

物理補講（第3回）

目次

問題	3
略解・ヒント	15
解答	19

問題編



1 図1のように、質量 M の台車が水平な床の上に静止している。この台車の上面は水平で、右端にはばね定数 k のばねが取り付けられ、左端には動摩擦係数 μ のあらい面（摩擦面）がある。また、質量 m の物体が台車の上面と接するように天井から長さ h のひもでつるされている。ここで、物体の大きさとひもおよびばねの質量は無視できる。

台車上面の、物体が接している場所を点 A、自然長のばねの左端を点 B、摩擦面の右端を点 C とし、点 A と点 B、点 A と点 C は十分に離れている。点 A, B, C は同一直線上にあり、物体と台車の運動、およびばねの伸縮はこの直線を含む鉛直面内で起こるとする。摩擦面以外の台車上面と物体の間の摩擦、および台車と床の間の摩擦は無視できる。重力加速度の大きさを g とし、床に固定した水平方向右向きを正とする座標を考えて、以下の問いに答えよ。ただし、空気抵抗は考えないとする。

図2のように、物体をひもがたるまないように高さ h まで持ち上げ、静かに手を放した。

問1 物体が点 A に到達する直前の速度 v_0 を、 m, M, k, h, μ, g のうち必要なものを用いて表せ。

問2 物体が点 A に到達する直前のひもの張力の大きさ S を、 m, M, k, h, μ, g のうち必要なものを用いて表せ。

物体が点 A に到達した瞬間にひもを切ると、物体は台車の上面を移動して、ばねに接触した。ひもを切った後はひもは物体の運動に影響を与えないとする。

問3 ばねが最も縮んだ瞬間の台車の速度 V_1 を、 m, M, k, h, μ, g のうち必要なものを用いて表せ。

問4 ばねが最も縮んだ瞬間のばねの自然長からの縮み X を、 m, M, k, h, μ, g のうち必要なものを用いて表せ。

問5 問4の状態の後、物体はばねと接触したまま点 B に到達し、点 B でばねから離れた。この直後の物体の床に対する速さ v_2 を、 m, M, k, h, μ, g のうち必要なものを用いて表せ。

物体は点 C で摩擦面に達した後、摩擦面上で静止した。

問6 物体が摩擦面上を動いた距離 L を、 m, M, k, h, μ, g のうち必要なものを用いて表せ。

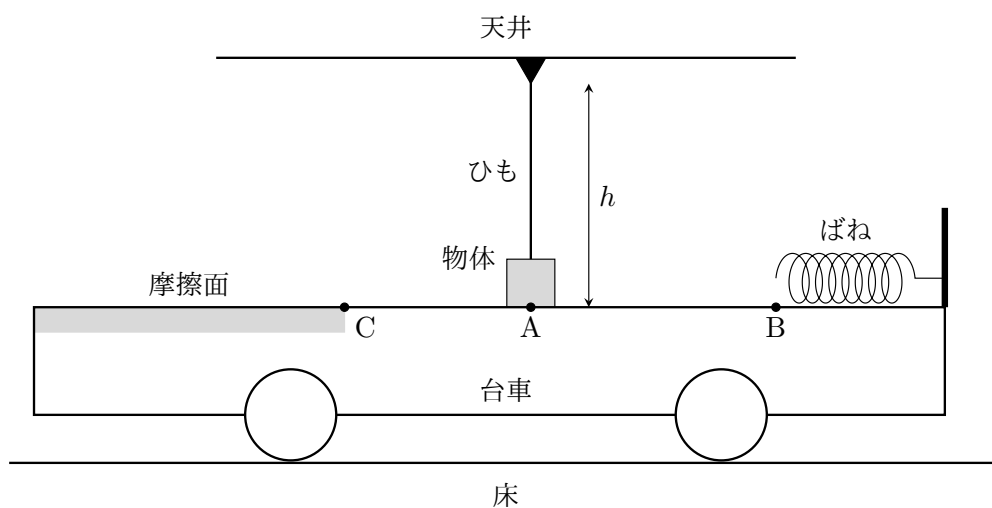


図 1

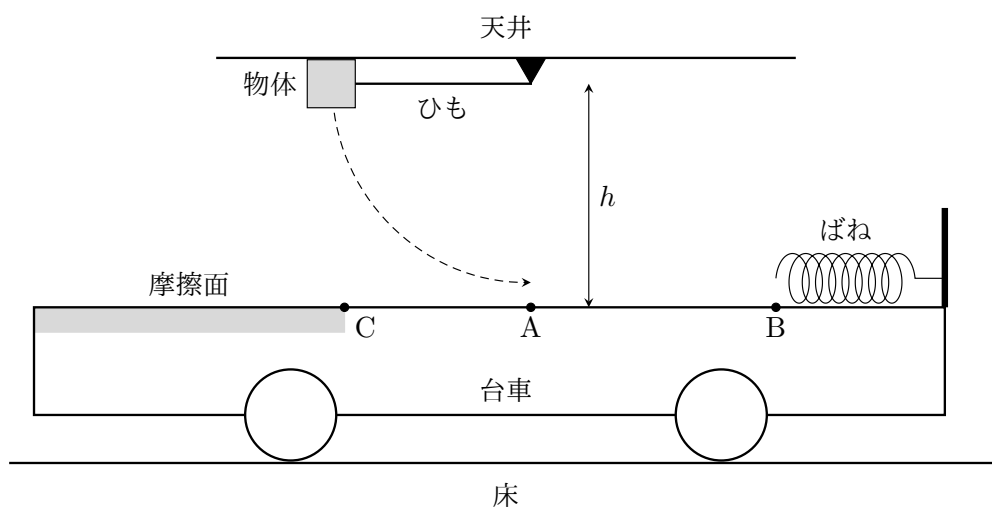


図 2

《メモ》.....

2022 年筑波大より.

2 図のように、質量 $2M$ の物体 A と質量 M の物体 B が、ばね定数 k の質量の無視できるばねによってつながれて、なめらかで水平な床の上に静止している。また、物体 A はかたい壁に接していた。床の上を左向きに進んできた物体 C が、物体 B に完全弾性衝突して、跳ね返された。右向きを正の向きと定めると、衝突直後の物体 C の速度は $+u_1$ ($u_1 > 0$)、物体 B の速度は $-v_1$ ($v_1 > 0$) であった。その後、物体 B と物体 C が再び衝突することはなかった。

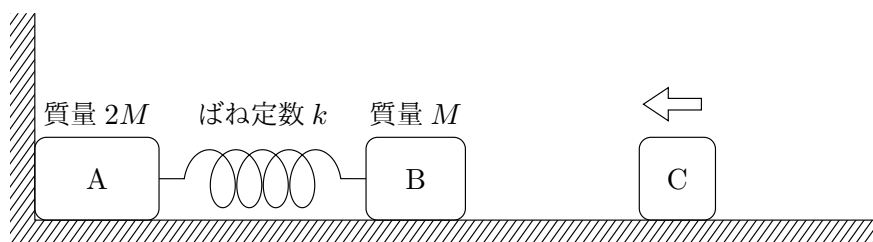
I まず、衝突前から物体 A が壁から離れるまでの運動を考える。

- (1) 衝突前の物体 C の速度 u_0 ($u_0 < 0$) を u_1 と v_1 を用いて表せ。
- (2) ばねが最も縮んだときの自然長からの縮み x ($x > 0$) を求めよ。
- (3) 衝突してからばねの長さが自然長に戻るまでの時間 T を求めよ。

II ばねの長さが自然長に戻ると、その直後に物体 A が壁から離れた。

- (1) やがて、ばねの長さは最大値に達し、そのとき物体 A と物体 B の速度は等しくなった。その速度 v_2 を求めよ。
- (2) ばねの長さが最大値に達したときの自然長からの伸び y ($y > 0$) を求めよ。
- (3) その後ばねが縮んで、長さが再び自然長に戻ったとき、物体 A の速度は最大値 V に達した。 V を求めよ。

III 物体 A が壁から離れた後、物体 B と物体 C の間隔は、ばねが伸び縮みを繰り返すたびに広がっていった。このことからわかる u_1 と v_1 の関係を、不等式で表せ。



《メモ》.....

2003 年東京大より.

3 図のような質量 M の台がなめらかで水平な床の上にある。台の上面 ABC は摩擦のない曲面で、点 C 付近でなめらかに水平になっていて、垂直な壁 P につながっている。壁 P は点 C よりも十分高いものとする。この台の壁 P は台の一部となっていて、台と同じ運動をする。曲面の左端点 A は点 C より h だけ高い。この台は固くて変形することはない。重力加速度の大きさを g とし、速度はすべて床に対する速度とし、水平方向の速度については図の右向きを正として答えよ。

まず、図のように台を壁 W に接するように静かに置き、大きさが無視できる質量 m ($m < M$) の小球を点 A から曲面にそって静かにすべらせた。

問1 小球が点 C で台の壁 P と衝突する直前の小球の速度 v_0 を求めよ。

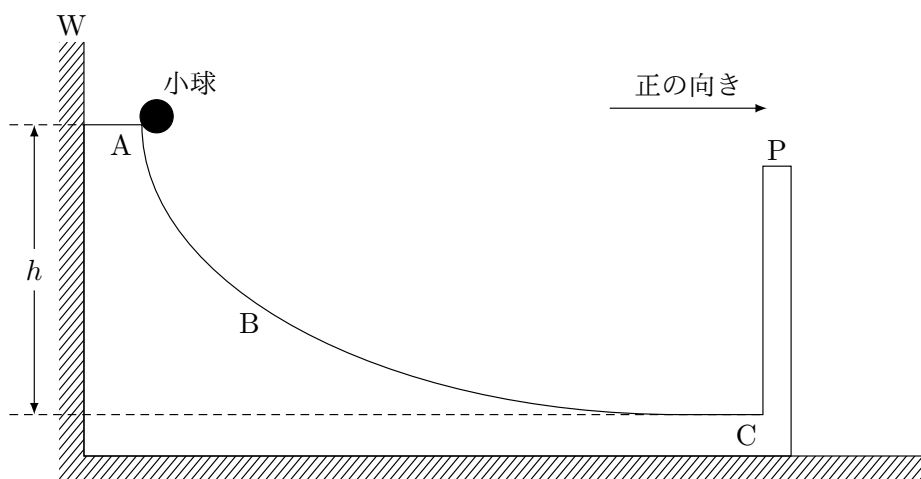
問2 はねかえり係数（反発係数） e ($e > m/M$) で小球が台の壁 P と衝突した直後の小球の速度 v と台の速度 V を e , m , M , g , h を用いて表せ。

次に、壁 W がなく、なめらかで水平な床の上に台が静止している。このとき、点 A から質量 m の小球を曲面にそって静かにすべらせた。

問3 小球が壁 P と衝突する直前の小球の速度 v_0' と台の速度 V_0' を m , M , g , h を用いて表せ。

問4 点 C ではねかえった直後（はねかえり係数 e ）の小球の速度 v' と台の速度 V' を e , v_0' , V_0' を用いて表せ。

問5 点 C ではねかえったあと、小球が曲面にそって上がりうる最高の高さ h' を求めよ。また、 $e = 1$ と $e < 1$ の場合で台と小球の運動にどのような差が現れるか 60 字以内で記せ。



《メモ》.....

2008 年京都府立医科大より.

4 次の文を読んで、 に適した式または数値を、それぞれの解答欄に記入し、各問いに答えよ。

図1のように、十分長い2本の平行な棒が距離 d 離して水平に固定されている。2本の棒には、それぞれ質量 m_1 の小球1と質量 m_2 の小球2が通されていて、滑らかに運動できるようになっている。小球は十分小さく、接触することはないものとする。また、重力の影響は無視できるものとし、クーロン力の比例定数を k とする。なお、小球の速度は右向きを正とする。

- (1) 小球1には正電荷 q ($q > 0$) を与え、小球2には負電荷 $-q$ を与えた。最初、図1のように小球1と2を十分遠方に離して静止させておいた。このときのクーロン力による位置エネルギーを0とする。

小球1, 2を同時に放すと、互いに近づき始めた。小球1, 2が最も接近したとき、クーロン力による位置エネルギーは ア であり、小球1, 2の運動量の和は イ である。したがって、そのとき、小球1の速度は ウ になり、小球2の速度は エ になる。

問1 最も接近した後、十分遠方に離れたとき、小球1, 2の運動はどのようなになるか。10字程度で答えよ。

- (2) 小球1, 2ともに正電荷 q を与えて、十分遠方に離しておいた。その後、図2のように、小球1に初速度 v_0 を与えて、同時に小球2を自由にした。

このとき、 v_0 が十分大きいときは、小球1は途中で小球2を追い越していく。その場合、十分遠方に離れた後の小球1の速度は オ になり、小球2の速度は カ になる。

一方、 v_0 が十分小さいときは、小球1と2はある距離まで近づいた後再び離れていく。その場合、小球1, 2が最も接近したとき、小球1の速度は キ となり、そのときの小球1, 2の中心間の距離は ク となる。したがって、このように小球1が小球2を追い越すことなく再び離れていくのは、 v_0 が $v_0^* =$ ケ より小さいときであることがわかる。そのとき、十分遠方に離れた後の小球1の速度は コ になり、小球2の速度は サ になる。

問2 $v_0 = v_0^*$ のとき、小球1, 2の運動はどのようなようになるか論ぜよ。

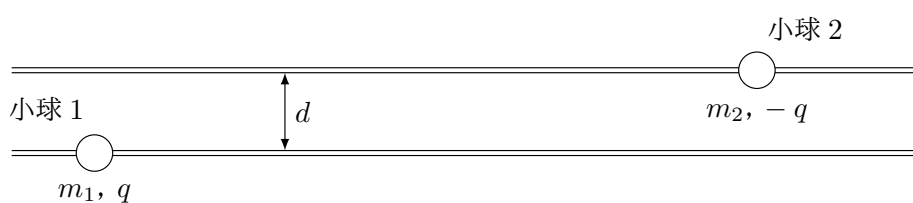


図 1

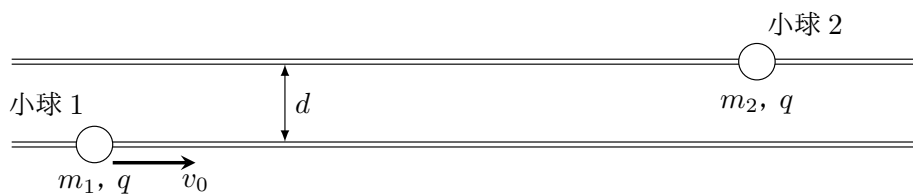


図 2

《メモ》.....

5 図1, 図2は, 表面がなめらかな台の上で大きさが等しい球Aと球Bが衝突するところを示している. 球A, 球Bの質量はそれぞれ M_A , M_B である. 球の表面も完全になめらかであり, 衝突面において摩擦力は生じず, 衝突時のはねかえり係数(反発係数)は e とする. また, 2つの球の重心を含み, 台の表面と平行な水平面内に, 図のように x 軸, y 軸を固定する. このような条件のもとに, 以下の文中の空欄(a)~(g)を, 適当な数字および文中で与えられた記号で埋めよ.

図1は, 静止している球Bに, 球Aが x 軸方向の速度 V で衝突するところを示している. 衝突後, 球Aの速度は $V_A = \boxed{\text{(a)}} \times V$, 球Bの速度は $V_B = \boxed{\text{(b)}} \times V$ となった. また, 2つの球の力学的エネルギーは, 衝突の前後で

$$\Delta W = \frac{M_A M_B}{2(M_A + M_B)} \times \boxed{\text{(c)}} \times V^2$$

の差が生じることになる.

次に図2は, 静止している球Bに, 球Aが x 軸方向の速度 V で衝突するが, 衝突時の球Aと球Bの重心を結んだ直線と球Aの進行方向(x 軸方向)とのなす角度が θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) である場合を示している.

この衝突において, 衝突位置の球面に対する接線方向に Y 軸, これと直角方向(両球の重心を結んだ直線方向)に X 軸を図2のように設定する. 両球の衝突面に摩擦力はないので, 衝突時に球Bが球Aから受ける力積の方向は X 軸方向のみとなる. したがって, 衝突後, 球Bの速度の X 成分は

$$(V_B)_X = \boxed{\text{(b)}} \times \boxed{\text{(d)}}.$$

球Bの速度の Y 成分は

$$(V_B)_Y = \boxed{\text{(e)}}$$

となり, 球Aの速度の X 成分, Y 成分はそれぞれ

$$(V_A)_X = \boxed{\text{(a)}} \times \boxed{\text{(d)}}$$

および

$$(V_A)_Y = \boxed{\text{(f)}}$$

となる. また, この衝突における両球の力学的エネルギーの衝突前後の差は,

$$\Delta W = \frac{M_A M_B}{2(M_A + M_B)} \times \boxed{\text{(g)}}$$

で表される.

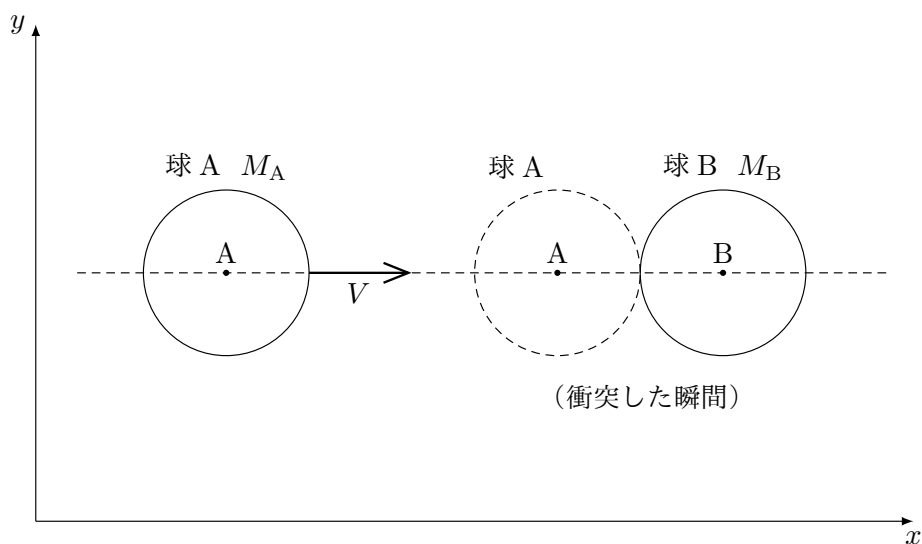


図 1

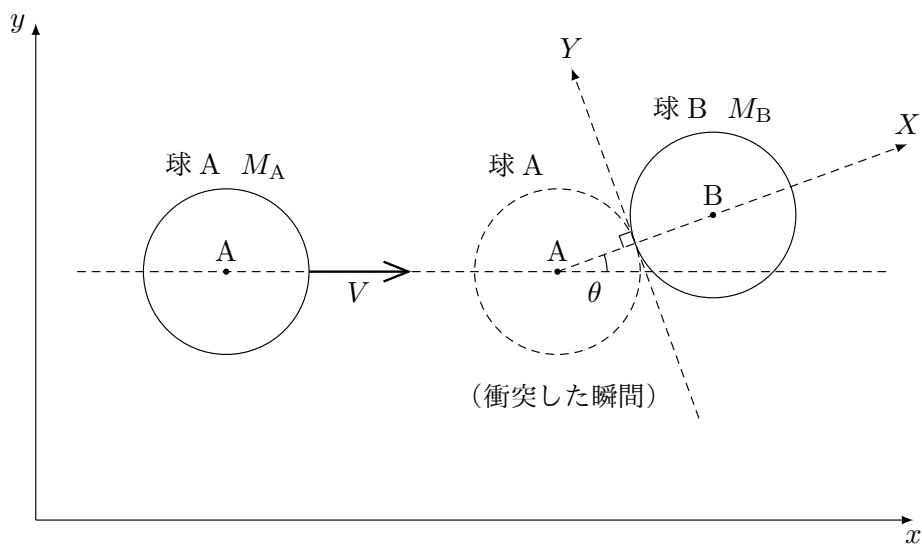


図 2

《メモ》.....

略解・ヒント

■略解

1

$$(1) \sqrt{2gh} \quad (2) 3mg \quad (3) \frac{m}{M+m} \sqrt{2gh}$$

$$(4) \sqrt{\frac{2Mm}{k(M+m)}} gh$$

$$(5) v_2 = \frac{m-M}{M+m} \sqrt{2gh}, \quad V_2 = \frac{2m}{M+m} \sqrt{2gh}$$

$$(6) \frac{M}{M+m} \frac{h}{\mu}$$

2

$$\text{I (1) } -u_1 - v_1 \quad (2) v_1 \sqrt{\frac{M}{k}} \quad (3) \pi \sqrt{\frac{M}{k}}$$

$$\text{II (1) } \frac{1}{3} v_1 \quad (2) v_1 \sqrt{\frac{2M}{3k}} \quad (3) \frac{2}{3} v_1$$

$$\text{III } u_1 > \frac{1}{3} v_1$$

3

$$(1) \sqrt{2gh}$$

$$(2) v = \frac{(1+e)m}{M+m} \sqrt{2gh},$$

$$V = \frac{(m-eM)}{M+m} \sqrt{2gh}$$

$$(3) v_0' = \sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}}, \quad V_0' = -\frac{m}{M} \sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}}$$

$$(4) v' = -ev_0', \quad V' = -eV_0'$$

$$(5) h' = eh^2 : e = 1 \text{ では, 小球が点 A へ戻る}$$

衝突運動を繰り返し, $e < 1$ では, 元の高さまで戻ることはなく, 十分時間経過後 2 物体は静止する. (60 字)

4

$$(1) \text{ア} : -\frac{kq^2}{d} \quad \text{イ} : 0 \quad \text{ウ} : \sqrt{\frac{m_2}{m_1} \frac{2kq^2}{(m_1+m_2)d}}$$

$$\text{エ} : -\sqrt{\frac{m_1}{m_2} \frac{2kq^2}{(m_1+m_2)d}}$$

問1 2物体はともに静止する.

$$(2) \text{オ} : v_0 \quad \text{カ} : 0 \quad \text{キ} : \frac{m_1}{m_1+m_2} v_0$$

$$\text{ク} : \frac{2(m_1+m_2)kq^2}{m_1 m_2 v_0^2}$$

$$\text{ケ} : \sqrt{\frac{2(m_1+m_2)kq^2}{m_1 m_2 d}} \quad \text{コ} : \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0$$

$$\text{サ} : \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0$$

問2 小球間の距離が d となった後, 2物体は, クーロン斥力による不安定なつりあいの状態で並進運動を行う.

5

$$(a) \frac{M_A - eM_B}{M_A + M_B} \quad (b) \frac{(1+e)M_A}{M_A + M_B} \quad (c) e^2 - 1$$

$$(d) V \cos \theta \quad (e) 0 \quad (f) -V \sin \theta$$

$$(g) (e^2 - 1)V \cos^2 \theta$$

■ヒント

・複数物体系の基本は以下 2 つの保存則の連立.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{外力のない方向の運動量保存則} \\ \text{全体の力学的エネルギー保存則} \end{array} \right.$$

・衝突は, 以下の 2 式を連立.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{衝突の直前直後の運動量保存則} \\ \text{衝突の条件} \end{array} \right.$$

以下ヒントのない問題は全て上記の定石通り.

1

問 2 非等速円運動ゆえ, 以下 2 式を連立する (力学的エネルギー保存則は問 1 で問われている).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{力学的エネルギー保存則} \\ \text{運動方程式の中心成分} \end{array} \right.$$

問 6 内力の仕事は個々のエネルギー収支に注目する.

2

I(3) 単振動の様子から, 周期の何分の 1 かを考えればよい.

III C の速度が, A, B, ばねからなる系の重心の速度を上回ればよい.

4

オ (小球 1 の速度) > (小球 2 の速度) となる解を選ぶ.

コ (小球 1 の速度) < (小球 2 の速度) となる解を選ぶ.

解答編



1

 ばね, 摩擦*¹

問 1 力学的エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \quad \therefore v_0 = \sqrt{2gh}.$$

問 2 運動方程式 (中心成分) より,

$$m \frac{(\sqrt{2gh})^2}{h} = S - mg \quad \therefore S = \underline{3mg}.$$

問 3 運動量保存則より,

$$mV_1 + MV_1 = mv_0 \quad \therefore V_1 = \frac{m}{M+m} \sqrt{2gh}.$$

問 4 力学的エネルギー保存則より,

$$\frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}MV_1^2 + \frac{1}{2}kX^2 = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad \therefore X = \sqrt{\frac{2Mm}{k(M+m)}gh}.$$

問 5 力学的エネルギー・運動量保存則より*²,

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}MV_2^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_0^2, \\ mv_2 + MV_2 = mv_0 \end{cases} \quad \therefore v_2 = \frac{m-M}{M+m} \sqrt{2gh}, \quad V_2 = \frac{2m}{M+m} \sqrt{2gh}.$$

問 6 物体が台に対して静止したときの 2 物体の速度を v とする. 運動量保存則より,

$$mv + Mv = mv_0 \quad \therefore v = \frac{m}{M+m} v_0.$$

各物体の変位をそれぞれ x , X とすれば, エネルギー収支より,

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = \mu mgx, \\ \frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}MV_2^2 = -\mu mgX \end{cases} \quad \therefore L = X - x = \frac{M}{M+m} \frac{h}{\mu}.$$

*¹ 問 1, 問 2 は非等速円運動に関する設問.

*² 力学的エネルギー保存則は,

$$MV_2^2 = m(v_0 + v_2)(v_0 - v_2)$$

と変形できて, ここに運動量保存則から得られる $MV_2 = m(v_0 - v_2)$ を代入すると楽 (これははね返り係数が 1 の式と同値).

2 ばね, 衝突

I (1) 弾性衝突ゆえ, はね返り係数の式より*3,

$$u_1 - (-v_1) = -1 \cdot (u_0 - 0) \quad \therefore u_0 = \underline{\underline{-u_1 - v_1}}.$$

(2) 物体 A, B, ばねからなる系の力学的エネルギー保存則より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 2M \cdot 0^2 + \frac{1}{2} M \cdot 0^2 + \frac{1}{2} kx^2 &= \frac{1}{2} \cdot 2M \cdot 0^2 + \frac{1}{2} Mv_1^2 + \frac{1}{2} k \cdot 0^2 \\ \therefore x &= \underline{\underline{v_1 \sqrt{\frac{M}{k}}}}. \end{aligned}$$

(3) 物体 B の単振動の半周期ゆえ,

$$T = \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\underline{\underline{\frac{M}{k}}}}.$$

II 物体 A, B, ばねからなる系の水平方向の運動量保存則, および力学的エネルギー保存則は,

$$\begin{cases} 2Mv_A + Mv_B = Mv_1, \\ Mv_A^2 + \frac{1}{2}Mv_B^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}Mv_1^2. \end{cases}$$

(1) 伸び最大より $v_A = v_B = v_2$ である. よって, 運動量保存則より,

$$2Mv_2 + Mv_2 = Mv_1 \quad \therefore v_2 = \underline{\underline{\frac{1}{3}v_1}}.$$

(2) 力学的エネルギー保存則より,

$$M \left(\frac{1}{3}v_1 \right)^2 + \frac{1}{2}M \left(\frac{1}{3}v_1 \right)^2 + \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}Mv_1^2 \quad \therefore y = \underline{\underline{v_1 \sqrt{\frac{2}{3} \frac{M}{k}}}}.$$

(3) $x = 0$ より,

$$\begin{cases} 2Mv_A + Mv_B = Mv_1, \\ Mv_A^2 + \frac{1}{2}Mv_B^2 = \frac{1}{2}Mv_1^2. \end{cases} \quad \therefore v_A = \underline{\underline{\frac{2}{3}v_2 (= V)}}, \quad v_B = -\frac{1}{3}v_1.$$

*3 問われてはいないが, 運動量保存則より C の質量 M_C が求まる.

$$M(-v_1) + M_C u_1 = M_C u_0 = -M_C(u_1 + v_1) \quad \therefore M_C = \frac{v_1}{2u_1 + v_1} M.$$

III 物体 C の速度 u_1 が, 物体 A, B, ばねからなる系の重心速度 v' よりも大きければよい. 重心の定義より*4,

$$v' = \frac{2Mv_A + Mv_B}{2M + M} = \frac{1}{3}v_1 \quad \therefore u_1 > \underbrace{\frac{1}{3}v_1}.$$

【補足 1】 I(3) について

B の加速度を a , B の位置を x (自然長を $x = 0$), A が壁から受ける垂直抗力を N とする. 運動方程式より,

$$\begin{cases} 2M \cdot 0 = -kx + N, \\ Ma = -kx \end{cases} \quad a = -\frac{k}{M}x, \quad N = kx.$$

したがって, 再度 $x = 0$ となった瞬間に $N = 0$ となり, このときに A は壁から離れることがわかる. 運動の様子を考えれば*5この間は半周期とわかる*6.

【補足 2】 運動方程式 → II の保存則

A, B の位置, および速度をそれぞれ x_A, x_B, v_A, v_B , ばねの自然長を ℓ とすると, 運動方程式は*7,

$$\begin{cases} 2M \frac{dv_A}{dt} = k\{(x_B - x_A) - \ell\}, \\ M \frac{dv_B}{dt} = -k\{(x_B - x_A) - \ell\}. \end{cases}$$

2 式の和を取って,

$$\begin{aligned} 2M \frac{dv_A}{dt} + M \frac{dv_B}{dt} &= 0 \\ \frac{d}{dt}(2Mv_A + Mv_B) &= 0 \\ \therefore 2Mv_A + Mv_B &= \text{const} = 2M \cdot 0 + Mv_1. \end{aligned}$$

また, 運動方程式に各物体の速度をかけて和を取って,

$$\begin{aligned} 2Mv_A \frac{dv_A}{dt} + Mv_B \frac{dv_B}{dt} - k\{(x_B - x_A) - \ell\} \frac{dx_A}{dt} + k\{(x_B - x_A) - \ell\} \frac{dx_B}{dt} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \cdot 2Mv_A^2 + \frac{1}{2}Mv_B^2 \right) + k\{(x_B - x_A) - \ell\} \left(\frac{dx_B}{dt} - \frac{dx_A}{dt} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \cdot 2Mv_A^2 + \frac{1}{2}Mv_B^2 + \frac{1}{2}k\{(x_B - x_A) - \ell\}^2 \right\} &= 0 \\ \therefore \frac{1}{2} \cdot 2Mv_A^2 + \frac{1}{2}Mv_B^2 + \frac{1}{2}k\{(x_B - x_A) - \ell\}^2 &= \text{const} = \frac{1}{2}Mv_1^2. \end{aligned}$$

*4 2 つ目の等号では運動量保存則を用いた.

*5 各自図示したりせよ.

*6 もちろん時間追跡しても良いが, 図示すればわかるので図示で十分.

*7 伸びているときを考えて, ばねの伸びは $(x_B - x_A) - \ell$ である. なお, 縮んでいるときを考えれば, ばねの縮みは $\ell - (x_B - x_A)$ であり, このとき力は逆向きに作用するので運動方程式の形は変わらない.

3 面, 衝突

問 1 力学的エネルギー保存則より*8,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \quad \therefore v_0 = \sqrt{2gh}.$$

問 2 2 物体からなる系の運動量保存則, およびはね返り係数の式より*9,

$$\begin{cases} mv + MV = m\sqrt{2gh}, \\ v - V = -e(\sqrt{2gh} - 0) \end{cases} \quad \therefore v = \frac{(1+e)m}{M+m}\sqrt{2gh}, \quad V = \frac{(m-eM)}{M+m}\sqrt{2gh}.$$

問 3 2 物体と重力場からなる系の運動量保存則, 力学的エネルギー保存則より,

$$\begin{cases} mv_0' + MV_0' = 0, \\ \frac{1}{2}mv_0'^2 + \frac{1}{2}MV_0'^2 = mgh \end{cases} \quad \therefore v_0' = \sqrt{\frac{2M}{M+m}gh}, \quad V_0' = -\frac{m}{M}\sqrt{\frac{2M}{M+m}gh}.$$

問 4 運動量保存則, およびはね返り係数の式より*10,

$$\begin{cases} mv' + MV' = 0, \\ v' - V' = -e(v_0' - V_0') \end{cases} \quad \therefore v' = -ev_0', \quad V' = -eV_0'.$$

問 5 折り返しでは 2 物体の相対速度が 0 となる*11. それゆえ, $v = V = u$ として, 2 物体と重力場からなる系の運動量保存則, 力学的エネルギー保存則より,

$$\begin{cases} mu + Mu = 0, \\ \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}Mu^2 + mgh' = \frac{1}{2}mv_0'^2 + \frac{1}{2}MV_0'^2 \end{cases} \quad \therefore h' = \frac{e^2}{mg} \left(\frac{1}{2}mv_0'^2 + \frac{1}{2}MV_0'^2 \right) = e^2h.$$

よって, 「 $e = 1$ では, 小球が点 A へ戻る衝突運動を繰り返す, $e < 1$ では, 元の高さまで戻ることはなく, 十分時間経過後 2 物体は静止する。」(60 字)

【補足】壁から離れるとき

台が壁から受ける垂直抗力の大きさを R , 台, 小球間の垂直抗力の大きさを N , 小球が曲面上を運動するときの曲面の接線と水平面とのなす角を θ , 小球の加速度を $\vec{a} = (a_x, a_y)$ とする. 小球, およびの運

*8 小球と重力場からなる系と見ても良いし, 小球, 台, 重力場からなる系と見ても良い. 小球のエネルギー収支を考えても良い.

*9 小球が曲面を運動している間, 台は壁から力積を受けているのでこの間は 2 物体からなる系の運動量は保存していない(水平な面を運動してから保存する).

*10 $V_0' = -\frac{m}{M}v_0'$ を代入した. 運動量保存則を $mv' + MV' = mv_0' + MV_0'$ としても同じ.

*11 2 物体の相対的な位置が極値を取るため.

動方程式は,

$$\begin{cases} ma_x = N \sin \theta, \\ ma_y = N \cos \theta - mg, \\ M \cdot 0 = R - N \sin \theta. \end{cases}$$

運動方程式から, $\theta = 0$ のとき, すなわち小球が台の水平面上を運動し始めたとき台と壁との間の垂直抗力の大きさ R は 0 となり, 小球が台上の壁と衝突することで, その撃力による力積によって台は水平右向きに動き出す.

また, 壁がないときの台の運動方程式は,

$$MA = -N \sin \theta$$

であり, 束縛条件と合わせることで, 2 物体と重力場からなる系の力学的エネルギー保存則が確認できる^{*12}. 運動量保存則については, x 方向の運動方程式の和を取ることで簡単に確認できる.

^{*12} 細かい計算や束縛条件に関する諸々は授業で配布している教材の第4部第2章『複数物体系』を参照.

4 クーロン力

- (1) 2物体からなる系の運動量保存則, および2物体と電場からなる系の力学的エネルギー保存則は,

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = \underbrace{0}_{\mathcal{P}}, \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - k \frac{q^2}{r} = 0. \end{cases}$$

2物体が最も近づいたときは $r = d$ であり, このとき位置エネルギーは $-k \frac{q^2}{\underbrace{d}_1}$ であり, 2物体の速度は運動量保存則, および力学的エネルギー保存則より,

$$v_1 = \sqrt{\frac{m_2}{m_1(m_1+m_2)} \frac{2kq^2}{d}} \quad , \quad v_2 = \sqrt{\frac{m_1}{m_2(m_1+m_2)} \frac{2kq^2}{d}} .$$

問1 運動量保存則, および力学的エネルギー保存則は $r \rightarrow \infty$ として,

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = \underbrace{0}_{\mathcal{P}}, \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 0 \end{cases} \quad v_1 = v_2 = 0 .$$

よって, 2物体はともに静止する.

- (2) 2物体からなる系の運動量保存則, および2物体と電場からなる系の力学的エネルギー保存則は,

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_0, \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + k \frac{q^2}{r} = \frac{1}{2} m_1 v_0^2. \end{cases}$$

十分遠方ゆえ $r \rightarrow \infty$ を考え, 小球1が小球2を越えることから $v_1 > v_2$ の解を選べば*13,

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_0, \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \end{cases} \quad \therefore v_1 = \underbrace{v_0}_{\text{オ}}, \quad v_2 = \underbrace{0}_{\text{カ}} .$$

最近接したとき, 相対速度は0となる. したがって, $v_1 = v_2 = u$ として,

$$\begin{cases} m_1 u + m_2 u = m_1 v_0, \\ \frac{1}{2} m_1 u^2 + \frac{1}{2} m_2 u^2 + k \frac{q^2}{r} = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \end{cases} \quad \therefore u = \frac{m_1}{m_1+m_2} v_0 \quad , \quad r = \frac{2(m_1+m_2)kq^2}{m_1 m_2 v_0^2} .$$

このとき $r > d$ より,

$$\frac{2(m_1+m_2)kq^2}{m_1 m_2 v_0^2} > d \quad \therefore v_0 < \sqrt{\frac{2(m_1+m_2)kq^2}{m_1 m_2 d}} \quad (= v_0^*) .$$

*13 $v_1 < v_2$ の解は, コ, サである.

再び十分遠方を考え、小球1が小球2を越えないことから $v_1 < v_2$ の解を選んで、

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_0, \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \end{cases} \quad \therefore v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0, \quad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0.$$

問2 $v_0 = v_0^*$ のとき、運動量保存則、および力学的エネルギー保存則より最近接したときを考えて、

$$\begin{cases} m_1 u + m_2 u = m_1 v_0, \\ \frac{1}{2} m_1 u^2 + \frac{1}{2} m_2 u^2 + k \frac{q^2}{r} = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \end{cases}$$

$$\therefore u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0^* = \sqrt{\frac{m_1}{m_2} \frac{2kq^2}{(m_1 + m_2)d}}, \quad r = \frac{2(m_1 + m_2)kq^2}{m_1 m_2 v_0^{*2}} = d.$$

2物体の距離が d のときは、レールに沿ったクーロン斥力の成分がないため2物体は速度 u で並進する。また、仮に2物体の距離が d よりもわずかに大きくなった場合は、クーロン斥力によって2物体は十分遠方まで離れる^{*14}。

^{*14} 2物体の速度は、オ、カの組、またはコ、サの組となる。

5 2次元衝突

運動量保存則，およびはね返り係数の式より，

$$\begin{cases} M_A V_A + M_B V_B = M_A V, \\ V_A - V_B = -e(V - 0) \end{cases} \quad \therefore V_A = \underbrace{\frac{M_A - eM_B}{M_A + M_B}}_{(a)} V, \quad V_B = \underbrace{\frac{(1+e)M_A}{M_A + M_B}}_{(b)} V.$$

よって，衝突によるエネルギー損失は，

$$\begin{aligned} \Delta W &= \left(\frac{1}{2} M_A V_A^2 + \frac{1}{2} M_B V_B^2 \right) - \left(\frac{1}{2} M_A V^2 + 0 \right) \\ &= \frac{M_A}{2(M_A + M_B)^2} \{ (M_A - eM_B)^2 + (1+e)^2 M_A M_B - (M_A + M_B)^2 \} V^2 \\ &= \frac{M_A}{2(M_A + M_B)^2} (e^2 M_B^2 + e^2 M_A M_B - M_B^2 - M_A M_B) V^2 \\ &= \underbrace{(e^2 - 1)}_{(c)} \frac{M_A M_B}{2(M_A + M_B)} V^2. \end{aligned}$$

衝突面は Y 軸に沿っているので B の速度の Y 成分は $(V_B)_Y = \underbrace{0}_{(e)}$ である．よって，運動量保存則，およびはね返り係数の式より，

$$\begin{cases} M_A (V_A)_X + M_B (V_B)_X = M_A V \cos \theta, \\ M_A (V_A)_Y + M_B \cdot 0 = M_A (-V \sin \theta), \\ (V_A)_X - (V_B)_X = -e(V \cos \theta - 0) \end{cases}$$

$$(V_A)_X = \frac{M_A - eM_B}{M_A + M_B} \underbrace{V \cos \theta}_{(d)}, \quad (V_B)_X = \frac{(1+e)M_A}{M_A + M_B} V \cos \theta, \quad (V_A)_Y = \underbrace{-V \sin \theta}_{(f)}$$

よって，衝突によるエネルギー損失は，

$$\begin{aligned} \Delta W &= \left[\frac{1}{2} M_A \{ (V_A)_X^2 + (V_A)_Y^2 \} + \frac{1}{2} M_B \{ (V_B)_X^2 + (V_B)_Y^2 \} \right] - \left(\frac{1}{2} M_A V^2 + 0 \right) \\ &= \frac{M_A}{2(M_A + M_B)^2} \{ (M_A - eM_B)^2 + (1+e)^2 M_A M_B - (M_A + M_B)^2 \} V^2 \cos^2 \theta \\ &= \frac{M_A}{2(M_A + M_B)^2} (e^2 M_B^2 + e^2 M_A M_B - M_B^2 - M_A M_B) V^2 \cos^2 \theta \\ &= \frac{M_A M_B}{2(M_A + M_B)} \underbrace{(e^2 - 1) V^2 \cos^2 \theta}_{(g)}. \end{aligned}$$