\alpha+2-2\alpha=2\,,$$
$$\frac{v_x-V}{v_0}=\frac{2(\alpha^2+2\alpha-1)}{1+\alpha}-\frac{2\alpha(3+\alpha)}{1+\alpha}=-2\,,$$

より，今の場合 $u=2(1+\alpha)$ の解が適当であるとわかる．