1 図 1 のように，なめらかで水平な床の上に質量 M の台が，左端を壁に接するように静止している．台は鉛直方向には動かず，台の右端も固定具によって固定されており水平方向にも動かない．台には，水平面と，それとなめらかに接続している円筒面および半径 r の半円筒面が存在している．これらの水平面と 2 つの円筒面はなめらかであるとする．左の円筒面上にある位置から質量 m の小球 A を静かにはなす．この位置の，台の水平面からの高さを h で表す．水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸をとる．重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えよ．

問 1　小球 A が左の円筒面の最下点を通過するまでに受ける力積を求めよ．

半円筒面の中心を O，最下点を P，最高点を Q，台の水平面からの高さが O と等しい半円筒面上の点を C とする．

問 2　図 2 のように，小球 A が半円筒面上を運動しているとき，半円筒面からの垂直抗力を N，加速度の x 成分と y 成分をそれぞれ a_x と a_y として小球 A の運動方程式を書け．ただし，$\angle$POA を ϕ で表すとする．

小球 A が C を通過した後，Q に到達しないで台に落下する場合を考える．

問 3　小球が C を通過した後，台に落下するまでの小球 A の運動について簡単に説明し，その概略を図示せよ．

次に，小球 A が Q から飛び出し，台の水平面に落下する場合を考える．

問 4　落下位置と P との距離の最小値を求めよ．

次に，固定具を取り除き，台が壁から水平右向きに自由に動けるようにして，小球 A を左の円筒面上で静かにはなす．上と同様に，小球 A をはなす位置の，台の水平面からの高さを h で表す．小球 A が Q から飛び出す場合を考える．

問 5　小球 A が C を通過する瞬間の，半円筒面からの垂直抗力 N を求めよ．

問 6　小球 A が Q から飛び出す場合の h の最小値を求めよ．

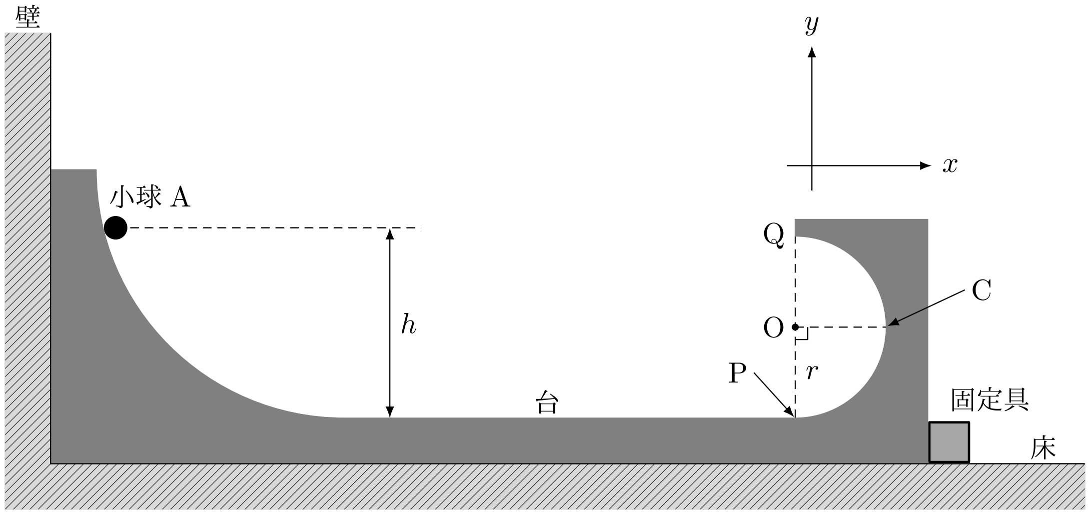


図 1

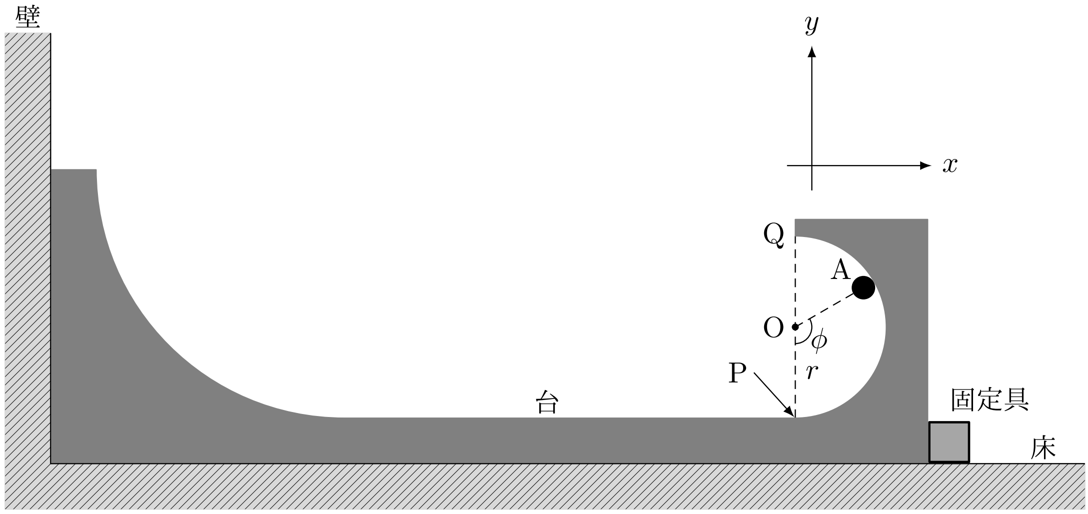


図 2

2 図のように，鉛直上向き（紙面裏から表向き）で磁束密度の大きさが B の一様な磁場中に，十分長い 2 本の導線のレールを間隔 ℓ で平行かつ同一水平面に固定する．レールの左端には電気容量 C のコンデンサー，抵抗値 R の抵抗，スイッチ S_1，S_2 がつながれている．最初，コンデンサーには電荷は蓄えられておらず，S_1，S_2 は開いていた．同じ水平面上に，左端が固定されたばね定数 k のばねをレールに沿って置く．ばねの右端には不導体の薄くて軽い板が取りつけられている．2 本のレールの上に，質量 m の導体棒をレールと垂直になるようにのせて，導体棒をばねに押し当て，ばねを自然長から d だけ縮ませた状態で，S_1 を閉じる．導体棒を静かにはなすと，導体棒は右向きに動き始め，ばねが自然長になる位置でばねから離れる．導体棒は，つねにレールと垂直の状態を保ちながら，レールに沿ってなめらかに動くことができる．導体棒のレールとの接点を P，Q とする．レールに沿って右向きに x 軸をとり，ばねが自然長になる瞬間の導体棒の位置を原点 O とする．導体棒の速度と加速度および導体簿にはたらく x 方向の力は，すべて右向きを正とする．自己誘導は無視できるとして，導体棒の運動について考える．

導体棒が動き始めてから原点を通過するまでの間の導体棒の運動について，以下の問いに答えよ．

問 1　導体棒の速度が v のとき，PQ 間に発生する誘導起電力の大きさおよびコンデンサーに蓄えられている電気量 Q を求めよ．また，P と Q のどちらが高電位か，答えよ．

問 2　導体棒が磁場から受ける力を，導体棒の加速度 a とその他必要なものを用いて表せ．なお，導体棒の速度が v であった時刻から微小時間 Δt の間の導体棒の速度変化を Δv とするとき，$a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ である．また，コンデンサーに蓄えられている電気量の変化を Δq とするとき，導体棒を流れる電流は誘導起電力の向きを正として $\dfrac{\Delta q}{\Delta t}$ である．

問 3　加速度 a を導体棒の位置 x とその他必要なものを用いて表し，導体棒が動き始めてから原点を通過するまでの時間，および原点を通過した瞬間の速度を求めよ．

導体棒が原点を通過した瞬間に S_2 を閉じると，導体棒は減速し，やがて静止する．この間の導体棒の運動について，以下の問いに答えよ．

問 4　導体棒が磁場から受ける力を，導体棒の速度 v，加速度 a およびその他必要なものを用いて表せ．

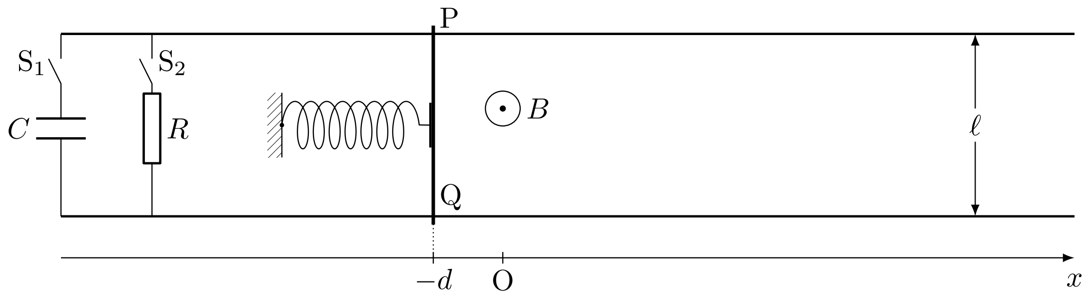
問 5　導体棒の速度が v であった時刻から微小時間 Δt の間の導体棒の変位を Δx，速度変化を Δv と

する．このとき，Δx と Δv の間に

$$\Delta x = \alpha \Delta v$$

の関係が成り立つ．定数 α を求めよ．

問 6　導体棒が静止する位置を求めよ．



3 音波が気体中を伝わっているとき，気体の微小な部分に着目するとその部分は膨張と収縮を繰り返している．この膨張と収縮について以下のように考察する．まず図 1 のように，1 モルの理想気体をなめらかに動く軽いピストンがついた断面積 A のシリンダーに封入する．ここでは封入された気体の断熱膨張と断熱収縮を考え，シリンダーとピストンは断熱材からなるとする．シリンダーの左端を原点 O とし，シリンダーに沿って右向きを正とする x 軸をとる．一定の外気圧 p のもとでピストン内壁の位置が $x = L$ で静止している状態を状態 1 とする．状態 1 からピストンに x 方向の微小な外力を加えて，その位置をゆっくりと Δx だけ微小に変位させ，図 2 のように $x = L + \Delta x$ で静止させた状態を状態 2 とする．状態 2 における微小な外力は ΔF であった．シリンダー内の気体の圧力，温度および内部エネルギーは，状態 1 ではそれぞれ，p，T，U であったが，それらは微小に変化して状態 2 ではそれぞれ，$p + \Delta p$，$T + \Delta T$，$U + \Delta U$ となった．シリンダー内の理想気体の定積モル比熱を C_V，ボルツマン定数を k，アボガドロ定数を N_A として以下の問いに答えよ．

問 1　状態 1 と状態 2 におけるシリンダー内の気体の状態方程式を書け．

問 2　ΔU を C_V，ΔT で表せ．また熱力学第一法則より ΔU と Δx の関係を書け．ただしシリンダー内の気体になされる仕事の計算では，加えた微小な外力は無視し外気圧がする仕事のみを考えよ．

問 1 で書いた 2 つの状態方程式から，微小な変化量どうしの項を無視する近似を行うと，$pA\Delta x + AL\Delta p = N_\mathrm{A} k \Delta T$ が得られる．

問 3　状態 2 においてピストンにはたらく力のつりあいを考えると，$\Delta F = B\dfrac{A}{L}\Delta x$ と書ける．B を C_V，N_A，p，k で表せ．

問 3 に表記した関係式から，気体が微小な膨張 $(\Delta x > 0)$ や収縮 $(\Delta x < 0)$ をしたときに，復元力 $-\Delta F$ がピストンにはたらく．一般に気体中を音波が伝わると，連続的に連なっている気体の微小な部分は，上述のような復元力を受けて運動する．このとき，気体中の音速 s は，気体の単位体積あたりの質量を ρ と，問 3 で求めた復元力の強さを決める定数 B で表される．

問 4　$B^\alpha \rho^\beta$ が速さの次元を持つように数 α，β を決定せよ．

音速 s は，問 4 で決定した α，β を用いて $s = B^\alpha \rho^\beta$ で表されることがわかっている．

この音速と，気体を構成する分子の平均的な速さの関係を調べよう．そのため，先ほどシリンダー内に封入した理想気体は単原子分子からなるとし，その分子 1 個の質量は m とする．またピストンは $x = L$ で外気圧 p のもとで静止しており，シリンダー内の気体の温度は T とする．分子は一定の速さで運動し，分子どうしの衝突は無視する．シリンダーおよびピストンの内壁はなめらかであり，分子は内壁に弾性衝突する．1 つの分子の速度の x 成分を v_x とするとき，すべての分子についての ${v_x}^2$ の平均 $\overline{{v_x}^2}$ と，すべての分子についての速さの 2 乗の平均 $\overline{v^2}$ の間には $\overline{v^2} = 3\overline{{v_x}^2}$ が成立するとする．

問 5　p を ρ，$\overline{v^2}$ で表す式を，ピストンが分子から受ける力積を考えることにより導出せよ．

問 6　音速 s は無次元の数 D を用いて $s = D\sqrt{\overline{v^2}}$ と書ける．D を求めよ．

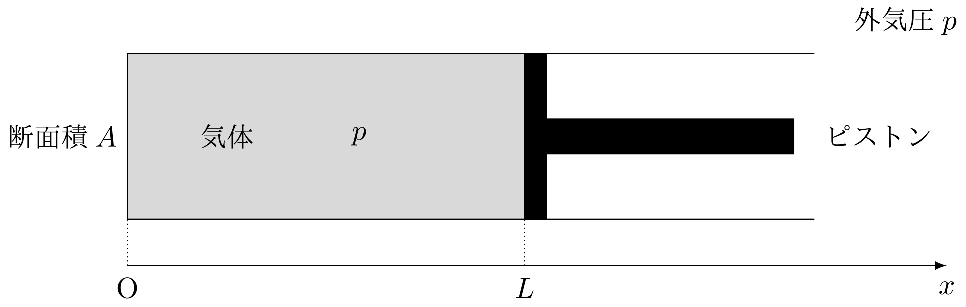


図 1

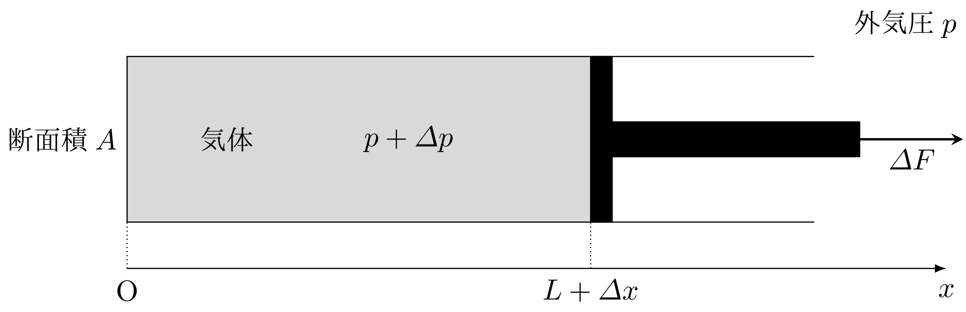


図 2