

1 図1のように、質量が M で一様な密度の三角柱 ABC を斜面上に置く。水平面に対する斜面の角度は 30° である。三角柱は $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = L$ であり、点 G は三角柱の重心である。重力加速度の大きさを g として、以下の設問に答えよ。ただし、解答に三角関数による表示 ($\sin 30^\circ$ など) を用いないものとする。

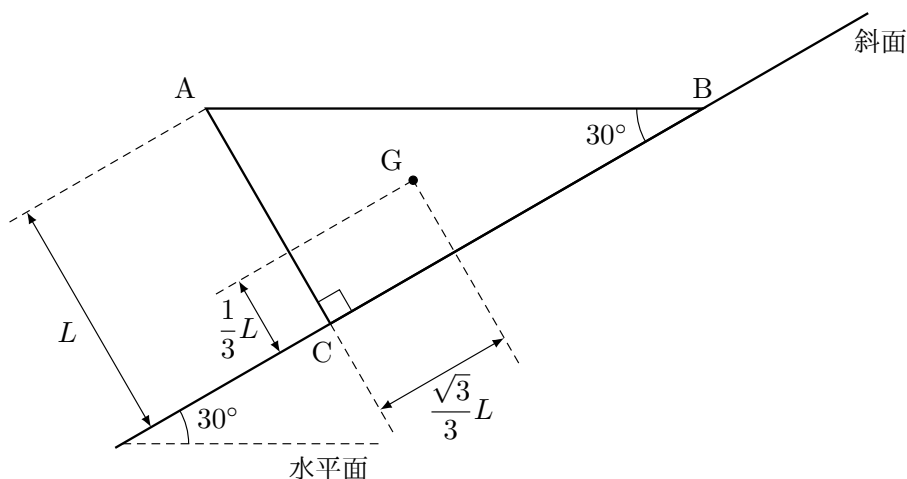


図1

はじめに、三角柱と斜面の間に摩擦力がはたらく場合を考える。このとき、三角柱は支えなしで斜面上に静止していた。

- (1) 三角柱が斜面から受ける垂直抗力の大きさと静止摩擦力の大きさを M と g を用いて表せ。
- (2) 三角柱にはたらく重力を斜面方向と斜面に垂直な方向に分解する。それぞれの成分による点 C (点 C を通り紙面に垂直な回転軸) まわりの力のモーメントを M , g , L を用いて表せ。ただし、反時計回りを正とする。
- (3) ある小物体を三角柱の面 AB 上に置くと、その位置が面 AB 上のどの位置であっても三角柱は転倒しなかった。その小物体の質量として取り得る最大値を M を用いて表せ。

次に、図2のように、三角柱 ABC を面 AB が斜面に接触するように置き、さらに質量 m の小球 P を三角柱の面 BC の中央に置く。以下では、装置各部の摩擦は無視できるものとする。全体の支えを静かに外したところ、三角柱は斜面に沿って滑り下り、小球 P は三角柱の面 BC 上を三角柱に対して右向きに動いた。その後、小球 P は斜面に衝突した。

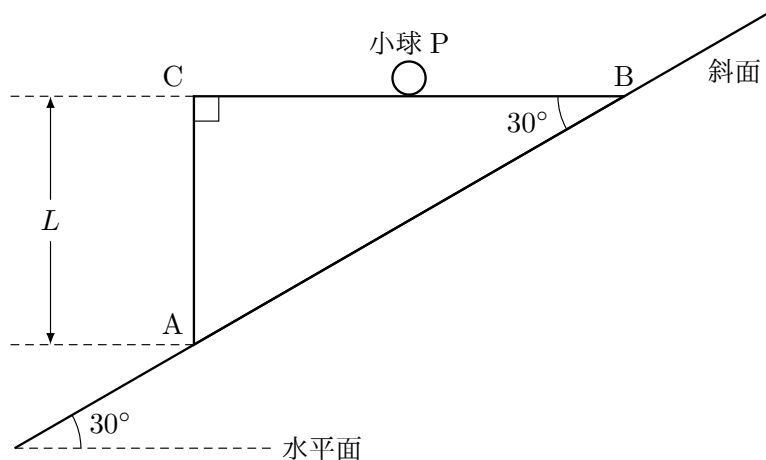


図 2

- (4) 全体の支えを静かに外してから小球 P が斜面に衝突するまでについて考える．この間に小球 P が三角柱の面 BC から受ける垂直抗力の大きさを N とする．以下の文章中の，空欄(あ)と(い)にあてはまる式を m , M , g , N から必要なものを用いて表せ．また，空欄(う)にあてはまる数値を答えよ．さらに，空欄(え)と(お)にあてはまる式を m , M , g , L から必要なものを用いて表せ．

斜面に沿って滑り下る三角柱の加速度の大きさを A とする．三角柱の運動方程式は $MA =$ (あ) となる．小球 P の鉛直下向きの加速度の大きさを a とする．鉛直方向について，小球 P の運動方程式は $ma =$ (い) となる．また，小球 P が三角柱の面 BC から離れないことより， A と a の間の関係式は $A =$ (う) $\times a$ である．以上の 3 式より， $A =$ (え) が求められる．また，全体の支えを外してから小球 P が斜面に衝突するまでの時間 t は $t =$ (お) である．

- (5) 斜面に衝突する直前の小球 P の速さを v ，小球 P と斜面の間のはね返り係数を e とする．斜面との衝突直後の小球 P の速さを v' と e を用いて表せ．

2 図1のように、内半径 r 、中心 O の球形容器に 1 mol の単原子分子からなる理想気体（以下、気体と呼ぶ）が封入されている。気体分子 1 個の質量は m で、気体分子は球形容器のなめらかな内壁と弾性衝突をくりかえしていると考え、また、気体分子どうしの衝突はないものとする。気体分子に対する重力の影響は無視し、アボガドロ定数を N_A とする。

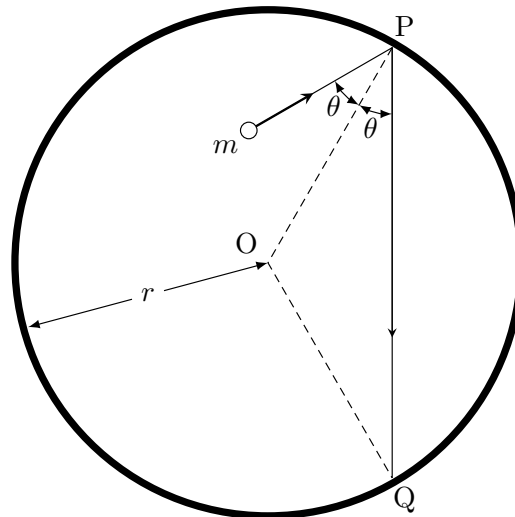
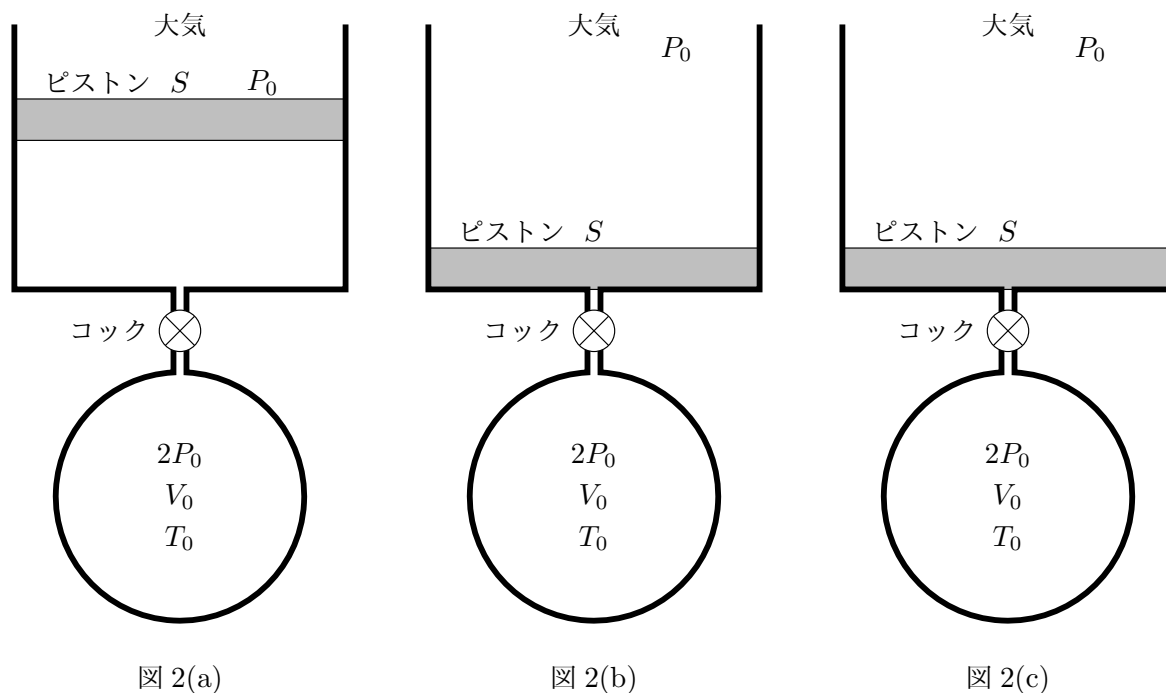


図 1

- (1) 速さ v の 1 個の気体分子が、内壁の点 P に OP と角 θ の角度をなす向きから衝突する。以下の文章中の空欄(あ)~(え)にあてはまる式を m , v , θ , r , N_A から必要なものを用いて表せ。

この気体分子が内壁と 1 回衝突するとき、内壁が気体分子から受ける力積の大きさは (あ) となる。また、この衝突の後、点 Q で内壁に衝突するまでにこの気体分子が進む距離は (い) であるため、単位時間あたりにこの気体分子が内壁に衝突する回数 N は $N = \frac{\text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">(う)}$ (い) となる。したがって、単位時間あたりにこの気体分子が内壁に与える力積の大きさは $N \times \text{span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">(あ)$ となる。球形容器内の気体分子の速さの 2 乗平均を $\overline{v^2}$ とすると、気体が内壁に及ぼす圧力は (え) $\times \overline{v^2}$ である。

図 2(a)~(c) のように、コックのついた細い管でつながれた球形容器とシリンダー、ピストンからなる三つの同じ装置が圧力 P_0 の大気中で設置されている。球形容器の容積は V_0 、シリンダーの断面積は S である。ピストンはシリンダーの中を気密を保ったままなめらかに動くことができる。また、シリンダーは鉛直に保持されており、装置はすべて断熱材でできているものとする。



はじめ、図 2(a)～(c) ともにコックは閉められており、球形容器内には圧力 $2P_0$ 、絶対温度 T_0 の単原子分子からなる理想気体（以下、気体と呼ぶ）が封入されている。図 2(a) ではシリンダー内の容積が V_0 になる位置でピストンが固定され、シリンダー内は真空である。

- (2) 図 2(a) において、ピストンを固定したままコックを開いた。時間がたった後の気体の圧力を P_0 を用いて表せ。
- (3) 図 2(b) において、まずピストンを固定しコックを開く。次に、ピストンに外力を加え、ピストンの位置を図 2(a) と同じ位置までゆっくりと移動させた。状態変化前後で気体分子 1 個の運動エネルギーの平均値は何倍になるか。有効数字 2 桁の数値で答えよ。なお、この変化においては、（圧力） \times （体積） $^{\frac{5}{3}} = \text{一定}$ の関係が保たれている。また、計算に必要であれば近似値 $2^{-\frac{1}{3}} \cong 0.793$ を用いよ。
- (4) 図 2(c) において、ピストンを自由な状態にして、コックをわずかに開くと、ピストンがゆっくり上昇した。なお、ピストンの質量を M 、重力加速度の大きさを g とすると、 $Mg = \frac{1}{2}P_0S$ である。変化後の気体の絶対温度を T_0 を用いて表せ。

3 波長の等しいレーザー光 A, B を干渉させ、写真のフィルム上に干渉縞を記録する。ここでは、レーザー光を波長 λ の平面波として扱う。以下の設問に答えよ。

レーザー光 A, B を考える。図 1 のように、レーザー光 A のフィルムへの入射角を 0 とし、レーザー光 B のフィルムへの入射角を θ とする。

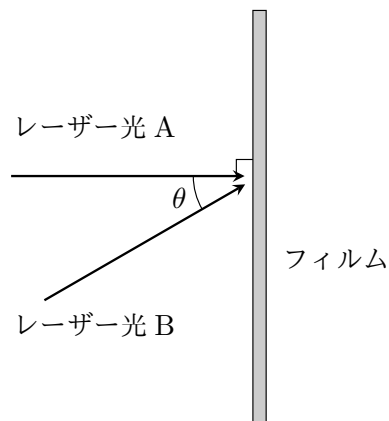


図 1

- (1) 以下の文章中の空欄(あ)と(い)にあてはまる式を λ , θ から必要なものを用いて表せ。また、空欄(う)と(え)に最も適切なものを、選択肢のア～カの中から一つずつ選べ。

図 2 はレーザー光の波の山の波面を細い実線で描き、波の谷の波面を細い破線で描いたものである。また、太い破線は二つの波が強め合う点をつないだものである。図 2 の灰色の直角三角形 pqr に注目すると、 $pr =$ なので、フィルム上に現れる明線（強め合う点）の間隔 d が $d =$ であることが分かる。

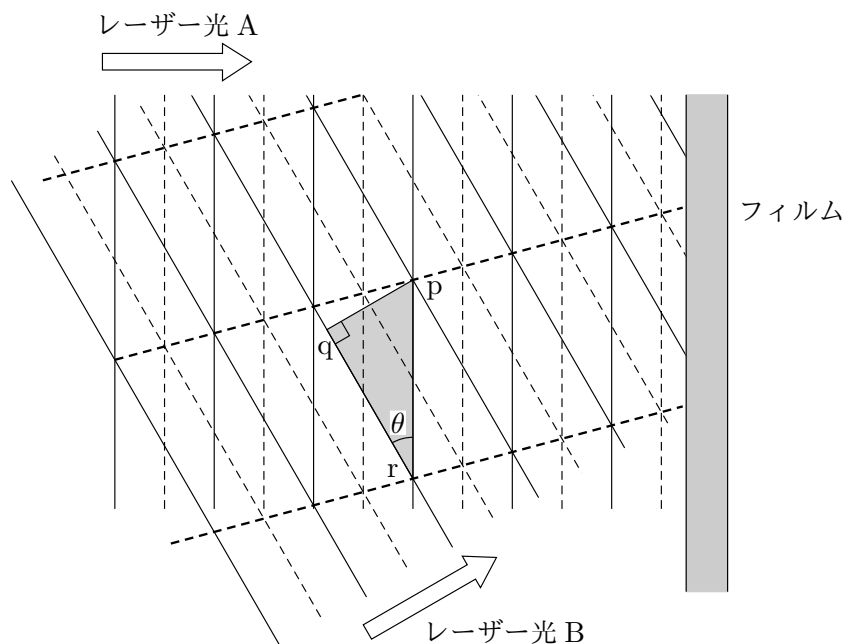


図 2

このフィルムを現像すると、明線の部分だけが透明になり、光を通すようになる。現像したフィルムを回折格子として用い（以下、格子フィルム 1 という）、そこに再びレーザー光 B を入射角 θ で入射させる。図 3 のように、格子フィルム 1 の法線に対する角度が ϕ （図 3 の反時計まわりが正）の方向に回折される光について考える。

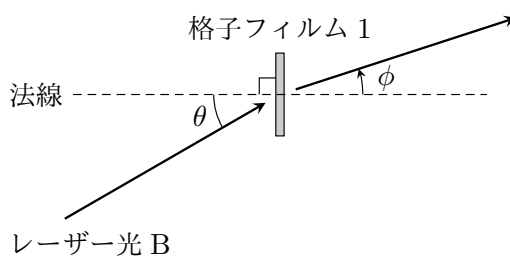


図 3

明るい回折光が現れる条件は、整数を m として、次のように表すことができる。

$$d \times \left(\boxed{\text{(い)}} - \sin \phi \right) = m\lambda$$

この式より、 $m = 0$ の場合は $\phi = \boxed{\text{(う)}}$ であり、 $m = 1$ の場合は $\phi = \boxed{\text{(え)}}$ である。

空欄(う)と(え)の選択肢

ア: 0	イ: $\frac{1}{2}\theta$	ウ: θ
エ: 2θ	キ: -2θ	カ: $-\theta$

次に、図4のように、別のフィルムにレーザー光 A を入射角 α で、レーザー光 B を入射角 θ で入射する。ここで、 $0 < \alpha < \theta$ とする。

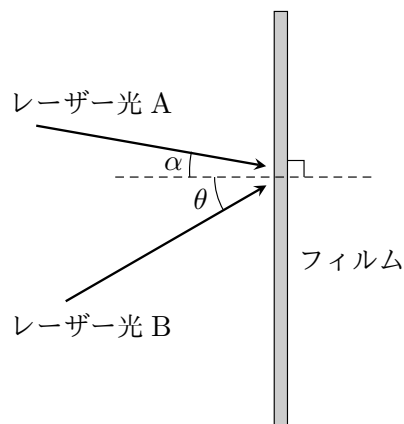


図4

- (2) 以下の文章中の空欄(お)~(こ)にあてはまる式を λ , θ , α から必要なものを用いて表せ。また、空欄(さ)と(し)に最も適切なものを、選択肢のア~カの中から一つずつ選べ。

図5はフィルム近くのレーザー光の波の山の波面を細い実線で描き、波の谷の波面を細い破線で描いたものである。ここではレーザー光 A, B の山や谷がフィルムの表面に沿って移動していく様子に注目し、フィルムの表面で波の山どうしや谷どうしが重なる点として強め合う位置を求める。

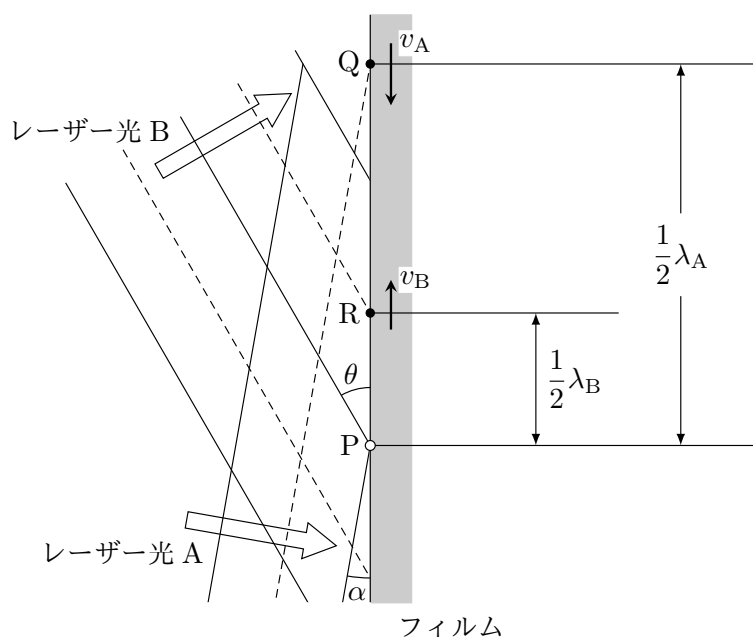


図 5

フィルム表面に現れるレーザー光 A の山の間隔を λ_A 、レーザー光 B の山の間隔を λ_B とすると、 $\lambda_A = \boxed{\text{(お)}}$ 、 $\lambda_B = \boxed{\text{(か)}}$ となる。また、光速を c とすると、レーザー光 A の山や谷がフィルム表面を移動する速さ v_A は、 $v_A = c \times \boxed{\text{(き)}}$ であり、レーザー光 B の山や谷がフィルム表面を移動する速さ $v_B = c \times \boxed{\text{(く)}}$ である。

図 5 において、フィルム上の白丸 P はレーザー光 A、B の山どうしが重なっており、強め合う位置である。また、黒丸 Q の位置にあるレーザー光 A の谷は速さ v_A でフィルム表面に沿って図 5 の下方に移動し、黒丸 R の位置にあるレーザー光 B の谷は速さ v_B でフィルム表面に沿って図 5 の上方に移動する。それらが出会い、重なる点は白丸 P のすぐ隣の強め合う位置である。したがって、フィルム上の強め合う点の間隔 D が $D = \boxed{\text{(け)}}$ と求められる。

この場合もフィルムを現像すると、明線（強めあう点）の部分だけが透明になり、光を通すようになる。現像したフィルムを回折格子として用い（以下、格子フィルム 2 という）、そこに再びレーザー光 B を入射角 θ で入射させ、回折させる。図 6 のように、格子フィルム 2 の法線に対する角度が β （図 6 の反時計まわりが正）の方向に回折される光について考える。

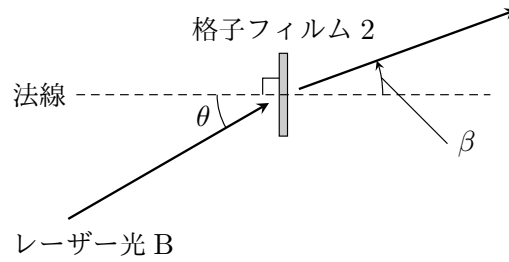


図 6

明るい回折光が現れる条件は，整数 m を用いて，次のように表すことができる．

$$D \times \left(\boxed{\text{(こ)}} - \sin \beta \right) = m\lambda$$

この式より， $m = 0$ の場合は $\beta = \boxed{\text{(さ)}}$ であり， $m = 1$ の場合は $\beta = \boxed{\text{(し)}}$ である．

空欄(さ)と(し)の選択肢

ア： 0

イ： θ

ウ： α

エ： $-\theta$

キ： $-\alpha$

カ： $\theta + \alpha$

1 剛体のつりあい，束縛条件

【メモ】

・剛体のつりあいは以下の式を連立する．

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{各方向の力のつりあい} \\ \text{力のモーメントのつりあい} \end{array} \right.$$

ここに，回りだす瞬間や，滑りだす瞬間の条件を合わせる．

・面の関する束縛条件は，面の変形を無視．

【解答・解説】

(1) 垂直抗力の大きさを N ，静止摩擦力の大きさを R とする．力のつりあいより，

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = N - mg \cos 30^\circ, \\ 0 = R - mg \sin 30^\circ, \end{array} \right. \quad \therefore N = \frac{1}{2}Mg, \quad R = \frac{\sqrt{3}}{2}Mg.$$

(2) C を回転軸としたときの物体にはたらく重力のモーメントは，

$$T = \frac{1}{3}LMg \sin 30^\circ - \frac{\sqrt{3}}{3}LMg \cos 30^\circ = -\frac{1}{3}MgL.$$

(3) 垂直抗力の作用点までの距離を x ，小物体の B からの距離を y とすると，C を回転軸としたときの物体にはたらく力のモーメントは，

$$\begin{aligned} T &= -\frac{1}{3}MgL - \left(\sqrt{3}L - \frac{2\sqrt{3}}{3}x \right) mg \cos 30^\circ + yN \\ &= -\frac{1}{3}MgL + \frac{3}{2}mgL \left(\frac{2x}{3L} - 1 \right) + yN. \end{aligned}$$

ここで， $x = 2L$ で T は最大値を取り，回りだす瞬間， $y = 0$ かつ $T > 0$ より，

$$-\frac{1}{3}MgL + \frac{3}{2}mgL \left(\frac{2 \cdot 2L}{3L} - 1 \right) > 0, \quad \therefore m > \frac{2}{3}M.$$

よって，任意の x で回らないためには，

$$m \leq \frac{2}{3}M.$$

(4) 各物体の運動方程式は，

$$\left\{ \begin{array}{l} MA = \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}Mg \quad \text{あ} \\ ma = -N + mg \quad \text{い} \end{array} \right.$$

x 軸を水平左向き, y 軸を鉛直下向きに定める. 三角柱の加速度成分はそれぞれ,

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cos 30^\circ \\ A \sin 30^\circ \end{pmatrix}.$$

ここで, 束縛条件より $A_y = a$ ゆえ,

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}} \times a.$$

以上より, 運動方程式, および束縛条件より,

$$\begin{cases} MA = \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}Mg, \\ m\frac{A}{2} = -N + mg, \end{cases} \quad \therefore A = \frac{2(M+m)}{4M+m}g, \quad N = \frac{3Mm}{4M+m}g.$$

三角柱の頂点 B と小球の水平方向の位置をそれぞれ X , x とし, 初期位置をそれぞれ $X = 0$, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}L$ とすると, 各物体の位置はそれぞれ,

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}L, \\ X = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{M+m}{4M+m}gt^2. \end{cases}$$

小球が斜面と衝突するとき, $X = x$ ゆえ,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}L = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{M+m}{4M+m}gt^2, \quad \therefore t = \sqrt{\frac{4M+m}{M+m} \frac{L}{g}}.$$

- (5) 斜面と垂直な方向にのみ力積を受けるので, 斜面と平行な速度成分を $v_{//}$, 斜面に垂直な速度成分 (斜面にめり込む向きを負) を v_{\perp} とすると, 衝突の条件*1より,

$$\begin{cases} v_{//} = v \sin 30^\circ, \\ v_{\perp} - 0 = -e(-v \cos 30^\circ - 0), \end{cases} \quad \therefore v_{//} = \frac{1}{2}v, \quad v_{\perp} = \frac{\sqrt{3}}{2}ev.$$

よって,

$$v = \sqrt{v_{//}^2 + v_{\perp}^2} = \frac{\sqrt{1+3e^2}}{2}v.$$

*1 はね返り係数の式.

2 分子運動論，熱力学の基本処理，断熱過程，ムラあり過程

【メモ】

- ・分子運動論は直方体容器，球形容器で計算できるようにしておく。
- ・熱力学の基本的（むらがなく熱あり）な過程は，可動部分のつりあいから圧力の決定，状態方程式から温度の決定．内部エネルギー変化を公式，気体のする仕事を $P - V$ 図の面積評価，熱力学第 1 法則を通じて熱を計算するのが基本．
- ・ゆっくりとした（むらのない）断熱過程は，気体の状態決定は，ポアソンの公式（圧力または体積の決定）と状態方程式（温度の決定）を，熱力学第 1 法則は仕事の決定式として用いる．
- ・気体にむらが生じる過程は，系全体のエネルギー保存則（または収支）に注目する．

【解答・解説】

(1) 運動量収支より，

$$I_{\text{分子}} = mv \cos \theta - m(-v \cos \theta) = 2mv \cos \theta, \quad \therefore |I_{\text{壁}}| = |-I_{\text{分子}}| = \underbrace{2mv \cos \theta}_{\text{あ}}$$

衝突から衝突までの間に進む距離 L は，図より，

$$L = \underbrace{2r \cos \theta}_{\text{い}}$$

よって，単位時間当たりの衝突回数 N は，

$$N = \frac{v}{\underbrace{2r \cos \theta}_{\text{う}}}$$

したがって，単位時間あたりに分子 1 個が容器内壁に与える力積の大きさ i は，

$$i = N \cdot 2mv \cos \theta = \frac{mv^2}{r}$$

であり，これを 1 mol の全分子に亘って総和をとれば，

$$I = \sum_{k=1}^{N_A} \frac{mv_k^2}{r} = \frac{N_A m \overline{v^2}}{r}$$

気体分子が容器内壁に与える力積を気体が容器内壁に与える力積と同一視すれば，

$$P \cdot 4\pi r^2 = \frac{N_A m \overline{v^2}}{r}, \quad \therefore P = \frac{N_A m}{\underbrace{4\pi r^3}_{\text{え}}} \times \overline{v^2}$$

(2) 系のエネルギー保存則から，

$$\Delta U = \frac{3}{2} nr \Delta T = 0, \quad \therefore \Delta T = 0.$$

よって、状態方程式より、

$$\begin{cases} 2P_0V_0 = nRT_0, \\ P \cdot 2V_0 = nRT_0, \end{cases} \quad \therefore P = \underline{\underline{P_0}}.$$

(3) ポアソンの公式、および状態方程式より、

$$\begin{cases} P(2V_0)^{\frac{5}{3}} = 2P_0V_0^{\frac{5}{3}}, \\ P \cdot 2V_0 = nRT, \end{cases} \quad \therefore P = 2^{-\frac{2}{3}}P_0, \quad T = 2^{-\frac{2}{3}}\frac{P_0V_0}{nR} = 2^{-\frac{2}{3}}T_0.$$

ここで、(1) より、気体分子の運動エネルギーの平均値と気体の温度の間には、

$$P = \frac{N_A m}{4\pi r^3} = \frac{1 \cdot RT}{4\pi r^3/3}, \quad \therefore \frac{1}{2} \overline{mv^2} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T$$

の関係があるので、

$$\frac{K_{\text{fin}}}{K_{\text{ini}}} = \frac{T}{T_0} = 2^{-\frac{2}{3}} = (0.793)^2 = \underline{\underline{0.63}}.$$

(4) 気体内部の圧力はピストンのつりあいより、

$$PS = P_0S + Mg, \quad \therefore P = P_0 + \frac{Mg}{S} = \frac{3}{2}P_0.$$

よって、この間に気体が外部にした仕事 W は $P-V$ 図より (図略)、

$$W = P\Delta(V - V_0) = \frac{3}{2}P_0(V - V_0).$$

ここで、状態方程式より、

$$\frac{3}{2}P_0V = nRT, \quad \therefore P_0V = \frac{2}{3}nRT$$

ゆえ、

$$W = nRT - \frac{3}{2}nRT_0.$$

また、内部エネルギー変化は公式より、

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR(T - T_0).$$

よって、熱力学第1法則より、

$$nRT - \frac{3}{2}nRT_0 + \frac{3}{2}nR(T - T_0) = 0, \quad \therefore T = \underline{\underline{\frac{9}{10}T_0}}.$$

3 光の干渉

【メモ】

・干渉条件は位相差で押さえる.

$$\frac{2\pi}{\lambda}(\text{経路差}) = \begin{cases} 2m\pi & (\text{強めあい}) \\ (2m-1)\pi & (\text{弱めあい}) \end{cases}$$

m は整数であり, 媒質中であれば波長を $\frac{\lambda}{n}$ とする (n は媒質の屈折率).

【解答・解説】

(1) 図 2 より,

$$pr = \frac{\lambda}{\underbrace{\sin \theta}_{\text{あ}}} .$$

図 3 より, 強め合いの条件は,

$$\frac{2\pi}{\lambda}d(\underbrace{\sin \theta}_{\text{い}} - \sin \phi) = 2m\pi .$$

よって, $m = 0$ では,

$$\sin \theta - \sin \phi = 0, \quad \therefore \phi = \theta_{\text{う}} \cdots (\text{ウ}).$$

また, $m = 1$ では,

$$\sin \theta - \sin \phi = \sin \theta, \quad \therefore \phi = \underbrace{0}_{\text{え}} \cdots (\text{ア}).$$

(2) 図 5 より,

$$\lambda_A = \frac{\lambda}{\underbrace{\sin \alpha}_{\text{お}}}, \quad \lambda_B = \frac{\lambda}{\underbrace{\sin \theta}_{\text{か}}} .$$

フィルム上での波の速さは, 図 5 の PQ に注目して, Q の谷の波面が P の位置に到達する時間を t とすると,

$$v_A t = \overline{PQ} = \frac{1}{2} \lambda_A = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha}$$

であり, この間の波面の伝播を見れば,

$$ct = \frac{1}{2} \lambda$$

となる。よって、2式より、

$$v_A = \frac{1}{\underbrace{\sin \alpha}_{\text{き}}} \times c.$$

同様にして、

$$v_B = \frac{1}{\underbrace{\sin \theta}_{\text{く}}} \times c.$$

図5の点Qの位置を x_Q 、点Rの位置を x_R とすると、図5における点Pの位置を $x_P = 0$ とすれば、

$$\begin{cases} x_Q = \frac{1}{2}\lambda_A - v_A t, \\ x_R = \frac{1}{2}\lambda_B + v_B t. \end{cases}$$

よって、2点が重なる時刻 t は、

$$\frac{1}{2}\lambda_A - v_A t = \frac{1}{2}\lambda_B + v_B t, \quad \therefore t = \frac{1}{2} \frac{\lambda_A - \lambda_B}{v_A + v_B} = \frac{\lambda}{2c} \frac{\sin \theta - \sin \alpha}{\sin \theta + \sin \alpha}.$$

であり、このときの位置 x は明線間隔 D と等しく、

$$D = x = \frac{c}{\sin \theta} \frac{\lambda}{2c} \frac{\sin \theta - \sin \alpha}{\sin \theta + \sin \alpha} + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\sin \theta} = \frac{\lambda}{\underbrace{\sin \theta + \sin \alpha}_{\text{け}}}.$$

図6より、強め合いの条件は、

$$\frac{2\pi}{\lambda} D(\underbrace{\sin \theta}_{\text{こ}} - \sin \beta) = 2m\pi.$$

よって、 $m = 0$ では、

$$\sin \theta - \sin \beta = 0, \quad \therefore \beta = \theta_{\text{き}} \cdots (\text{イ}).$$

また、 $m = 1$ では、

$$\sin \theta - \sin \beta = \sin \theta + \sin \alpha, \quad \therefore \beta = \underbrace{-\alpha}_{\text{け}} \cdots (\text{キ}).$$