物理補講（第 2 回）

目次

問題 3
略解・ヒント 17
解答 23

問題編

1　質量 M，底面積 S，高さ L の密度が一様な剛体の直方体がある．ばねの力，浮力および重力による，この直方体の運動について以下の問いに答えよ．鉛直方向下向きに z 軸をとり，直方体は z 軸に沿って運動するものとする．重力加速度の大きさを g，水の密度を ρ_0，円周率を π とする．空気の抵抗，空気中での浮力，水の抵抗，水の運動を考慮する必要はない．

問 1　図 1 のように，天井からばね定数 k の軽いばねをつるし，直方体上端面の中心の点 P にばねを取り付ける．ばねの長さが自然の長さから，直方体を手で支えながらゆっくりと下げていくと，ある位置でつり合いの状態になり，手から離れて静止した．つり合いの状態での点 P の位置を $z = 0$ とする．

(1)　ばねの自然の長さでの点 P の位置 $-z_0\,(z_0 > 0)$ を求めよ．

(2)　直方体の位置をばねの自然の長さまで戻し静かに手を放した．手を放した後の直方体の運動方程式を点 P の位置 z を用いて示せ．直方体の鉛直方向下向きの加速度を a とする．

(3)　手を放した後，直方体は単振動を行った．点 P がつり合いの位置 $z = 0$ に達したときの直方体の速さを，M，k，z_0 を用いて表せ．

(4)　直方体の単振動の周期 T を z_0 を用いずに示せ．

(5)　時刻 t での直方体の点 P の位置 z を z_0，T，t を用いて示せ．手を放した時刻を $t = 0$ とする．

問 2　図 2 のように，直方体を水面に静かに浮かべたところ，直方体上端面の中心の点 P が水面から $\dfrac{1}{4}L$ の位置（直方体の水面下の長さ $\dfrac{3}{4}L$）で静止した．大気圧および直方体を浮かべたことによる水位の変化を考慮する必要はない．

(1)　z 軸方向について，直方体が静止しているときの直方体に働く力のつり合いの式を示せ．

(2)　(1) の静止位置から直方体を手でゆっくりと押し下げる．(1) での点 P の位置を $z = 0$ として，点 P の位置が $z\,(\leq L/4)$ のときの直方体から手に働く力の大きさを z を用いて示せ．

(3)　(1) の状態から点 P が水面の位置にくるまで直方体を手で押し下げ，その後静かに手を放すと直方体は単振動を行った．単振動を行っているときの直方体の運動方程式を点 P の位置 z を用いて示せ．直方体の鉛直方向下向きの加速度を a とする．

(4)　単振動を行っているときの復元力はフックの法則にしたがう力（ばねによる力）と同じと見なせる．この運動におけるばね定数に相当する量を示せ．

(5)　つり合いの位置から直方体上端の点 P が水面の位置にくるまで直方体を手でゆっくりと押し下げる間，手が直方体にした仕事を求めよ．

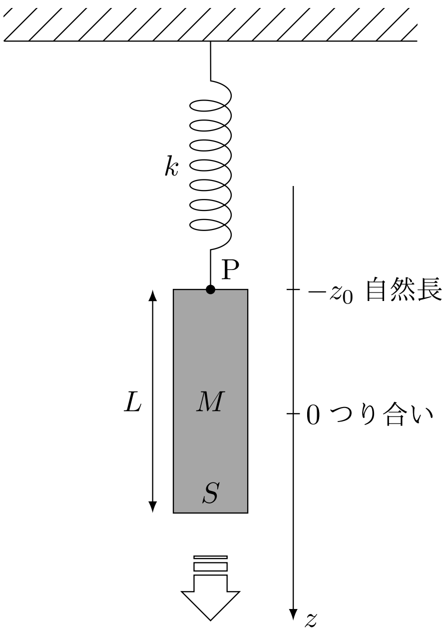


図 1

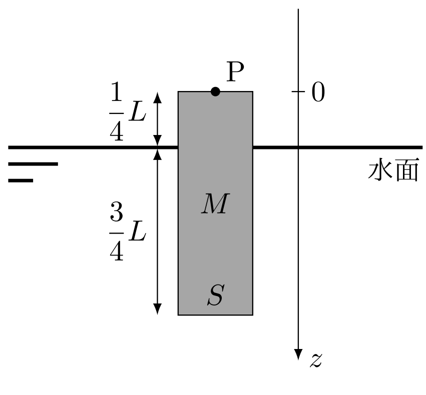


図 2

問 3　図 3 のように，問 1 と同じばねを天井からつるし，直方体上端面の中心の点 P に取り付けてから，直方体をゆっくりと水面に浮かべたところ，点 P が水面から $\dfrac{1}{3}L$ の位置（直方体の水面下の長さ $\dfrac{2}{3}L$）で静止した．以下の問いには直方体の質量 M を含めて答えよ．

(1)　静止しているときのばねの自然の長さからの伸びを求めよ．

(2)　直方体上端の点 P が水面の位置にくるまで手で押し下げてから，静かに手を放すと直方体は単振動を行った．直方体の単振動の周期を求めよ．

(3)　単振動している直方体の速さの最大値を求めよ．

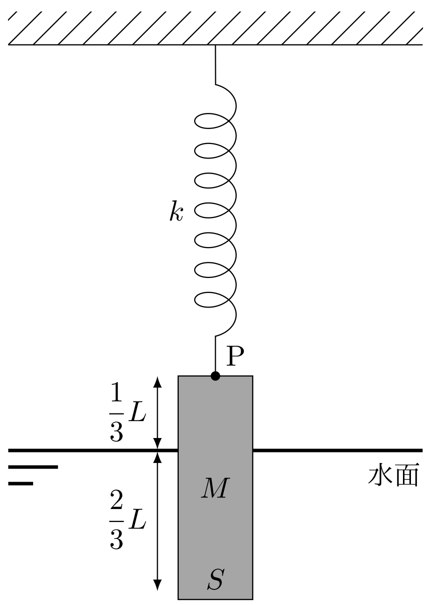


図 3

《メモ》

2022 年静岡大より．

2 次の文章を読み，問 1 から問 3 の $\boxed{}$ の中に適切な数式を入れよ．ただし，問 4 は解答用紙のグラフに答えよ．

図 1 に示すように，水平な床面上に質量 m の物体 A をおき，つるまきばねを取り付ける．ばねが床面と水平になるように，ばねの他端を壁に固定する．物体 A は図の x 軸上を運動し，その位置を座標 x で表す．ばねが自然長のとき物体 A の位置を原点 $x=0$ にとり，ばね定数を k とする．物体 A と床面との間の動摩擦係数を μ とする．ただし，重力加速度の大きさは g とし，ばねの質量は無視できるものとする．

物体 A を P 点 $(x=5\ell)$ まで引っ張り，時刻 $t=0$ で静かに手を放した．このとき，物体 A は x 軸負の向きに動きはじめ，Q 点 $(x=-3\ell)$ で運動の向きを反転し，再び x 軸の正の向きに運動した．その後，物体 A は時刻 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ で R 点 $(x=\ell)$ に停止した．なお，以下の問では ℓ を用いて答えてもよい．

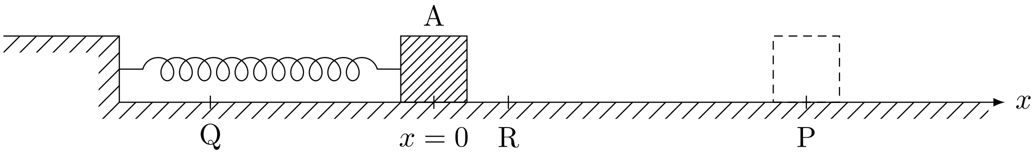
問 1　物体 A が P から Q まで移動するとき，ばねに蓄えられた位置エネルギー（弾性エネルギー）の変化は $\boxed{(1)}$ と表される．また，この間に動摩擦力がした仕事は $\boxed{(2)}$ である．両者は相等しいので，動摩擦係数 μ は $\boxed{(3)}$ と求められる．

問 2　時刻 $t=0$ で手を離れた物体 A はしだいに速さを増し，最大の速さになったのち，徐々に減速して Q 点で 0 となった．この間，物体 A が受ける力は右向きを正として $\boxed{(4)}$ と表される．したがって，物体 A の運動は $x=\boxed{(5)}$ を中心とする単振動の動きに等しいことがわかる．よって，この中心で物体 A の速さは最大となり，その値は $\boxed{(6)}$ となる．また，物体 A が Q 点で反転する時刻は $\boxed{(7)}$ である．

問 3　つぎに物体 A が Q から R まで移動するとき，物体 A に作用する力は右向きを正として $\boxed{(8)}$ と表され，この区間の振動の中心は $x=\boxed{(9)}$ である．

問 4　物体 A の座標 x と時刻 t との関係をグラフに示せ．

問 5　このような運動が実現するために，物体 A と床面との間の静止摩擦係数 μ_0 が満たすべき条件を求めよ．



《メモ》

2003 年北海道大より．問題文中の単位を削除し，問 5 を加えた．

3　台の上に鉛直に立てられたばね定数 k の軽いばねに，厚さの無視できる質量 $2m$ の板が固定されている．図 1 のように，この板の上に，質量 m の小球を静かに置いたところ，ばねの自然長より d だけ縮んで静止した．この板の位置をつりあいの位置 $(x = 0)$ とし，鉛直上向きを x 軸の正の向きとする．ここから，図 2 のように，$\alpha d\,(\alpha > 0)$ だけ板を押し下げ，静かに放したところ，板と小球は鉛直方向に動き出した．ここで，小球の大きさおよび空気抵抗は無視でき，ばね，板および小球の運動は鉛直方向のみで起きるものとする．重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えなさい．

(1)　図 1 から，ばね定数は m，d，g を用いて $\boxed{\text{(ア)}}$ と表すことができる．

(2)　図 2 のように，板を αd だけ押し下げて手を放すと，小球は板の載ったままばねの復元力により鉛直方向の上昇した．このとき，一体となって運動している板と小球の位置座標 x での加速度は $\boxed{\text{(イ)}}$，小球が板から受ける垂直抗力の大きさ N は $N = \boxed{\text{(ウ)}}$ である．

このあと，ある位置で小球は板から離れて上昇した．小球が板から離れて上昇するための α の条件は $\boxed{\text{(エ)}}$ であり，板から離れる瞬間の位置座標 x_1 は $x_1 = \boxed{\text{(オ)}} \times d$ である．これより，垂直抗力の大きさ N と位置座標 x の関係を図示すると $\boxed{\text{(カ)}}$ であり，最初に板を押し下げた位置 $-\alpha d$ から x_1 までの間で垂直抗力のする仕事は α，m，d，g などを用いて表すと $\boxed{\text{(キ)}}$ となる．また，板から離れる瞬間の小球の速さは α，d，g などを用いて表すと $\boxed{\text{(ク)}}$，板から離れた後の小球の最高到達点の位置座標は α，d などを用いて表すと $\boxed{\text{(ケ)}} \times d$ となる．

(3)　(2) で小球が板から離れた後，小球が最高到達点から落下して，板との 1 回目の弾性衝突が起きるまでの間，板は単振動をした．このとき，板の単振動の中心の位置座標は $\boxed{\text{(コ)}} \times d$，周期は d，g などを用いて表すと $\boxed{\text{(サ)}}$，振幅は α，d などを用いて表すと $\boxed{\text{(シ)}} \times d$ である．

(4)　小球が板から離れた位置から板がちょうど 1 周期だけ単振動したときに，上昇してきた板と下降してきた小球は，板から離れる瞬間の位置 x_1 で初めて衝突した．この結果から，α の値は $\boxed{\text{(ス)}}$ である．

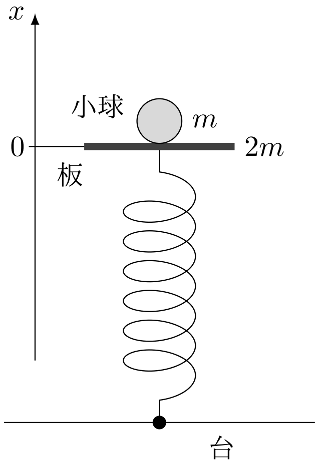


図 1

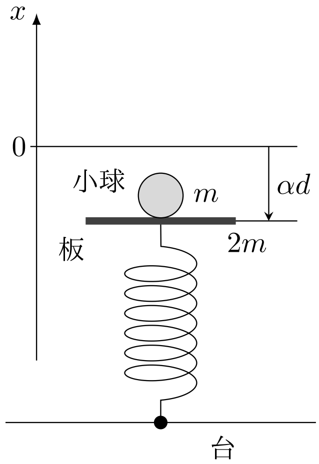


図 2

《メモ》……………………………………………………………………………………………

2022 年東京理科大理学部より．問題文中の単位，および選択肢を削除した．

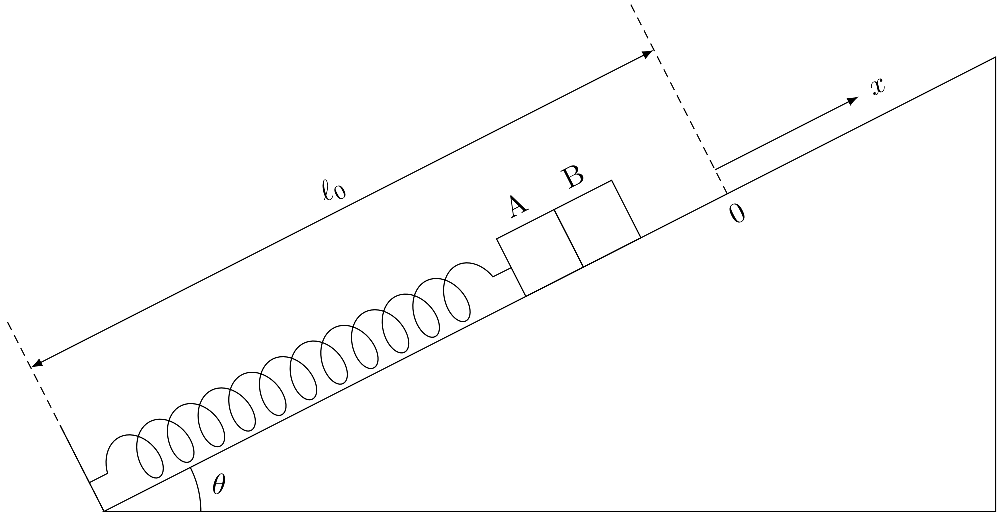
4　自然の長さ ℓ_0，ばね定数 k の質量の無視できるばねの一端に質量 m の小物体 A を固定する．このばねの他端を図のように固定し，小物体が傾き θ の摩擦の無視できる十分長い斜面上を滑らかに運動できるようにする．斜面上での静止時のばねの長さは ℓ になったとする．小物体 A を手で支えてばねの長さを ℓ に保ったまま，同じ質量の小物体 B を小物体 A の上に図のようにのせる．次に，小物体 B に適当な力を加えて，小物体 A，B が互いに接したまま大きさ v_0 の初速度で斜面に沿って下向きに運動するようにする．座標原点をばねの自然長の位置に取り，x 軸を図のように斜面に沿って上向きに取る．重力加速度の大きさを g とし，小物体の大きさは無視できるとして，次の問に答えよ．なお，解答には ℓ，ℓ_0 を用いてはならない．

(a)　v_0 が十分小さければ，小物体 A，B は一体となって単振動をする．小物体 A，B が最下点に来たときの小物体の位置 x_0 を求めよ．

(b)　速度 v_0 がある値 v_1 より大きくなると小物体 B が小物体 A から離れて運動するようになる．v_1 を求めよ．また，離れる位置 x_1 も求めよ．

(c)　$v_0 > v_1$ の場合，x_1 で分離後しばらく小物体 A，B はそれぞれ独立に斜面上を運動する．分離してから小物体 A が初めて x_1 に戻ってくるまでの間に小物体 A は小物体 B と衝突することはない．その理由を述べよ．

(d)　分離した小物体 A，B が x_1 で初めて衝突したとする．このようなことが分離後最短時間で実現できるのは v_0 がどのような値のときか．



《メモ》

2000 年東京工業大より．文字が過剰だったので，ℓ，ℓ_0 を使わないよう指示を与えた．$\ell_0 - \ell = \dfrac{mg}{k}\sin\theta$ によって，ℓ，ℓ_0 を用いて解答することも可能．

❦ver.2023

5 以下の文章中の $\boxed{（ア）}$ ～ $\boxed{（サ）}$ に適切な式を記入しなさい．円周率が必要な場合は π を用いなさい．

質量 M の小物体 A と質量 $2M$ の小物体 B が水平な床の上に置かれている．小物体 A は，ばね定数 K の軽いばねで床に垂直に立てられた壁につながれ，床の上を x 軸方向に運動する．最初，小物体 A と小物体 B は隣接して静止している．各小物体の運動は壁から離れる向きを正とし，小物体 A の x 座標を X で表す．

（1）　床がなめらかで，2 つの小物体との間に摩擦力がはたらかない場合を考える．壁の位置を固定し，ばねが自然長のときに $X = 0$ となるように x 座標の原点 O を定める．図 1 のように，小物体 B に手で力を加え，ばねを自然長から長さ L だけ縮める．時刻 $t = 0$ で静かに離したところ，2 つの小物体は一緒に運動を始め，時刻 $t = T_1$ で互いに離れた．$0 < t < T_1$ のとき，2 つの小物体の加速度を a，小物体 A が B を押す力を f とすると，小物体 A の運動方程式は $Ma =$ $\boxed{（ア）}$，小物体 B の運動方程式は $2Ma =$ $\boxed{（イ）}$ である．この 2 つの式を a および f について解く．f は X と K を用いて $f =$ $\boxed{（ウ）}$ と表されるので，2 つの小物体は $X = 0$ で離れることがわかる．一方，a の式から，$0 < t < T_1$ で 2 つの小物体の運動は単振動の式に従うことがわかるので，$T_1 =$ $\boxed{（エ）}$ となる．$t \geq T_1$ での小物体 B の運動エネルギーは $\boxed{（オ）}$ である．

（2）　2 つの小物体と床の間に摩擦力がはたらく場合を考える．静止摩擦係数を μ，動摩擦係数を $\dfrac{1}{3}\mu$，重力加速度の大きさを g とする．図 2 のように，壁の位置をゆっくりと右に動かすと，ばねが自然長から長さ $\boxed{（カ）}$ だけ縮んだ瞬間に 2 つの小物体は運動を始める．その時刻を $t = 0$ として，それ以降壁の位置を固定し，ばねが自然長のときに $X = 0$ となるように x 座標の原点 O を定める．時刻 $t = 0$ で 2 つの小物体は一緒に運動を始め，時刻 $t = T_2$ で互いに離れた．$0 < t < T_2$ のとき，小物体 A が B を押す力 f を X と K を用いて表すと $f =$ $\boxed{（キ）}$ となる．時刻 $t = 0$ から時刻 $t = T_2$ までの間に摩擦力が 2 つの小物体にする仕事を考慮すると，時刻 $t = T_2$ での小物体 B の運動エネルギーは $\boxed{（ク）}$ となる．$0 < t < T_2$ で，2 つの小物体は中心が $\boxed{（ケ）}$，振幅が $\boxed{（コ）}$ の単振動の式に従って運動する．また，$T_2 =$ $\boxed{（サ）}$ である．

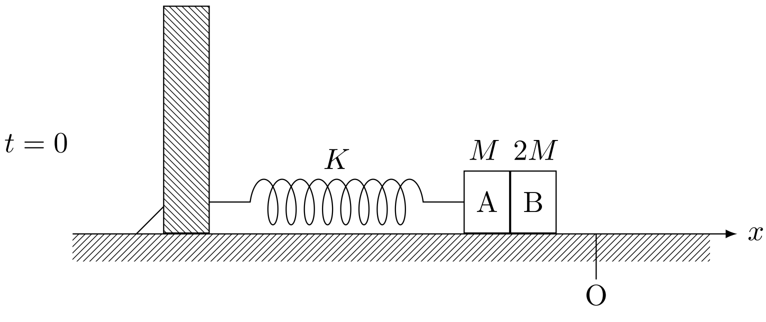


図 1

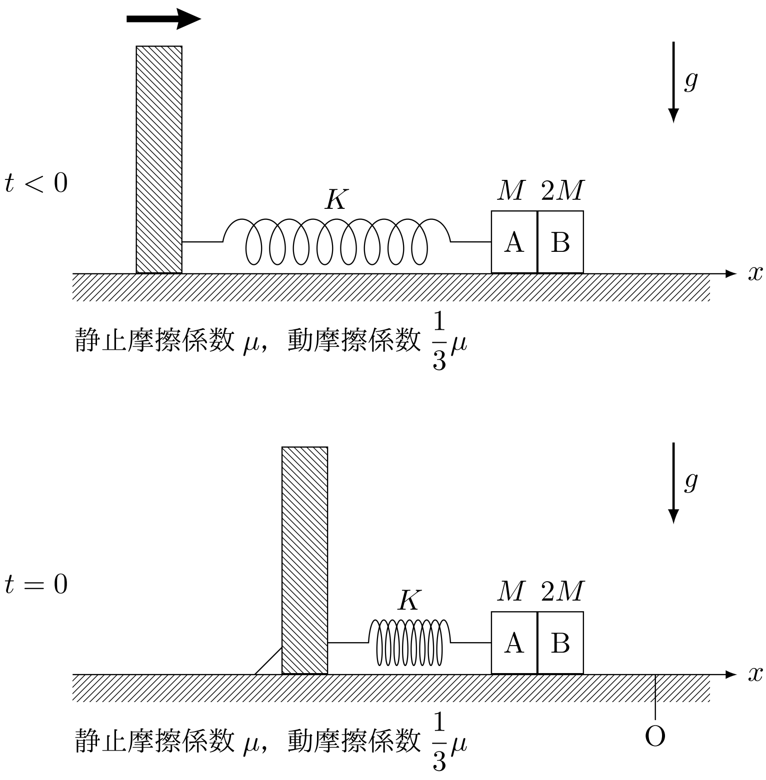


図 2

《メモ》

2020 年慶應理工より．

略解・ヒント

■略解

1

問 1 (1) $-\dfrac{Mg}{k}$　(2) $Ma=-kz$　(3) $z_0\sqrt{\dfrac{k}{M}}$

(4) $2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}$　(5) $-z_0\cos\left(2\pi\dfrac{t}{T}\right)$

問 2 (1) $0=Mg-\dfrac{3}{4}\rho_0 SLg$　(2) $\rho_0 Sgz$

(3) $Ma=-\rho_0 Sgz$　(4) $\rho_0 Sg$

(5) $\dfrac{1}{32}\rho_0 SgL^2$

問 3 (1) $\dfrac{1}{9}\dfrac{Mg}{k}$　(2) $2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k+\rho_0 Sg}}$

(3) $\dfrac{L}{3}\sqrt{\dfrac{k+\rho_0 Sg}{M}}=\dfrac{4}{9}\sqrt{\dfrac{Mg}{\rho_0 S}\left(1+\dfrac{k}{\rho_0 Sg}\right)}$

2

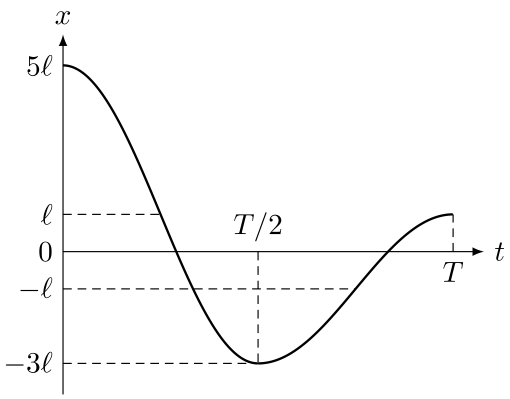
問 1 (1) $-8k\ell^2$　(2) $-8\mu mg\ell$　(3) $\dfrac{k\ell}{mg}$

問 2 (4) $-kx+k\ell$　(5) ℓ　(6) $4\ell\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

(7) $\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

問 3 (8) $-kx-k\ell$　(9) $-\ell$

問 4



問 5 $\dfrac{k\ell}{mg}<\mu_0\leq\dfrac{3k\ell}{mg}$

3

(1) ア：$\dfrac{3mg}{d}$

(2) イ：$-\dfrac{g}{d}x$　ウ：$-mg\left(\dfrac{x}{d}-1\right)$　エ：$\alpha>1$

オ：1　カ：略　キ：$\dfrac{(\alpha+1)^2}{2}mgd$

ク：$\sqrt{(\alpha^2-1)gd}$　ケ：$\dfrac{\alpha^2+1}{2}$

(3) コ：$\dfrac{1}{3}d$　サ：$2\pi\sqrt{\dfrac{2d}{3g}}$

シ：$\dfrac{1}{3}\sqrt{2(3\alpha^2-1)}$　ス：$\sqrt{\dfrac{2}{3}\pi^2+1}$

4

(a) $-\dfrac{mg}{k}\left\{2+\sqrt{1+\dfrac{2k}{m}\left(\dfrac{v_0}{g\sin\theta}\right)^2}\right\}$

(b) $v_1=g\sin\theta\sqrt{\dfrac{3}{2}\dfrac{m}{k}}$，　$x_1=0$

(c) A には，重力の斜面平行成分に加えて x 負方向の弾性力がはたらくため．

(d) $g\sin\theta\sqrt{\dfrac{m}{k}\left(\pi^2+\dfrac{3}{2}\right)}$

5

(1) ア：$-KX-f$　イ：f　ウ：$-\dfrac{2}{3}KX$

エ：$\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{3M}{K}}$　オ：$\dfrac{1}{3}KL^2$

(2) カ：$\dfrac{3\mu Mg}{K}$　キ：$-\dfrac{2}{3}KX$　ク：$\dfrac{(\mu Mg)^2}{K}$

ケ：$-\dfrac{\mu Mg}{K}$　コ：$\dfrac{2\mu Mg}{K}$　サ：$\dfrac{2}{3}\pi\sqrt{\dfrac{3M}{K}}$

■ヒント

1

問 1 (2)　点 P が位置 z にあるときのばねの伸びは z でないことに注意.

(3)　時刻 t が問われていないので物体のエネルギー収支を考えるのが楽（以降のヒントにおいて，エネルギー収支を考えるものは力学的エネルギー保存則でも良い）. 時間追跡でも可能.

問 2 (2)　点 P が位置 z にあるときの物体の沈みは z でないことに注意.

(5)　定義通りに計算する.

問 3 (3)　時刻 t が問われていないので物体のエネルギー収支を考えるのが楽. 時間追跡でも可能.

2

(2)　定義通り計算をする.

(6)　時刻 t が問われていないので物体のエネルギー収支を考えるのが楽. 時間追跡でも可能.

(8)　弾性力の項の符号，摩擦の向きに注意.

問 5　各折り返し点での滑る条件・滑らない条件を考える.

3

（イ）　ばねの伸びに注意して運動方程式を立式する.

（エ）　2 物体が離れていないときは $N > 0$ であり，ここからまず（オ）を求め，この条件下で運動エネルギーの存在条件を考えればよい.

（シ）　時間追跡でもエネルギー収支でも手間はあまり変わらない. 時間追跡で考える場合，三角関数の合成を要する.

4

(a)　始状態から折り返し点の間の 2 物体からなる系のエネルギー収支，もしくは 2 物体と重力場，ばねの 4 つからなる系の力学的エネルギー保存則を考える. 仕事を計算する際，始状態の位置に注意. なお，時間追跡でもできるが，時刻 t が問われていないのでエネルギーに注目するのが良い.

(b)　個々の運動方程式から物体間にはたらく垂直抗力 N を x の関数として表すことで x_1 が求まる. その後，始状態から x_1 の間の 2 物体からなる系のエネルギー収支を考え，x_1 で速さが存在する条件を考える.

(c)　両者にはたらく力を比較する．

(d)　B が戻ってくるまでの間に A がちょうど 1 周期の運動を行う状況を考える．

5

（エ）　$X = 0$ が振動中心ゆえ，始状態から $X = 0$ を通過するまでの時間は $\dfrac{1}{4}$ 周期に等しい（時間追跡しても良い）．

（カ）　滑る瞬間の静止摩擦力は，最大摩擦（静止摩擦力の上限値）に等しい．

（コ）　運動の様子を考えれば，振幅は，振動中心と始状態の位置の差に等しいことがわかる．

（サ）　時刻 t を求めるため，時間追跡 1 択．

解答編

1 ばね（鉛直），浮力

問 1 (1)　ついあいより，

$$0 = kz_0 - Mg\,, \qquad \therefore -z_0 = \underset{\sim\sim\sim}{-\frac{Mg}{k}}\,.$$

(2)　点 P が位置 z にあるとき，ばねの伸びは $z + z_0$ であることに注意して[*1]，

$$\underline{Ma = -kz}\,.$$

(3)　物体のエネルギー収支を考えて，

$$\frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}M\cdot 0^2 = \int_{-z_0}^{0}(-kz)\,dz = \frac{1}{2}k\left(-\frac{Mg}{k}\right)^2\,, \qquad \therefore v = \underline{g\sqrt{\frac{M}{k}}}\,.$$

(4)　運動方程式より角振動数は $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$ である．よって，公式より，

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \underline{2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}}\,.$$

(5)　運動方程式より振動中心は $z = 0$ である．初期条件 $z = -z_0$，$v = 0$ より，

$$\begin{cases} z = 0 + C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\,, \\ v = C\omega\cos(\omega t) - D\omega\sin(\omega t)\,. \end{cases} \qquad \therefore C = 0\,,\quad D = -\frac{Mg}{k}\,,$$

$$\therefore z = \underline{-\frac{Mg}{k}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}\,.$$

問 2 (1)　つりあいより，

$$\underline{0 = -\frac{3}{4}\rho_0 SLg + Mg}\,.$$

(2)　つりあいより，

$$0 = F - \rho_0 Sg\left(z + \frac{3}{4}L\right) + Mg\,, \qquad \therefore F = \underline{\rho_0 Sgz}\,.$$

(3)　運動方程式は，

$$\underline{Ma = -\rho_0 Sgz}\,.$$

(4)　運動方程式より，

$$k = \underline{\rho_0 Sg}\,.$$

[*1] 右辺は $-k(z + z_0) + Mg = -kz$.

(5)　(2)，および仕事の定義より，

$$W = \int_0^{\frac{1}{4}L} \rho_0 Sgz\,dz = \frac{1}{32}\rho_0 SgL^2\,.$$

問 3 (1)　つりあいより[*2]，

$$0 = -kd - \frac{3}{4}\rho_0 SLg + Mg\,, \qquad \therefore d = \frac{1}{9}\frac{Mg}{k}\,.$$

(2)　運動方程式より[*3]，

$$\begin{aligned} Ma &= -k\left(z + \frac{2}{3}L\right) - \rho_0 Sg\left(z + \frac{2}{3}L\right) + Mg \\ &= -(k + \rho_0 Sg)z\,. \end{aligned}$$

よって，角振動数は $\sqrt{\dfrac{k+\rho_0 Sg}{M}}$ ゆえ，公式より，

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k+\rho_0 Sg}}\,.$$

(3)　物体のエネルギー収支を考えて，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}M\cdot 0^2 &= \int_{\frac{1}{3}L}^{z} \{-(k+\rho_0 Sg)z\}\,dz \\ \therefore \frac{1}{2}Mv^2 &= -\frac{1}{2}(k+\rho_0 Sg)z^2 + \frac{1}{18}(k+\rho_0 Sg)L^2\,. \end{aligned}$$

したがって，$z = 0$ のとき v は最大値をとり[*4*5]，

$$v = \frac{L}{3}\sqrt{\frac{k+\rho_0 Sg}{M}} = \frac{4}{9}\sqrt{\frac{Mg}{\rho_0 S}\left(1 + \frac{k}{\rho_0 Sg}\right)}\,.$$

【補足 1】問 1(3) の別解①ー見る系を拡げる

物体，重力場，ばねからなる系の力学的エネルギー保存則より[*6]，

$$\frac{1}{2}Mv^2 + Mg\cdot 0 + \frac{1}{2}k\left(\frac{Mg}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}M\cdot 0^2 + Mg\frac{Mg}{k} + \frac{1}{2}k\cdot 0^2\,, \qquad \therefore v = g\sqrt{\frac{M}{k}}\,.$$

[*2] $\dfrac{3}{4}\rho_0 SLg = Mg$ を利用.

[*3] I，II に倣い，原点 $z = 0$ をつりあいの位置に定める.

[*4] 今すぐ覚える必要はないが，単振動する物体の速さの最大値 $v_{\max}$ は，$v_{\max} =$（振幅）×（角振動数）となる．勉強していくうちに常識にしたいもので，実際の試験ではこれを用いて解く.

[*5] 与えてある文字が過剰で，問 2(1) より $Mg = \dfrac{3}{4}\rho_0 SLg$ であり，L，ρ_0，S のどれかが消去可能である.

[*6] 重力の位置エネルギーの基準点を $z = 0$ に定めた.

【補足２】問 1(3) の別解②ー時間追跡

（5）の結果より，

$$\begin{cases} z = -\dfrac{Mg}{k}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{M}}\,t\right), \\ v = g\sqrt{\dfrac{M}{k}}\,\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{M}}\,t\right). \end{cases}$$

$z = 0$ を満たす t を求めて v へ代入すれば，

$$-\frac{Mg}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}\,t\right) = 0\,, \qquad \therefore t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{k}}\,,\ \ v = g\sqrt{\frac{M}{k}}\,.$$

【補足３】問 3(3) の別解①ー見る系を拡げる

物体，重力場，ばねからなる系の力学的エネルギー収支より[*7]，

$$\left\{\frac{1}{2}Mv^2 + Mg(-z) + \frac{1}{2}k\left(z + \frac{Mg}{9k}\right)^2\right\} - \left\{\frac{1}{2}M\cdot 0^2 + Mg\left(-\frac{1}{3}L\right) + \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{3}L + \frac{Mg}{9k}\right)^2\right\}$$
$$= \int_{\frac{1}{3}L}^{z}\left\{-\rho_0 Sg\left(z + \frac{2}{3}L\right)\right\}\,.$$

ここから v^2 を z の関数として表し（2 次関数となる），v^2 の最大値を検討しても良いが計算が煩雑なためこの解答は現実的ではない．

【補足４】問 3(3) の別解②ー時間追跡

運動方程式，および初期条件 $z = \dfrac{1}{3}L$，$v = 0$ より，

$$\begin{cases} z = \dfrac{L}{3}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k+\rho_0 Sg}{M}}\,t\right), \\ v = -\dfrac{L}{3}\sqrt{\dfrac{k+\rho_0 Sg}{M}}\,\sin\left(\sqrt{\dfrac{k+\rho_0 Sg}{M}}\,t\right). \end{cases}$$

よって，v の最大値は，

$$v = \frac{L}{3}\sqrt{\frac{k+\rho_0 Sg}{M}}\,.$$

[*7] 重力の位置エネルギーの基準点を $z = 0$ に定めた．

2 摩擦で振動中心が変わる

問 1　弾性エネルギーの変化量は，公式より，

$$\Delta U = \frac{1}{2}k(3\ell)^1 - \frac{1}{2}k(5\ell)^2 = \underset{(1)}{\underline{-8k\ell^2}}\,.$$

仕事の定義より[*8]，

$$W = \mu mg(-3\ell - 5\ell) = \underset{(2)}{\underline{-8\mu mg\ell}}\,.$$

以上より，物体，およびばねからなる系のエネルギー収支を計算して[*9]，

$$\Delta K + \Delta U = W\,, \qquad \therefore \mu = \underset{(3)}{\underline{\frac{k\ell}{mg}}}\,.$$

問 2　運動方程式は[*10]，

$$ma = \underset{(4)}{\underline{-kx + k\ell}}\,.$$

振動中心を $x = x_0$ とすると，運動方程式より，

$$ma = -k(x - \ell)\,, \qquad x_0 = \underset{(5)}{\underline{\ell}}\,.$$

速さは，物体のエネルギー収支を考えて，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = \int_{5\ell}^{\ell}(-kx + k\ell)\,dx = \left[-\frac{1}{2}kx^2 + k\ell\right]_{5\ell}^{\ell} = 8k\ell^2\,, \qquad \therefore v = \underset{(6)}{\underline{4\ell\sqrt{\frac{k}{m}}}}\,.$$

折り返しの時刻は，半周期ゆえ，

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \underline{\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}\,.$$

問 3　運動方程式は[*11]，

$$ma = \underline{-kx - k\ell}\,.$$

振動中心を $x = x_1$ とすると，運動方程式より，

$$ma = -k(x + \ell)\,, \qquad x_1 = \underline{-\ell}\,.$$

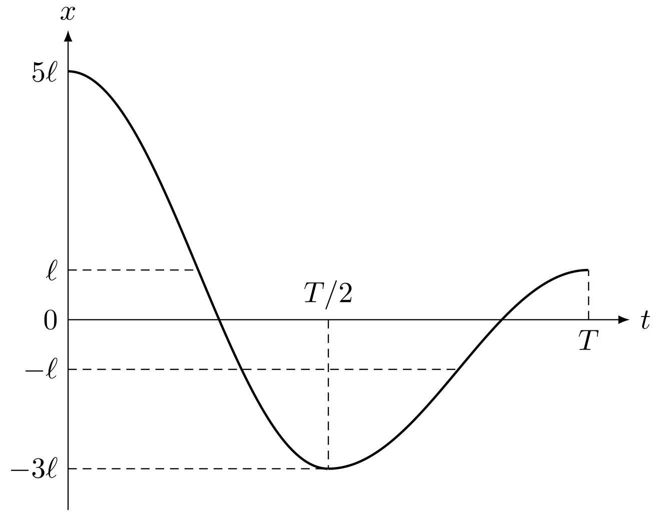
*8 解答は，$W = \vec{f}\cdot\Delta\vec{x}$ の成分表示で計算したが，$W = \left|\vec{f}\right| |\Delta\vec{x}| \cos(180°)$ としても良い．

*9 個人的には，【補足 1】のように解くのがキレイ．

*10 $\mu = \dfrac{k\ell}{mg}$ を用いた．

*11 弾性力は $+k|x| = +k(-x) = -kx$ である．

問 4　半周期で Q，そこから同じ半周期で R に達するので，それを図示すればよい．



問 5　P，Q では滑り，R では滑らないような条件を考えればよい．それぞれの地点で滑る・滑らない条件を考えて[*12]，

$$\begin{cases} \mathrm{P}: 5k\ell \geq \mu_0 mg\,, \\ \mathrm{Q}: 3k\ell \geq \mu_0 mg\,, \\ \mathrm{R}: k\ell < \mu_0 mg\,, \end{cases} \qquad \therefore\ \frac{k\ell}{mg} < \mu_0 \leq \frac{3k\ell}{mg}\,.$$

【補足】**(6) を時間追跡で解く**

運動方程式より，振動中心は $x = \ell$，角振動数は $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ である．したがって，C，D を定数として，

$$\begin{cases} x = \ell + C\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right) + D\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right), \\ v = C\sqrt{\dfrac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right) - D\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right). \end{cases}$$

$t = 0$ で，$x = 5\ell$，$v = 0$ より，$D = 4\ell$，$C = 0$ ゆえ，

$$\begin{cases} x = \ell + 4\ell\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right), \\ v = -4\ell\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right). \end{cases}$$

初めて $x = \ell$ を満たす時刻 t を求めて，

$$x = \ell + 4\ell\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) = 0\,, \qquad \therefore\ t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\,,\ \ \therefore\ |v| = \left|-4\ell\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = 4\ell\sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

[*12] 各不等号の等号は，あってもなくてもどちらでもよい．

3 分離

(1) つりあいより，

$$0 = kd - 3mg\,, \qquad \therefore k = \underbrace{\frac{3mg}{d}}_{\text{ア}}\,.$$

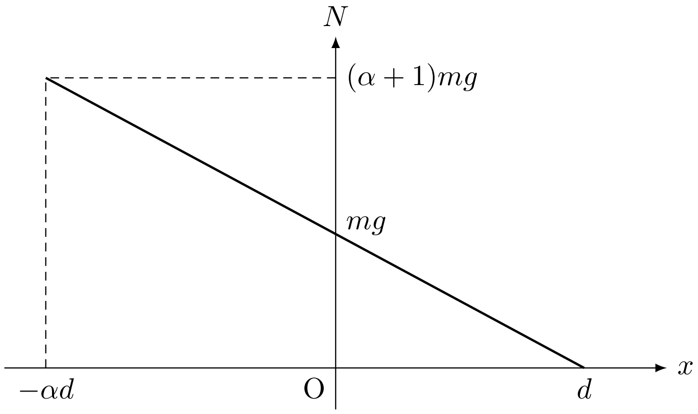
(2) 運動方程式より，

$$\begin{cases} ma = N - mg\,, \\ 2ma = -N - \dfrac{3mg}{d}(x-d) - 2mg\,, \end{cases} \qquad \therefore a = \underbrace{-\frac{g}{d}x}_{\text{イ}}\,,\quad N = \underbrace{-mg\left(\frac{x}{d}-1\right)}_{\text{ウ}}\,.$$

このとき，$N = 0$ を満たす x は，

$$-mg\left(\frac{x_1}{d}-1\right) = 0\,, \qquad \therefore x_1 = \underbrace{d}_{\text{オ}}\,.$$

であり，これをグラフに図示すれば以下の通りになる（カの解答）.



また，この間に垂直抗力がする仕事は[13]，

$$W = \int_{-\alpha d}^{d}\left\{-mg\left(\frac{x}{d}-1\right)\right\}dx = \left[\frac{1}{2}mgd\left(\frac{x}{d}-1\right)^2\right]_{-\alpha d}^{d} = \underbrace{\frac{(\alpha+1)^2}{2}mgd}_{\text{キ}}\,.$$

さて，2 物体が離れるためには 2 物体が $x > 0$ となればよく，このとき α の条件はエネルギー収支を考えて，

$$\frac{1}{2}\cdot 3mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = \int_{-\alpha d}^{d}\left(-\frac{3mg}{d}x\right)dx = \frac{1}{2}\frac{3mg}{d}\left\{(\alpha d)^2 - d^2\right\} > 0\,, \qquad \therefore \underbrace{\alpha > 1}_{\text{エ}}\,.$$

なお，このとき（$\alpha > 1$ のとき）の v を v_0 とすると，

$$v_0 = \underbrace{\sqrt{(\alpha^2-1)gd}}_{\text{ク}}\,.$$

[13] $N - x$ 図の三角形の面積を計算しても良い（仕事の計算のためにグラフを描かせる誘導が付いている）.

板から離れる後の小球は重力のみを受けて，その位置，および速度は離れた瞬間を時刻 $t=0$ とすると，

$$\begin{cases} x = d + v_0 t - \dfrac{1}{2} g t^2 \,, \\ v = v_0 - g t \,, \end{cases}$$

であり，最高点（折り返す位置）ゆえ $v=0$ を解いて，

$$t = \frac{v_0}{g} \,, \qquad \therefore x = d + \frac{{v_0}^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2}{d} = d + \frac{\alpha^2 - 1}{2} d = \underbrace{\frac{\alpha^2 + 1}{2} d}_{\text{ケ}}$$

(3)　板の運動方程式は[*14]，

$$\begin{aligned} 2mA &= -\frac{3mg}{d}(X - d) - 2mg \\ &= -\frac{3g}{2d}\left(X - \frac{1}{3}d\right) . \end{aligned}$$

よって，振動中心 X_0，および周期 T はそれぞれ，

$$X_0 = \underbrace{\frac{1}{3}d}_{\text{コ}} \,, \quad T = \underbrace{2\pi\sqrt{\frac{2d}{3g}}}_{\text{サ}} \,.$$

また，位置 X は初期条件 $X=d$，$v=v_0$ より，

$$\begin{cases} X = \dfrac{d}{3} + C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t) \,, \\ V = C\omega\cos(\omega t) - D\omega\sin(\omega t) \,, \end{cases} \qquad \therefore D = \frac{2}{3}d \,,\ \ C = \frac{v_0}{\omega} = d\sqrt{\frac{2}{3}(\alpha^2 - 1)} \,,$$

$$\therefore X = \frac{d}{3} + d\sqrt{\frac{2}{3}(\alpha^2 - 1)}\,\sin(\omega t) + \frac{2}{3}d\cos(\omega t) \,.$$

よって，振幅 A は[*15]，

$$\begin{aligned} X &= \frac{d}{3} + d\sqrt{\frac{2}{3}(\alpha^2 - 1)}\,\sin(\omega t) + \frac{2}{3}d\cos(\omega t) \\ &= \frac{d}{3} + \underbrace{\frac{d}{3}\sqrt{2(3\alpha^2 - 1)}}_{\text{シ}}\ \sin(\omega t + \theta) \,. \end{aligned}$$

(4)　小球が再び $x=d$ を通過する時刻は，

$$d + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = d \,, \qquad \therefore t = \frac{2v_0}{g} = \sqrt{(\alpha^2 - 1)\frac{d}{g}} \,,$$

[*14] 板が位置 X にあるとき，ばねの自然長からの伸びは $X - d$ である．

[*15] 三角関数の合成（加法定理の逆）を利用し，$\tan\theta = \sqrt{\dfrac{2}{3(\alpha^2 - 1)}}$ である．

であり，これが単振動の周期 T と等しくなれば良いので，

$$\sqrt{(\alpha^2-1)\frac{d}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2g}{3d}}\,, \qquad \therefore \alpha = \underbrace{\sqrt{\frac{2}{3}\pi^2+1}}_{\text{ス}}\,.$$

【補足】**(3)** シをエネルギー収支で考える

板のエネルギー収支の式は，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot 2mV^2 - \frac{1}{2}\cdot 2m{v_0}^2 &= \int_d^X \left\{-\frac{3mg}{d}(x-d) - 2mg\right\} dx \\ &= -\frac{3mg}{2d}\left(X-\frac{d}{3}\right)^2 + \frac{3mg}{2d}\left(-\frac{2}{3}d\right)^2 \\ \therefore V^2 &= (\alpha^2-1)gd - \frac{3g}{2d}\left(X-\frac{d}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}gd\,.\end{aligned}$$

ここで，折り返す瞬間を考えて，

$$(\alpha^2-1)gd - \frac{3g}{2d}\left(X-\frac{d}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}gd = 0\,, \qquad \therefore X - \frac{d}{3} = \pm\frac{d}{3}\sqrt{2(3\alpha^2-1)}$$

となり，振幅（振動中心からのずれの最大値）は $\dfrac{d}{3}\sqrt{2(3\alpha^2-1)}$ とわかる.

4 斜面，分離

問 1　始状態の位置は A のみのときのつりあいより，

$$0 = -kx - mg\sin\theta\,, \qquad \therefore x = -\frac{mg}{k}\sin\theta\,.$$

よって，2 物体からなる系のエネルギー収支を考えて[*16][*17][*18]，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot 0^2 - \frac{1}{2}\cdot 2m{v_0}^2 &= \int_{-\frac{mg}{k}\sin\theta}^{x_0} (-kx - 2mg\sin\theta)\,dx \\
-m{v_0}^2 &= \left[-\frac{1}{2}kx^2 - 2mgx\sin\theta\right]_{-\frac{mg}{k}\sin\theta}^{x_0} \\
&= -\frac{1}{2}k{x_0}^2 - 2mgx_0\sin\theta - \frac{3}{2}k\left(\frac{mg\sin\theta}{k}\right)^2 \\
\therefore x_0 &= \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{-\frac{mg\sin\theta}{k}\left\{2 + \sqrt{\frac{2k}{m}\left(\frac{v_0}{g\sin\theta}\right)^2}\right\}}\,.
\end{aligned}$$

問 2　物体間の垂直抗力を N，2 物体の加速度を a とすると，それぞれの運動方程式は，

$$\begin{cases} \mathrm{A}: ma - N - kx - mg\sin\theta\,, \\ \mathrm{B}: ma = N - mg\sin\theta\,, \end{cases} \qquad \therefore N = -\frac{1}{2}kx\,.$$

よって，$N = 0$ を考えて[*19]，

$$x_1 = \underset{\sim}{0}\,.$$

このとき，2 物体からなる系のエネルギー収支を考えて，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\cdot 2mv^2 - \frac{1}{2}\cdot 2m{v_0}^2 &= \int_{-\frac{mg}{k}\sin\theta}^{0} (-kx - 2mg\sin\theta)\,dx \\
-m{v_0}^2 &= -\frac{3}{2}k\left(\frac{mg\sin\theta}{k}\right)^2 \\
\therefore v^2 &= {v_0}^2 - \frac{3}{2}\frac{m}{k}(g\sin\theta)^2\,.
\end{aligned}$$

以上から，v の存在条件を考えて，

$${v_0}^2 - \frac{3}{2}\frac{m}{k}(g\sin\theta)^2 > 0\,, \qquad \therefore v_0 > \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{g\sin\theta\sqrt{\frac{3}{2}\frac{m}{k}}}\,(= v_1)\,.$$

[*16] 2 物体を合わせて 1 つと見た系にはたらく力は被積分関数の通り．(b) で立式した運動方程式の和を取ることで N が相殺することが確認できる．

[*17] $-k\left(x + \dfrac{2mg}{k}\sin\theta\right)$ と変形してから積分した方がその後の計算が楽．

[*18] 最下点ゆえ負の解を選択する（正の解は 2 物体が離れないまま運動する場合の最高点の解を与える）．

[*19] 2 物体が接触してるならば $N > 0$ ゆえ，$N < 0$ なら分離（等号はどちらに含めても良い）．

問 3　分離後のそれぞれの運動方程式は，

$$\begin{cases} \mathrm{A}: ma = -kx - mg\sin\theta\,, \\ \mathrm{B}: mb = -mg\sin\theta\,, \end{cases}$$

A が再び $x = 0$ を通過するまでの間，A は重力の斜面平行成分に加え x 負方向に弾性力を受ける．したがって，A，B ともに x 負方向の加速度が生じているが，$x > 0$ の領域ではその大きさは A の方が大きいため，A が再度 $x = 0$ を通過する間に衝突することはない．

問 4　B が再び $x = 0$ を通過する瞬間に A がちょうど単振動の 1 周期分の運動を行っていればよい．分離した瞬間の速さを v とすると，問 2 の計算から

$$v = \sqrt{{v_0}^2 - \frac{3}{2}\frac{m}{k}(g\sin\theta)^2}$$

であり，分離してから B が $x = 0$ を通過するまでの時間 t は，

$$vt - \frac{1}{2}g\sin\theta t^2 = 0\,, \qquad \therefore t = \frac{2v}{g\sin\theta}\,.$$

以上より，

$$\frac{2v}{g\sin\theta} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,, \qquad \therefore v_0 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{g\sin\theta\sqrt{\frac{3}{2}\frac{m}{k}}}\,.$$

【補足】(a)(b) を時間追跡で考える

個々の運動方程式より，

$$\begin{cases} \mathrm{A}: ma = -kx - mg\sin\theta - N\,, \\ \mathrm{B}: ma = -mg\sin\theta + N\,, \end{cases} \qquad \therefore a = -\frac{k}{2m}\left(x + \frac{2mg}{k}\sin\theta\right)\,, \quad N = -\frac{1}{2}kx\,.$$

よって，接触する 2 物体は，振動中心 $x = -\dfrac{2mg}{k}\sin\theta$，角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{2m}}$ の単振動をし，時刻 t における物体 A の位置 x は，初期条件から決まる定数 C，D を用いて，

$$x = -\frac{2mg}{k}\sin\theta + C\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}\,t\right) + D\cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}\,t\right)\,.$$

また，垂直抗力の表式から $x = 0$ を通過すると分離することがわかる．

2 物体が単振動の一部の運動をしているとき，C，D は初期条件 $x = -\dfrac{mg}{k}\sin\theta$，$v = v_0$ より，

$$\begin{cases} -\dfrac{mg}{k}\sin\theta = -\dfrac{2mg}{k}\sin\theta + D\,, \\ v_0 = C\omega\,, \end{cases} \qquad \therefore C = \frac{v_0}{\omega} = v_0\sqrt{\frac{2m}{k}}\,, \quad D = \frac{mg}{k}\sin\theta\,,$$

と求まり，位置 x は，

$$x = -\frac{2mg}{k}\sin\theta + v_0\sqrt{\frac{2m}{k}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}\,t\right) + \frac{mg}{k}\sin\theta\cos\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}\,t\right)$$

となり，最下点 x_0 は，三角関数の合成をして[20]，

$$\begin{aligned} x &= -\frac{2mg}{k}\sin\theta + \sqrt{\left(v_0\sqrt{\frac{2m}{k}}\right)^2 + \left(\frac{mg}{k}\sin\theta\right)^2}\,\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}\,t + \phi\right) \\ &= -\frac{2mg}{k}\sin\theta + \frac{mg}{k}\sin\theta\sqrt{1 + \frac{2k}{m}\left(\frac{v_0}{g\sin\theta}\right)^2}\,\sin\left(\sqrt{\frac{k}{2m}}\,t + \phi\right), \\ \therefore x_0 &= \underline{-\frac{2mg}{k}\sin\theta - \frac{mg}{k}\sin\theta\sqrt{1 + \frac{2k}{m}\left(\frac{v_0}{g\sin\theta}\right)^2}}\,. \end{aligned}$$

また，$x > 0$ を満たすような v_0 の条件は，

$$-\frac{2mg}{k}\sin\theta + \frac{mg}{k}\sin\theta\sqrt{1 + \frac{2k}{m}\left(\frac{v_0}{g\sin\theta}\right)^2} > 0\,, \qquad \therefore v_0 > g\sin\theta\sqrt{\frac{3}{2}\frac{m}{k}}\,.$$

[20] 合成した際の位相のずれ ϕ は，$\tan\phi = \dfrac{g\sin\theta}{v_0}\sqrt{\dfrac{k}{2m}}$ である．

5 摩擦，分離

（1） 各物体の運動方程式より，

$$\begin{cases} \mathrm{A}: Ma = \underline{-KX-f}_{\text{ア}}\,, \\ \mathrm{B}: 2Ma = \underline{f}_{\text{イ}}\,, \end{cases} \qquad \therefore a = -\frac{K}{3M}X\,,\quad f = \underline{-\frac{2}{3}KX}_{\text{ウ}}\,.$$

物体 A の位置 X は，初期条件より時刻 t の関数として，

$$X = -L\cos\left(\sqrt{\frac{K}{3M}}\,t\right)$$

と表せる[*21]ので，$X=0$ を解いて[*22]，

$$-L\cos\left(\sqrt{\frac{K}{3M}}\,t\right) = 0\,, \qquad \therefore T_1 = \underline{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3M}{K}}}_{\text{エ}}\,.$$

このとき，物体 B の運動エネルギーは，

$$\frac{1}{2}\cdot 2Mv^2 = ML\left\{\sqrt{\frac{K}{3M}}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 = \underline{\frac{1}{3}KL^2}_{\text{オ}}\,.$$

（2） ばねの縮みを d，それぞれが床から受ける垂直抗力を N_{A}，N_{B}，静止摩擦力を R_{A}，R_{B}，物体間の垂直抗力を f とする．各物体のつりあいの式は，

$$\begin{cases} 0 = kd - f - R_{\mathrm{A}}\,, \\ 0 = f - R_{\mathrm{B}}\,, \\ 0 = N_{\mathrm{A}} - Mg\,, \\ 0 = N_{\mathrm{B}} - 2Mg\,. \end{cases}$$

滑りだす瞬間ゆえ $R_{\mathrm{A}} = \mu Mg$，$R_{\mathrm{B}} = 2\mu Mg$ を考えて[*23]，

$$d = \underline{\frac{3\mu Mg}{K}}_{\text{カ}}\,.$$

動き出した後の各物体の運動方程式より，

$$\begin{cases} \mathrm{A}: Ma = -KX - \frac{1}{3}\mu Mg - f\,, \\ \mathrm{B}: 2Ma = -\frac{2}{3}\mu Mg + f\,, \end{cases} \qquad \therefore a = -\frac{K}{3M}\left(X + \frac{\mu Mg}{K}\right)\,,\quad f = \underline{-\frac{2}{3}KX}_{\text{キ}}\,.$$

[*21] 初期条件は $X=-L$，$v=0$ であり，振動中心は $X=0$，角振動数は $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{3M}}$ である．

[*22] 単振動の $\dfrac{1}{4}$ 周期を考えればよいので，$T_1 = \dfrac{1}{4}T$ とするのが楽（実際の試験では普通このように解答する）．

[*23] 今は学習初期段階なので丁寧に個別に考えたが，2 つを質量 $3M$ の 1 つの物体と見て滑る瞬間を考える方が楽．

したがって，小物体らは振動中心 $X=-\underbrace{\dfrac{\mu Mg}{K}}_{\text{ケ}}$，振幅 $A=\underbrace{\dfrac{2\mu Mg}{K}}_{\text{コ}}$ の単振動の一部の運動をする[*24].

また，離れる瞬間の物体 B の運動エネルギーは，エネルギー収支を考えて[*25]，

$$\frac{1}{2}\cdot 2Mv^2-\frac{1}{2}\cdot 2M\cdot 0^2=\int_{-\frac{3\mu Mg}{K}}^{0}\left(-\frac{2}{3}KX-\frac{2}{3}\mu Mg\right)dX$$

$$Mv^2=\left[-\frac{1}{3}Kx^2-\frac{2}{3}MgX\right]_{-\frac{3\mu Mg}{K}}^{0}=\underbrace{\frac{(\mu Mg)^2}{K}}_{\text{ク}}$$

であり，離れる時刻 T_2 は，$X=0$ を解いて[*26]，

$$X=-\frac{\mu Mg}{K}-\frac{2\mu Mg}{K}\cos\left(\sqrt{\frac{K}{3M}}\,t\right)=0\,,\qquad \therefore T_2=\underbrace{\frac{2}{3}\pi\sqrt{\frac{3M}{K}}}_{\text{サ}}\,.$$

【補足】クを別の考えで

2 物体からなる系（2 物体を合わせて 1 つの物体と見た系）のエネルギー収支より，

$$\frac{1}{2}\cdot 3Mv^2-\frac{1}{2}\cdot 3M\cdot 0^2=\int_{-\frac{3\mu Mg}{K}}^{0}(-KX-\mu Mg)\,dX=\frac{3}{2}\frac{(\mu Mg)^2}{K}\,,\qquad \therefore MV^2=\frac{(\mu Mg)^2}{K}\,.$$

また，2 物体とばねからからなる系の力学的エネルギー収支より，

$$\left(\frac{1}{2}\cdot 3Mv^2-\frac{1}{2}\cdot 3M\cdot 0^2\right)+\left\{\frac{1}{2}K\left(\frac{3\mu Mg}{K}\right)^2-\frac{1}{2}K\cdot 0^2\right\}=-\mu Mg\frac{3\mu Mg}{K}$$

$$\therefore MV^2=\frac{(\mu Mg)^2}{K}\,.$$

[*24] 始状態の位置が $X=-\dfrac{3\mu Mg}{K}$，振動中心が $-\dfrac{\mu Mg}{K}$ ゆえその差が振幅と読める.

[*25] $f=-\dfrac{2}{3}KX$ を代入した.

[*26] 振動中心，振幅はすでに求めており，運動の様子から $-\cos$ 型の関数と判断した．これまでのように初期条件から求めても良いが，このくらい雑（だけど丁寧に）に求められるようにもしたい.