物理補講（第１回）

目次

問題編

1 図 1 のように，天井に取り付けられたなめらかに回転する軽い滑車 P に糸をかけて，一端に質量 m の小球をつけ，もう一端を一定の力で引いた．以下では，糸は軽くて伸び縮みせず，小球の運動は鉛直方向のみであり，鉛直上向きを正とする．また，空気抵抗は無視し，重力加速度の大きさを g とする．以下の問いに答えよ．

軽い糸が一端において物体を引く力の大きさは，他端において糸にはたらいている力の大きさに等しいと考えてよい．

(1)　一定の力の大きさは $2mg$ であったとする．A の加速度を求めよ．

次に，図 2 のように，A と質量 $2m$ の小球 B を糸でつないで P にかけ，時刻 $t = 0$ で小球を全て同時に静かにはなした．A，B を引く糸の力の大きさを S，A の加速度を a とする．

(2)　A と B それぞれの運動方程式を書け．

(3)　A の変位が h になる時刻と，そのときの A の運動エネルギーを求めよ．

今度は，図 3 のように，A と B を糸でつないでなめらかに回転する軽い滑車 Q にかけ，この Q と質量 $3m$ の小球 C を糸でつないで P にかけて，小球全てを同時に静かにはなした．A，B を引く糸の力の大きさを S_1 とし，Q，C を引く糸の力の大きさを S_2 とする．また，A，B，C の加速度をそれぞれ a_{A}，a_{B}，a_{C} とする．

(4)　A，B，C それぞれの運動方程式を書け．

(5)　a_{A}，a_{B}，a_{C} の間の関係式を書け．

Q には鉛直下向きで大きさ $2S_1$ の力と鉛直上向きで大きさ $2S_2$ の力がはたらいている．Q が軽い場合には $2S_1 = S_2$ の関係式が成り立つとしてよい．

(6)　a_{C} を g を用いて表せ．

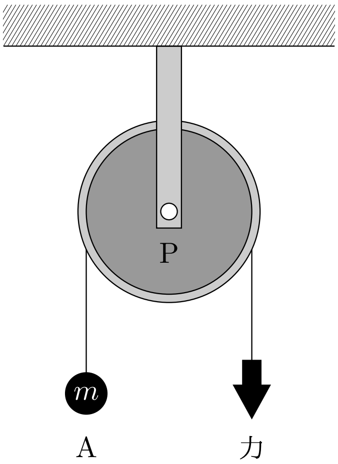


図 1

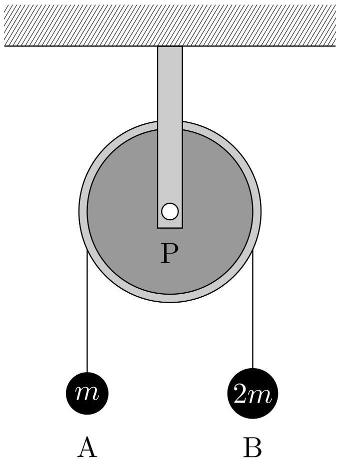


図 2

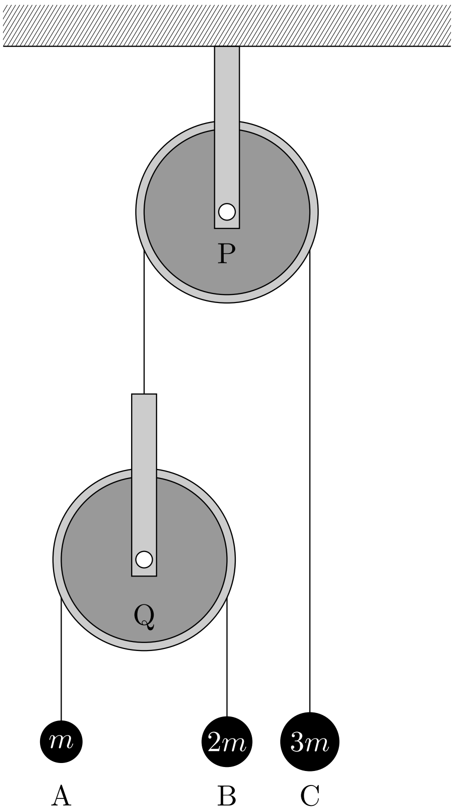


図 3

《メモ》

2022 年大阪公立大より．(4) の問題文を一部削り，重心に関する設問を削除した．

2　次の文を読んで，$\boxed{}$ に適した式をそれぞれもっとも簡単な形で記せ．なお，$\boxed{\boxed{}}$ は，すでに $\boxed{}$ で与えられたものと同じものを表す．

2 種類のおもり A，C が質量を無視できる軽いロープでつながれている．このロープを図に示す 2 個の定滑車と 1 個の動滑車に通し，動滑車にはおもり B をつり下げた．3 個の滑車は同一の鉛直平面内に配置され，動滑車はこの平面内を鉛直方向にのみ移動する．

動滑車とおもり A，C をつり下げている部分のロープは十分に長く，鉛直とする．また，滑車はなめらかに回転し質量は無視でき，ロープは伸び縮みせず，たるむこともない．おもり A，B，C の質量はそれぞれ m，M，$2m$ であり，重力加速度の大きさを g とする．

(1)　最初，3 個のおもりを動かないように手で支えておいた状態から，ある瞬間に手を離すと，おもりは動き出した．このとき，3 個のおもり A，B，C に生じる加速度を鉛直上向きを正としてそれぞれ a_{A}，a_{B}，a_{C} で，また，おもり A をつるしているロープの張力の大きさを T で表す．おもりの運動中，ロープの張力は一定とすると，おもり A，B，C の動きを表す運動方程式は m，M，g，T，a_{A}，a_{B}，a_{C} を用いて，

おもり A : $\boxed{\text{イ}}$，　おもり B : $\boxed{\text{ロ}}$，　おもり C : $\boxed{\text{ハ}}$

で表される．

各おもりが動き出してから微小な時間 t_0 経過後の各おもりの変位は，鉛直上向きを正とし，a_{A}，a_{B}，a_{C}，t_0 を用いて表すと，

おもり A : $\boxed{\text{ニ}}$，　おもり B : $\boxed{\text{ホ}}$，　おもり C : $\boxed{\text{ヘ}}$

となる．

おもり A，C が 1 本のロープでつながれているため，3 個のおもりの変位は互いに制約されるという条件と，$\boxed{\boxed{\text{ニ}}}$ 〜 $\boxed{\boxed{\text{ヘ}}}$ から，a_{A}，a_{B}，a_{C} が満たすべき関係式は，$\boxed{\text{ト}}$ で表される．

$\boxed{\boxed{\text{イ}}}$ 〜 $\boxed{\boxed{\text{ハ}}}$ と $\boxed{\boxed{\text{ト}}}$ の式より，a_{A}，a_{B}，a_{C}，T を m，M，g で表すと，

$a_{\mathrm{A}} = \boxed{\text{チ}}$，　$a_{\mathrm{B}} = \boxed{\text{リ}}$，　$a_{\mathrm{C}} = \boxed{\text{ヌ}}$　$T = \boxed{\text{ル}}$

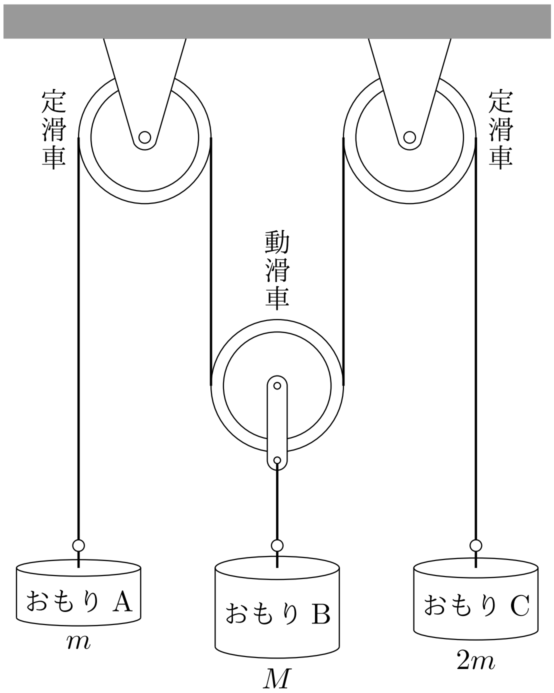
となる．

(2)　おもり A，B，C は，それぞれの質量の大小関係により，上向きか下向きに運動するが，(1) の議論に基づくと，おもり B が静止したまま，おもり A，C のみ運動する場合があり得る．このとき，おもり B の質量 M が満たすべき条件をおもり A の質量 m を用いて表すと，$\boxed{\text{ヲ}}$ となる．

また，この条件のもと，おもり A，C が動き出してから時間 t_1 経過後までのおもり A，C の変位は，鉛直上向きを正として g，t_1 で表すと，

おもり A : $\boxed{\quad ワ \quad}$，　おもり C : $\boxed{\quad カ \quad}$

となる．



《メモ》………

2001 年京都大後期日程より．問題文から単位を削除し，また一部に訂正を加えた．

3 図に示すように，なめらかで水平な床面に置かれた質量 m の物体 A の水平な上面に，質量 m の物体 B が置かれている．物体 A は，なめらかにまわる軽い定滑車 P_1 と動滑車 P_2 を通した伸び縮みしない糸 S_1 で天井と結ばれている．また，物体 A と物体 B は，なめらかにまわる軽い定滑車 P_3 を通した伸び縮みしない糸 S_2 でつながれている．物体 A と物体 B の間の静止摩擦係数を $\dfrac{1}{2}$，動摩擦係数を $\dfrac{1}{4}$ とする．また，重力加速度の大きさを g とする．

はじめに，動滑車 P_2 に質量 M のおもり C をつけて静かに手を放したところ，物体 A，B はそのまま静止していた．

(1)　糸 S_1 の張力の大きさ T_1 を，M，g を用いて表せ．

(2)　糸 S_2 の張力の大きさ T_2 を，M，g を用いて表せ．

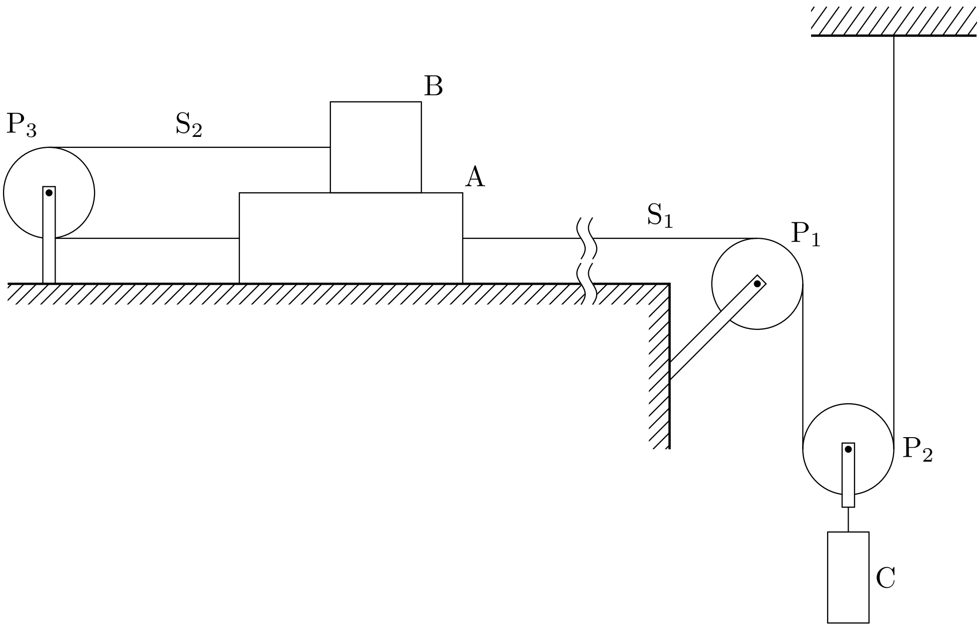
(3)　物体 A，B が動き出さなかったことから，おもり C の質量 M はある値 M' より小さくなければならない．M' を，m を用いて表せ．

次に，おもり C を質量 $2m$ のおもりに変えて静かに手を放したところ，物体 A，B は動き始めた．ここで，物体 A が右方向に動く加速度の大きさを α とする．

(4)　糸 S_1 の張力の大きさ T_1 を，M，g を用いて表せ．

(5)　糸 S_2 の張力の大きさ T_2 を，M，g を用いて表せ．

(6)　物体 A の加速度の大きさ α を，g を用いて表せ．



《メモ》

2009 年法政大より．摩擦係数の値を変更し（元は静止摩擦係数 0.4，動摩擦係数 0.2），一部問題文の削除，摩擦力の大きさを問うだけの設問を削除した．

4 水平面 QRS およびそれと傾斜角 θ でつながる斜面 PQ をもつ質量 M の台が水平でなめらかな床の上に置かれている．台の上面のうち，斜面 PQ と水平面 QR はなめらかであるが，R 点より左側の水平面は粗い面である．質量 m の物体 A と台の粗い面との間の動摩擦係数を μ とする．また，台と床の間には摩擦力ははたらかないものとする．水平面 QRS から P 点までの高さを h，QR および RS の距離を ℓ とする．物体 A は十分に小さく，その重心と P 店の距離は無視でき，Q 点（斜面 PQ と水平面 QR のつなぎめ）をなめらかに通過できるものとする．重力加速度の大きさを g とする．

I　台が動かないように床にストッパーで固定した状態で，斜面上の P 点に物体 A をのせた．物体 A は滑車を介して物体 B とひもでつながれている．ただし，滑車とひもの質量は無視できるものとする．

(1)　このとき，物体 A と物体 B がつりあって静止していた．物体 B の質量 m' を求めよ．

次に，物体 A と物体 B をつないでいるひもをそっと焼き切ったところ，物体 A は斜面 PQ を滑り落ちた後，水平面を左に動いて，S 点で静止した．

(2)　Q 点を通過する前後で物体 A の速さは変化しない．その速さ v_0 を求めよ．

(3)　動摩擦係数 μ を求めよ．

II　次に，滑車を台から取り外し，台を固定していたストッパーをはずして台が床の上を水平（x 軸）方向にのみ自由に動けるようにした後，物体 A を P 点にそっとのせた（このときの時刻を $t = 0$ とする）．床に対する物体 A および台の運動を考え，水平左向きに x 軸の正，鉛直下向きに y 軸の正をとるものとする．

(4)　物体 A が斜面 PQ を滑り落ちているとき，物体 A と斜面 PQ との間の垂直抗力の大きさを N，物体の加速度を (a_x, a_y)，台の加速度を $(b, 0)$ とする．物体 A および台の加速度の成分 a_x，a_y，b それぞれに関する運動方程式を表せ．

(5)　a_x，a_y，b の間の関係を求めよ．次に垂直抗力の大きさ N を求めよ．

(6)　物体 A が動き始めてから，Q 点に達するまでの時間 t_1 を求めよ．

(7)　物体 A が Q 点を通過する直前の台の速さ V_1 を求めよ．

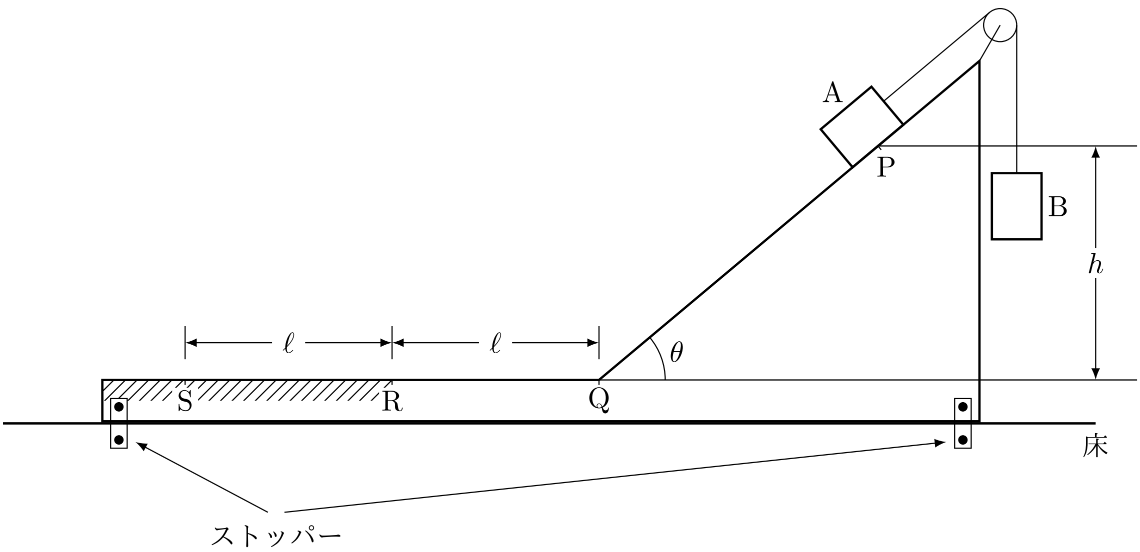


図 1

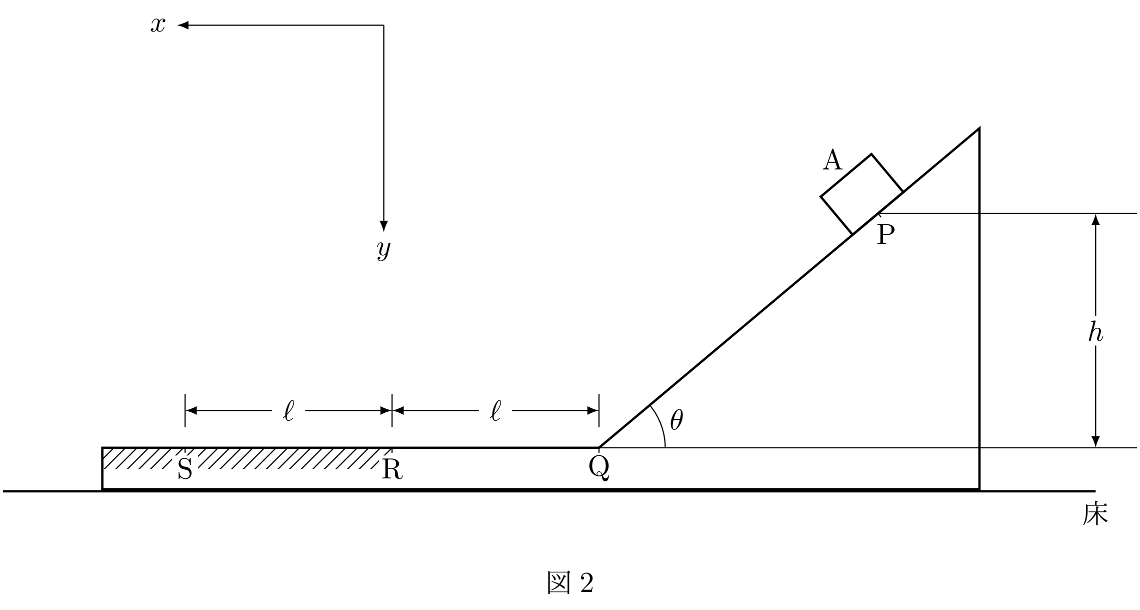


図 2

《メモ》

2006 年東京医科歯科大より．(7) 以降の設問を削除した．

5 一様な直方体を，その側面に対して垂直かつ底面に対して角度 θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ をなす平面で切断してできた同形状の 2 つの物体 A，B がある．図 1 のように，物体 A，B がもとの直方体の形状になるように互いの斜面が接している状態で水平な床に置かれている．物体 A は，物体 B を取り除いても倒れることはなく，物体 A の左側の面は鉛直な壁に常に接しているとする．物体 A，B の質量はともに m であり，重力加速度の大きさを g とする．床，壁，および物体 A と物体 B の接触面 S はなめらかであるとする．また，接触面 S にはたらく，接触面 S と垂直な方向の力の大きさを N と表す．以下の問いに答えよ．

まず，図 1 の状態において，物体 B に水平左向きに大きさ F_0 の力を加えたところ，図 2 のように，物体 A，B ともに静止したままであった．

(1)　N を，F_0，θ を用いて表せ．

(2)　物体 A が床から受ける垂直抗力の大きさを，F_0，m，g，θ を用いて表せ．

物体 B に加えている水平左向きの力の大きさをゆっくりと増加させたところ，この力の大きさが F_1 になったところで，物体 B は水平左向きに，物体 A は鉛直上向きに，同時に動き始めた．

(3)　F_1，N を，それぞれ m，g，θ を用いて表せ．

物体 B をゆっくりと左方に押し続け，図 3 のように，物体 A の底面と床の距離が h になったところで静止させた．この状態から，物体 B に加えている水平左向きの力をすばやく取り除くと，物体 A，B はつねに接したまま，物体 A は鉛直下向きに，物体 B は水平右向きに動いた．

(4)　物体 A の鉛直方向の加速度を a_{A}（鉛直上向きを正），物体 B の水平方向の加速度を a_{B}（水平右向きを正）とする．物体 A の鉛直方向の運動方程式，および物体 B の水平方向の運動方程式を立式せよ．

(5)　a_{A}，a_{B} の間に成り立つ関係式を，a_{A}，a_{B}，θ を用いて表せ．

(6)　a_{A}，a_{B}，および A が壁から受ける力の大きさ R を，m，g，θ のうち必要なものを用いて表せ．

物体 A が床に達した後，物体 B は物体 A から離れて右方へ滑っていった．

(7)　物体 A から離れた後の物体 B の速度 v を，m，g，h，θ のうち必要なものを用いて表せ．

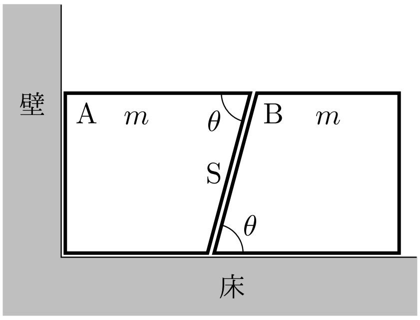


図 1

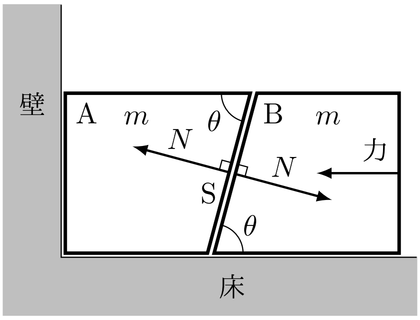


図 2

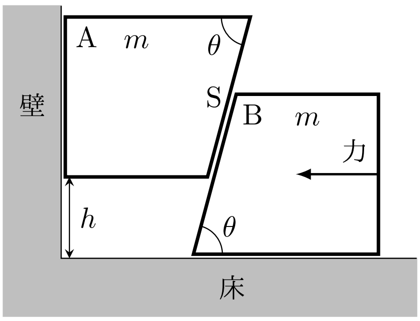


図 3

《メモ》……………………………………………………………………………………………………

2018 年金沢大より．物理量の問い方の変更，設問の削除等を行った．

❦ver.2023

6 図のように，なめらかな水平面 D の上に，直方体形の物体 C を置く．物体 C のなめらかな上面に，小球 A を置き，小球 A を手で動かないように押さえる．小球 A と小球 B を軽い糸でつなぐ．物体 C の上面の一端に置かれたなめらかな滑車に糸をかけて，小球 B を物体 C のなめらかな側面に接してつり下げる．手を放して，小球 A，B が運動し始めてから，小球 B が水平面 D につくまでの間の小球 A，B，および物体 C の運動について以下の問いに答えよ．ただし，小球 A，小球 B，物体 C の質量をそれぞれ $3M$，$2M$，$10M$ とする．答えには，M，g（重力加速度の大きさ），および数以外を用いてはならない．

図のように，水平右向きに力 F を加える．

(1)　物体 C が静止しているとき，小球 B の加速度の大きさを求めよ．

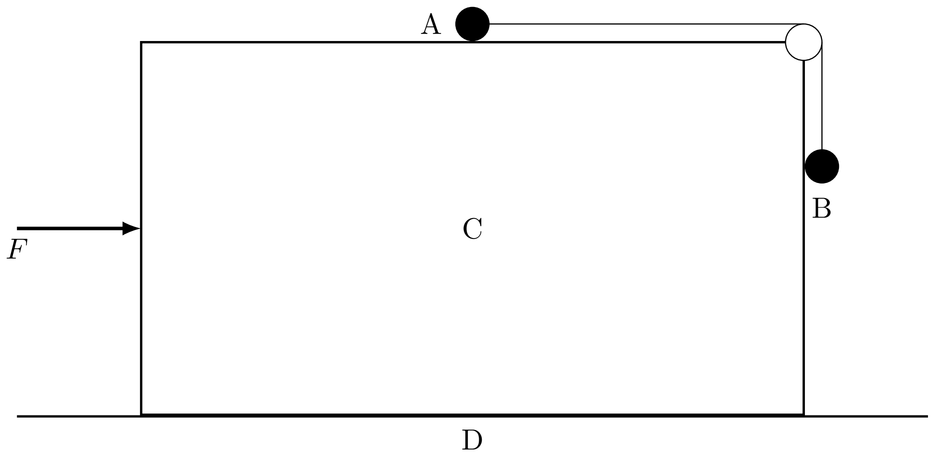
(2)　物体 C を静止させている力 F の大きさを求めよ．

(3)　物体 C が静止しているとき，水平面 D が物体 C に及ぼす垂直抗力の大きさを求めよ．

力 F を増加させたところ，物体 C は力 F と同じ向きに $\dfrac{1}{10}g$ の加速度で運動した．

(4)　このときの小球 B の加速度の大きさを求めよ．

(5)　このときの力 F を求めよ．



《メモ》

1997 年横浜国立大より．

略解・ヒント

■略解

1

(1) $a = g$

(2) $\begin{cases} ma = S - mg\,, \\ 2m(-a) = S - 2mg \end{cases}$

(3) $t = \sqrt{\dfrac{6h}{g}}\,,\quad \dfrac{1}{2}m{v_\mathrm{A}}^2 = \dfrac{1}{3}mgh$

(4) $\begin{cases} ma_\mathrm{A} = S_1 - mg\,, \\ 2ma_\mathrm{B} = S_1 - 2mg\,, \\ 3ma_\mathrm{C} = S_2 - 3mg \end{cases}$

(5) $a_\mathrm{A} + a_\mathrm{B} + 2a_\mathrm{C} = 0$

(6) $a_\mathrm{C} = -\dfrac{1}{17}g$

2

(1) イ：$ma_\mathrm{A} = T - mg$　ロ：$Ma_\mathrm{B} = 2T - Mg$

ハ：$2ma_\mathrm{C} = T - 2mg$

ニ：$\dfrac{1}{2}a_\mathrm{A}{t_0}^2$　ホ：$\dfrac{1}{2}a_\mathrm{B}{t_0}^2$　ヘ：$\dfrac{1}{2}a_\mathrm{C}{t_0}^2$

ト：$a_\mathrm{A} + 2a_\mathrm{B} + a_\mathrm{C} = 0$

チ：$a_\mathrm{A} = \dfrac{5M - 8m}{3M + 8m}g$

リ：$a_\mathrm{B} = -\dfrac{3M - 8m}{3M + 8m}g$

ヌ：$a_\mathrm{C} = \dfrac{M - 8m}{3M + 8m}g$

ル：$T = \dfrac{8Mm}{3M + 8m}g$

(2) ヲ：$\dfrac{8}{3}m$　ワ：$\dfrac{1}{6}g{t_1}^2$　カ：$-\dfrac{1}{6}g{t_1}^2$

3

(1) $\dfrac{1}{2}Mg$　(2) $\dfrac{1}{4}Mg$　(3) $2m$　(4) $\dfrac{9}{10}mg$

(5) $\dfrac{9}{20}mg$　(6) $\dfrac{1}{5}g$

4

(1) $m\sin\theta$　(2) $\sqrt{2gh}$　(3) $\dfrac{h}{\ell}$

(4) $\begin{cases} ma_x = N\sin\theta\,, \\ ma_y = -N\cos\theta + mg\,, \\ Mb = -N\sin\theta \end{cases}$

(5) $a_y = (a_x - b)\tan\theta\,,\quad N = \dfrac{Mmg\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}$

(6) $\sqrt{\dfrac{M + m\sin^2\theta}{(M+m)\sin^2\theta}\dfrac{2h}{g}}$

(7) $\sqrt{\dfrac{m^2\cos^2\theta}{(M+m)(M + m\sin^2\theta)}2gh}$

5

(1) $\dfrac{F_0}{\sin\theta}$　(2) $mg - \dfrac{F_0}{\tan\theta}$

(3) $F_1 = mg\tan\theta\,,\quad N = \dfrac{mg}{\cos\theta}$

(4) $\begin{cases} ma_\mathrm{A} = N\cos\theta - mg\,, \\ ma_\mathrm{B} = N\sin\theta \end{cases}$

(5) $a_\mathrm{A} = -a_\mathrm{B}\tan\theta$

(6) $a_\mathrm{A} = -g\sin^2\theta\,,\quad a_\mathrm{B} = g\sin\theta\cos\theta\,,$

$R = mg\sin\theta\cos\theta$

(7) $\sqrt{2gh}\cos\theta$

6

(1) $\dfrac{2}{5}g$　(2) $\dfrac{6}{5}Mg$　(3) $\dfrac{71}{5}Mg$　(4) $\dfrac{17}{50}g$

(5) $\dfrac{63}{25}Mg$

■ヒント

$\boxed{1}$

(2)　物体 A の位置を x_{A}，物体 B の位置を x_{B}，滑車の位置を x_{P} としたとき，糸の長さが一定なことから，

$$(x_{\mathrm{P}} - x_{\mathrm{A}}) + (y_{\mathrm{P}} - x_{\mathrm{B}}) = \mathrm{const}$$

の関係を満たす．これより，2 物体の加速度の間の関係式が求まる．

(3)　加速度 a が一定の場合，物体の位置 x，および速度 v は，$t = 0$ での位置を $x(0)$，速度を $v(0)$ として，

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + v(0)t + \dfrac{1}{2}at^2\,, \\ v(t) = v(0) + at\,, \end{cases}$$

と表される．

(4)　加速度は全て鉛直上向きを正としていることに注意（自分勝手にイメージをしないように）．

(5)　滑車 Q の位置を x_{Q} として，(2) と同じように考えればよい．なお，糸が 2 本あるので，それぞれの糸に関して束縛条件を考える必要がある．

$\boxed{2}$

(1)　加速度は全て鉛直上向きを正としていることに注意して運動方程式を立式する（自分勝手にイメージをしないように）．後は，$\boxed{1}$ と同様に解いていけばよい．

(2)　B が静止していることから，$a_{\mathrm{B}} = 0$ を考える．

$\boxed{3}$

(1)　各物体のつりあいを考える．張力，垂直抗力，静止摩擦力の 3 つは未知量でおく力であることを思い出す．

(3)　(1)，(2) の結果を使って，滑らない条件を考える．

(4)　滑車の添え字と合わせて，それぞれの位置を x_1，y_2，x_3，物体の位置をそれぞれ x_{A}，x_{B}，y_{C} とする．例えば，糸 2 に関して束縛条件を考えると，

$$(x_{\mathrm{A}} - x_2) + (x_{\mathrm{B}} - x_2) = \mathrm{const}$$

となる．糸 1 に関しても考えて，加速度の間の関係式を求め，運動方程式と連立する．

4

(2)(3)　等加速度運動ゆえ，時間追跡，エネルギー収支でもどちらでも可能．時刻が問われていないのでエネルギー収支で計算するのが楽．

(5)　座標軸の向きに注意して，位置の間に関係をつける．

(6)　加速度一定かつ時刻が問われていることから，等加速度運動の公式を用いる．

(7)　等加速度運動ゆえエネルギー収支でも可能だが，誘導的に時間追跡で解くのが楽．

5

(3)　(2) で求めた床から受ける垂直抗力が 0 になる瞬間を考える．

(4)　正の向きに注意（自分で勝手にイメージをしないように）．

(5)　各物体の角が記されている頂点を見て，位置の間に関係をつけるとよい．

(6)　A の水平方向の運動方程式（つりあい）を考える．

(7)　等加速度運動ゆえ，時間追跡，エネルギー収支でもどちらでも可能．

6

(1)　運動方程式と束縛条件を連立する．

(2)　C にはたらく力を考えるとき，右上に滑車があることに留意する（以降の設問でも同様）．

(4)　運動方程式と束縛条件を連立する．束縛条件は，糸に関するものと，B と C の接触面に関するもので 2 つある．

解答編

1 糸に関する束縛条件①

(1)　運動方程式より，

$$ma = 2mg - mg\,, \qquad \therefore a = \underset{\sim}{g}\,.$$

(2)　運動方程式は[*1]，

$$\begin{cases} \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{ma = S - mg}\,, \\ \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{2m(-a) = S - 2mg}\,. \end{cases}$$

(3)　運動方程式より，

$$a = \frac{1}{3}g\,, \quad S = \frac{4}{3}mg\,.$$

加速度一定より，物体 A の位置および速度は，

$$\begin{cases} x_{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{6}gt^2\,, \\ v_{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{3}gt\,, \end{cases}$$

となり，$x_{\mathrm{A}} = h$ を解いて，

$$\frac{1}{6}gt^2 = h\,, \qquad \therefore t = \underset{\sim\sim}{\sqrt{\frac{6h}{g}}}\,.$$

v_{A} に代入すれば，

$$\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{A}}}^2 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{3}mgh}\,.$$

(4)　運動方程式は，

$$\begin{cases} \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{ma_{\mathrm{A}} = S_1 - mg}\,, \\ \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{2ma_{\mathrm{B}} = S_1 - 2mg}\,, \\ \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{3ma_{\mathrm{C}} = S_2 - 3mg}\,. \end{cases}$$

[*1] 糸の長さが一定なことから，

$$(x_{\mathrm{P}} - x_{\mathrm{A}}) + (x_{\mathrm{P}} - x_{\mathrm{B}}) = \mathrm{const}$$

を満たし，両辺の時間微分を考えれば $a_{\mathrm{A}} + a_{\mathrm{B}} = 0$ を得る．

(5)　それぞれの糸の長さが一定ゆえ，

$$\begin{cases} (x_{\mathrm{P}}-x_{\mathrm{C}})+(x_{\mathrm{P}}-x_{\mathrm{Q}})=\mathrm{const}\,, \\ (x_{\mathrm{Q}}-x_{\mathrm{A}})+(x_{\mathrm{Q}}-x_{\mathrm{B}})=\mathrm{const}\,, \end{cases}$$

を満たす．x_{P} のみ定数であることに留意し，時間変化を取れば，

$$\begin{cases} a_{\mathrm{C}}+a_{\mathrm{Q}}=0\,, \\ 2a_{\mathrm{Q}}-a_{\mathrm{A}}-a_{\mathrm{B}}=0\,, \end{cases} \qquad \therefore\ \underline{a_{\mathrm{A}}+a_{\mathrm{B}}+2a_{\mathrm{C}}=0}\,.$$

(6)　$S_2=2S_1$ として，運動方程式，および束縛条件を解いて，

$$\begin{cases} ma_{\mathrm{A}}=S_1-mg\,, \\ 2ma_{\mathrm{B}}=S_1-2mg\,, \\ 3ma_{\mathrm{C}}=2S_1-3mg\,, \\ a_{\mathrm{A}}+a_{\mathrm{B}}+2a_{\mathrm{C}}=0 \end{cases} \qquad \therefore\ a_{\mathrm{C}}=\underline{-\frac{1}{17}g}\,,\quad a_{\mathrm{A}}=\frac{7}{17}g\,,\quad a_{\mathrm{B}}=-\frac{5}{17}g\,,\quad S_1=\frac{24}{17}mg\,.$$

2　糸に関する束縛条件②

(1)　運動方程式は，

$$\begin{cases} \underbrace{ma_{\mathrm{A}} = T - mg}_{\text{イ}}, \\ \underbrace{Ma_{\mathrm{B}} = 2T - Mg}_{\text{ロ}}, \\ \underbrace{2ma_{\mathrm{C}} = T - 2mg}_{\text{ハ}}. \end{cases}$$

張力の大きさ T は一定値をとるという仮定から加速度は一定となり，各おもりの変位は，

$$\begin{cases} \varDelta x_{\mathrm{A}} = \underbrace{\frac{1}{2}a_{\mathrm{A}}{t_0}^2}_{\text{ニ}}, \\ \varDelta x_{\mathrm{B}} = \underbrace{\frac{1}{2}a_{\mathrm{B}}{t_0}^2}_{\text{ホ}}, \\ \varDelta x_{\mathrm{C}} = \underbrace{\frac{1}{2}a_{\mathrm{C}}{t_0}^2}_{\text{ヘ}}, \end{cases}$$

と表される．ここで，ロープの長さが一定なことから，

$$\varDelta x_{\mathrm{A}} + 2\varDelta x_{\mathrm{B}} + \varDelta x_{\mathrm{C}} = 0$$

の関係を満たすので，$\boxed{\text{ニ}}$ ～ $\boxed{\text{ヘ}}$ より，

$$\underbrace{a_{\mathrm{A}} + 2a_{\mathrm{B}} + a_{\mathrm{C}} = 0}_{\text{ト}}.$$

よって，運動方程式，および束縛条件より，

$$a_{\mathrm{A}} = \underbrace{\frac{5M-8m}{3M+8m}g}_{\text{チ}}, \quad a_{\mathrm{B}} = \underbrace{-\frac{3M-8m}{3M+8m}g}_{\text{リ}}, \quad a_{\mathrm{C}} = \underbrace{\frac{M-8m}{3M+8m}g}_{\text{ヌ}}.$$

(2)　$a_{\mathrm{B}} = 0$ を解いて，

$$-\frac{3M-8m}{3M+8m}g = 0, \qquad \therefore M = \underbrace{\frac{8}{3}m}_{\text{ヲ}}.$$

このとき，$a_{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{3}g$，$a_{\mathrm{C}} = -\dfrac{1}{3}g$ より，

$$\begin{cases} \varDelta x_{\mathrm{A}} = \underbrace{\frac{1}{6}g{t_1}^2}_{\text{ワ}}, \\ \varDelta x_{\mathrm{C}} = \underbrace{-\frac{1}{6}g{t_1}^2}_{\text{カ}}. \end{cases}$$

3 糸に関する束縛条件③

(1) 運動方程式より，

$$\begin{cases} \mathrm{A}: m\cdot 0 = T_1 - T_2 - R\,, \\ \mathrm{B}: m\cdot 0 = -T_2 + R\,, \\ \mathrm{C}: M\cdot 0 = 2T_1 - Mg\,, \end{cases} \qquad \therefore T_1 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}Mg}\,,\ \ T_2 = \frac{1}{2}T_1 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{4}Mg}\,,\ \ R = \frac{1}{4}Mg\,.$$

(2) 前問の解答に示した.

(3) 滑らない条件を考えて，

$$R < \frac{1}{2}mg\,, \qquad \therefore M < \underset{\sim\sim}{2m}\,(= M')\,.$$

(4) B の加速度を水平右向きに β，C の加速度を鉛直上向きに γ とする．運動方程式は，

$$\begin{cases} \mathrm{A}: m\alpha = T_1 - T_2 - \frac{1}{4}mg\,, \\ \mathrm{B}: m\beta = -T_2 + \frac{1}{4}mg\,, \\ \mathrm{C}: 2m\gamma = 2T_1 - 2mg\,, \end{cases}$$

滑車の位置をそれぞれ滑車の添え字に合わせて x_1，y_2，x_3 とする．このとき，糸の長さ一定より，

$$\begin{cases} \text{糸 }1: (x_1 - x_\mathrm{A}) + 2(y_1 - y_\mathrm{C}) = \mathrm{const}\,, \\ \text{糸 }2: (x_\mathrm{A} - x_3) + (x_\mathrm{B} - x_3) = \mathrm{const}\,, \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} \text{糸 }1: \alpha + 2\gamma = 0\,, \\ \text{糸 }2: \alpha + \beta = 0\,. \end{cases}$$

よって，運動方程式，および束縛条件より，

$$T_1 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{9}{10}mg}\,,\ \ T_2 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{9}{20}mg}\,,\ \ \alpha = \underset{\sim}{\frac{1}{5}g}\,.$$

(5) 前問の解答に示した.

(6) 前問の解答に示した.

4 面に関する束縛条件①

I (1)　張力の大きさを T とする．つりあいより，

$$\begin{cases} 0 = T - mg\sin\theta\,, \\ 0 = T - m'g\,, \end{cases} \qquad \therefore m' = \underset{\sim\sim\sim}{m\sin\theta}\,.$$

(2)　力学的エネルギー保存則より[*2][*3]，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 + 0 = \frac{1}{2}m\cdot 0^2 + mgh\,, \qquad \therefore v_0 = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{2gh}}\,.$$

(3)　物体のエネルギー収支より[*4]，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = \mu mg\cdot \ell\cos(180^\circ)\,, \qquad \therefore \mu = \underset{\sim}{\frac{h}{\ell}}\,.$$

II (4)　運動方程式は，

$$\begin{cases} \underset{\sim\sim\sim}{ma_x = N\sin\theta}\,, \\ \underset{\sim\sim\sim}{ma_y = -N\cos\theta + mg}\,, \\ \underset{\sim\sim\sim}{Mb = -N\sin\theta}\,, \end{cases}$$

(5)　台の Q 点の位置を $(X, 0)$，A の位置を (x, y) とする．A が台上をすべり，台の面が変形しないことから，

$$-(0 - y) = -(X - x)\tan\theta$$

の関係を満たす．両辺の時刻 t での微分を考えて，

$$\underset{\sim\sim\sim}{a_y = (a_x - b)\tan\theta}\,.$$

ここに，運動方程式から a_x，a_y，b を消去して，

$$g - \frac{N}{m}\cos\theta = \left\{\frac{N}{m}\sin\theta - \left(-\frac{N}{M}\sin\theta\right)\right\}\tan\theta\,, \qquad \therefore N = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{Mm\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g}\,.$$

[*2] 運動方程式から斜面下向きに大きさ $g\sin\theta$ の加速度を持つとして，$\dfrac{h}{\sin\theta}$ だけ滑る時間を計算して速さを求めても良い（斜面に沿った座標軸でなく，鉛直方向の座標軸などで考えてもよい）．

[*3] 重力が物体にした仕事を計算して（mgh となる），物体のエネルギー収支を考えても良い．

[*4] 運動方程式から加速度を求め，等加速度運動の公式を利用して解くこと（時間追跡の手法）も可能．

(6)　物体 A の加速度は (5) より $a_y = \dfrac{(M+m)\sin^2\theta}{M+m\sin^2\theta}g$ であり，$t=0$ において $y(0)=0$ として，$v_y(0)=0$ より，

$$\frac{1}{2}a_y{t_1}^2 = h\,, \qquad \therefore t_1 = \sqrt{\frac{2h}{a_y}} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{M+m\sin^2\theta}{(M+m)\sin^2\theta}\frac{2h}{g}}}(>0)\,.$$

(7)　台の加速度は (5) より $b = -\dfrac{m\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}g$ であり，$t=0$ において $X(0)=0$ として，$V_x(0)=0$ より，

$$V_1 = |bt_1| = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{m^2\cos^2\theta}{(M+m)(M+m\sin^2\theta)}2gh}}\,.$$

5 面に関する束縛条件②

(1)　B のつりあいより，

$$0 = N\sin\theta - F_0\,, \qquad \therefore N = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{F_0}{\sin\theta}}\,.$$

(2)　A のつりあいより，

$$0 = N_{\rm A} + N\cos\theta - mg\,, \qquad \therefore N_{\rm A} = mg - \frac{F_0}{\tan\theta}\,.$$

(3)　運動方程式はそれぞれ，

$$\begin{cases} ma_{\rm A} = N\cos\theta - mg\,, \\ ma_{\rm B} = N\sin\theta\,. \end{cases}$$

(4)　束縛条件は，それぞれの鋭角の頂点の位置を $(x_{\rm A}, y_{\rm A})$，$(x_{\rm B}, y_{\rm B})$ として，

$$\frac{y_{\rm A} - y_{\rm B}}{x_{\rm A} - x_{\rm B}} = \tan\theta\,, \qquad \therefore y_{\rm A} - y_{\rm B} = (x_{\rm A} - x_{\rm B})\tan\theta\,.$$

両辺の時間変化を考えて[*5]，

$$a_{\rm A} = -a_{\rm B}\tan\theta\,.$$

(5)　運動方程式，および束縛条件より，

$$a_{\rm A} = -g\sin^2\theta\,, \quad a_{\rm B} = g\sin\theta\cos\theta\,, \quad N = mg\cos\theta\,.$$

また，A の x 方向の運動方程式（つりあい）より，

$$0 = R - N\sin\theta\,, \qquad \therefore R = mg\sin\theta\cos\theta\,.$$

(6)　加速度一定より，

$$\begin{cases} y_{\rm A} = h - \dfrac{1}{2}g\sin^2\theta t^2\,, \\ v_{\rm A} = -g\sin^2\theta t\,, \end{cases} \qquad \therefore v_{\rm A} = -\sqrt{2gh}\sin\theta\,.$$

このとき，物体 B の速さは束縛条件より，

$$v_{\rm B} = -\frac{v_{\rm A}}{\tan\theta} = \sqrt{2gh}\cos\theta\,.$$

[*5] $\tan\theta$，$x_{\rm A}$，および $y_{\rm B}$ は定数.

6 糸と面の両方に関する束縛条件

(1) 以下では，物体 A の水平方向の加速度を a，および B の水平方向の加速度を b_x，鉛直方向の加速度を b_y，張力の大きさを T とする．物体 A，B の加速度の関係は $b=-a$ であり[*6]，運動方程式はそれぞれ，

$$\begin{cases} 3Ma=T\,, \\ 2M(-a)=T-2Mg\,, \end{cases} \qquad a=\frac{2}{5}g\,,\quad T=\frac{6}{5}Mg\,.$$

(2) BC 間の垂直抗力の大きさを N とする．B，および C の水平方向のつりあいより，

$$\begin{cases} 0=N\,, \\ 0=F-T-N\,, \end{cases} \qquad \therefore F=\frac{6}{5}Mg\,,\quad N=0\,.$$

(3) C の鉛直方向のつりあいより[*7]，

$$0=N_\mathrm{C}-T-10Mg-3Mg\,, \qquad \therefore N_\mathrm{C}=\frac{71}{5}Mg\,.$$

(4) 運動方程式は[*8]，

$$\begin{cases} \mathrm{A}:3Ma=T\,, \\ \mathrm{B}:2Mb_y=T-2Mg\,, \\ \mathrm{B}:2M\cdot\dfrac{1}{10}g=N\,, \\ \mathrm{C}:10M\cdot\dfrac{1}{10}g=F-T-N\,. \end{cases}$$

また，糸の長さが一定なことから，C の水平方向の加速度を $c=\dfrac{1}{10}g$ とすると，

$$(x_\mathrm{C}-x_\mathrm{A})+(y_\mathrm{C}-y_\mathrm{B})=\mathrm{const}\,, \qquad \therefore a+b_y=c=\frac{1}{10}g\,.$$

よって，運動方程式，および束縛条件より，

$$a=\frac{11}{25}g\,,\quad |b_y|=\frac{17}{50}g\,,\quad F=\frac{63}{25}Mg\,,\quad T=\frac{33}{25}Mg\,,\quad N=\frac{1}{5}Mg\,.$$

(5) 前問の解答に示した．

[*6] 束縛条件より，滑車の位置を $(x_\mathrm{C},y_\mathrm{C})$ とすると，C が静止している状況では，

$$(x_\mathrm{C}-x_\mathrm{A})+(y_\mathrm{C}-y_\mathrm{B})=\mathrm{const}\,, \qquad \therefore a+b_y=0\,.$$

[*7] C は上面において，A から垂直抗力を受ける．その大きさは，A の鉛直方向のつりあいから $3Mg$ と求まる．

[*8] 面が変形しないことから，

$$x_\mathrm{C}=x_\mathrm{B}+\mathrm{const}\,, \qquad \therefore c=b_x=\frac{1}{10}g\,.$$