物理補講（第 4 回）

目次

問題編

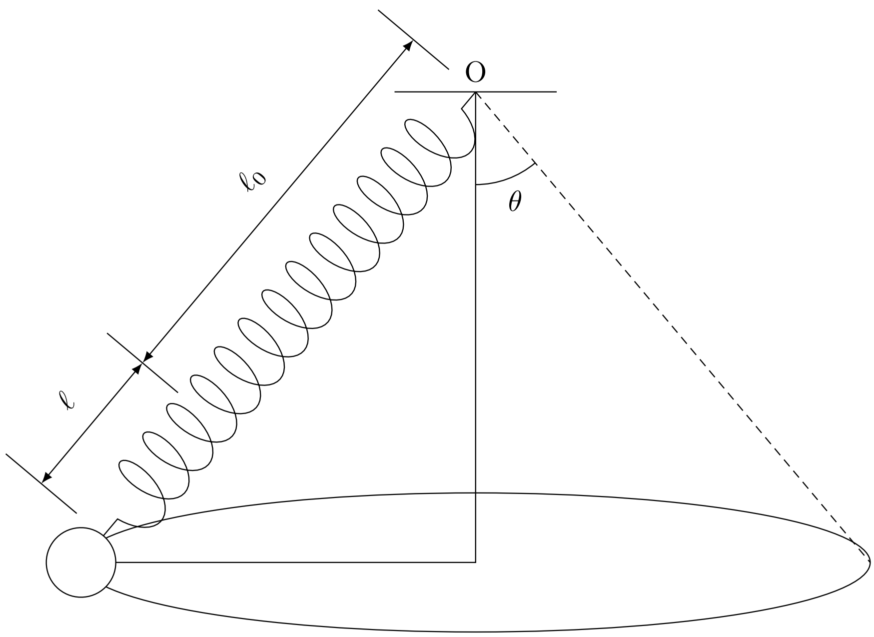
1 質量を無視できるばねの一端を O に固定して，もう一方の橋に大きさを無視できるおもりをつるしている．おもりの質量は m である．また，ばねは自然長が ℓ_0 であり，ばね定数は k である．図のようにおもりを等速円運動させたところ，おもりは速さ v で，ばねの伸びは ℓ であった．重力加速度の大きさを g として，以下の $\boxed{\text{(ア)}}$ ～ $\boxed{\text{(ケ)}}$ に適切な式を入れよ．

(1)　鉛直線とばねのなす角度を θ として，おもりについての運動方程式を考える．水平方向の運動方程式は $\boxed{\text{(ア)}}$ となる．鉛直方向は力がつり合うので，運動方程式は $\boxed{\text{(イ)}}$ となる．また，これらの結果から $\tan\theta\sin\theta = \boxed{\text{(ウ)}}$ となる．

(2)　つぎに，おもりの質量を少し変化させて Δm とし，角度 θ が変わらないようにおもりの速さ v を Δv だけ変化させたところ，ばねの伸びが $\Delta\ell$ だけ変化した．このときの運動方程式の式を考える．水平方向の運動方程式の式は $\boxed{\text{(エ)}}$ となり，鉛直方向の運動方程式は $\boxed{\text{(オ)}}$ となる．また，これらの結果から $\tan\theta\sin\theta = \boxed{\text{(カ)}}$ となる．

このとき，おもりの速さの変化量 Δv によって生じるばねの伸びの変化量 $\Delta\ell$ を知りたい．まず，θ が変化しないことから $\boxed{\text{(ウ)}}$ と $\boxed{\text{(カ)}}$ が等しくなる．この関係を用いて Δv と $\Delta\ell$ の関係を求める．v に比べて $(\Delta v)^2$ は十分小さいものとし，$(\Delta v)^2 \fallingdotseq 0$ として近似式を求めると，$\Delta\ell$ と Δv の関係は $\Delta\ell \fallingdotseq \boxed{\text{(キ)}} \times \Delta v$ となり，$\Delta\ell$ は，ℓ_0，ℓ，v および Δv で表すことができる．

(3)　おもりの質量の変化量 Δm に対して Δv を求めたい．まず，$\boxed{\text{(イ)}}$ と $\boxed{\text{(オ)}}$ から，$\Delta\ell$ を ℓ，m および Δm を用いて表すと，$\Delta\ell = \boxed{\text{(ク)}} \times \Delta m$ となる．以上の結果を用いて Δv と Δm の関係を求めると，$\Delta\ell = \boxed{\text{(ケ)}} \times \Delta m$ となり，ℓ_0，ℓ，m，v および Δm がわかれば，Δv を求めることができる．



《メモ》……………………………………………………………………………………………………

2009 年鳥取大より．物体とともに動く座標系で考える誘導を，地面固定座標系で考えるような誘導に変更した．

2 図 1 のように，質量 m の小球をつけた長さ 2ℓ の軽い糸の端を点 P に固定する．糸がたるまないように鉛直下方から角度 $\theta\,(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ になる点 A まで小球を持ち上げたのち静かにはなし，鉛直面内で小球を運動させる．小球が最下点 B を通る瞬間に，点 B から距離 ℓ だけ真上の点 O にある細い釘の位置を中心とする円運動に変わった．重力加速度の大きさを g とし，糸の伸び縮みおよび空気抵抗を無視して以下の問いに答えよ．

問 1　点 A で小球を静かにはなした瞬間における糸の張力の大きさを求めよ．

問 2　小球が点 B を通るときの速さ v_{B} を求めよ．

問 3　小球が点 B を通る直前での糸の張力の大きさを求めよ．

問 4　小球が点 B を通った直後での糸の張力の大きさを求めよ．

問 5　糸がたるむことなく小球が運動を続けるときの角度 θ の最大値を求めよ．

図 2 のように，糸の角度をある角度 $\theta'\,(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ にして小球を静かにはなす．小球が点 B を通ったのち，鉛直下方に対し糸の角度が $\pi - \alpha\,(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ である点 C を通過した瞬間から糸がたるみはじめた．

問 6　点 C における小球の速さ v_{C} を，α を含まない形で表せ．

問 7　小球が点 C から最高点へ達したのち，点 O にある細い釘に衝突するときの $\tan\alpha$ を求めよ．

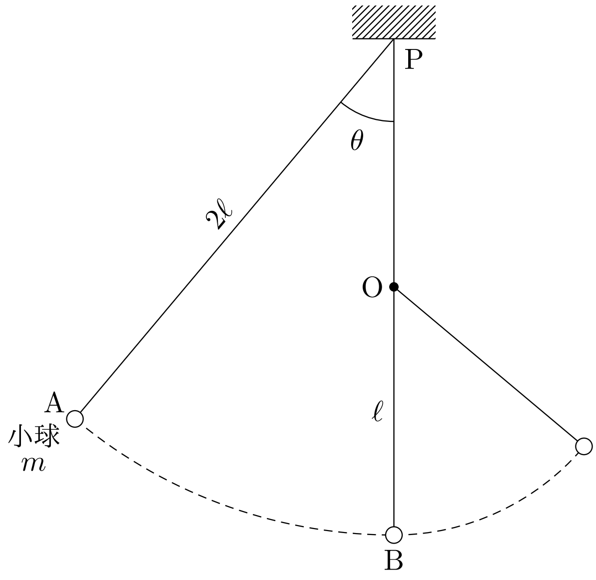


図 1

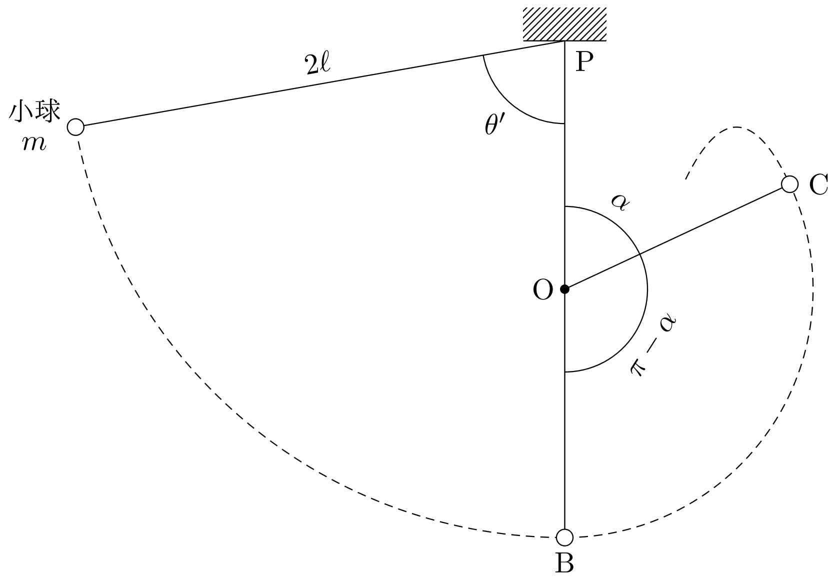


図 2

《メモ》

2023 年岡山大より．不要な文字指定をなくした．

3 図に示すように，鉛直面内に点 P を中心とする半径 r の半円弧 ABC と，点 Q を中心とする半径 r の半円弧 CDE からなる絶縁体でできたレールが固定されている．点 A，P，C，Q，E を結ぶ直線は水平面に対して垂直である．絶縁体でできた質量 M の物体 1 に，点 A で水平左向きに初速度を与えて運動させる．また，点 C には正の電荷 q をもつ質量 $m\,(< M)$ の帯電した物体 2 が置かれている．さらに，点 Q には電荷 $-q$ をもつ帯電した物体 3 が固定されている．重力加速度の大きさを g，静電気力に関するクーロンの法則の比例定数を k として，以下の問いに答えよ．なお，物体 1，物体 2，物体 3 の大きさや，レールの厚さ，レールと物体 1 や物体 2 との間の摩擦は無視できるものとする．

(1)　物体 1 がレールから離れることなく点 A から点 C に達するための，点 A で物体 1 に与える初速度の大きさの最小値を求めよ．

以下の問いについては，点 A で物体 1 に (1) の初速度を与える場合を考える．

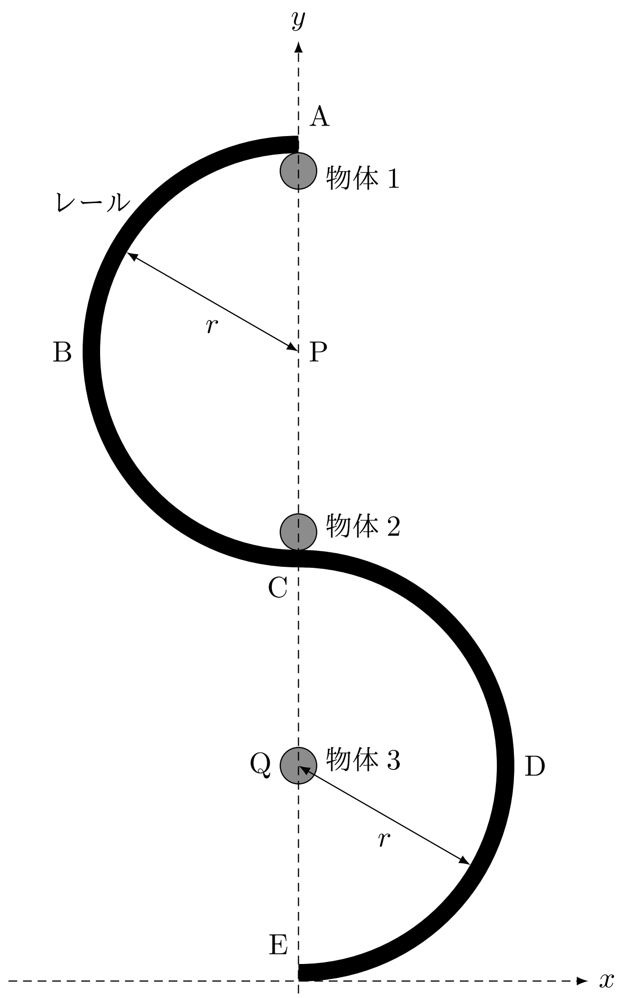
(2)　点 C で物体 1 が物体 2 と完全弾性衝突した．衝突直前の物体 1 の速さ，衝突直後の物体 1 および物体 2 の速さを求めよ．

(3)　物体 1 と物体 2 の衝突直後，物体 1 はレールと接触することなく落下していった．

(a)　水平方向の位置 x，M，m，r を用いて，衝突以降の物体 1 の鉛直方向の位置 y を求めよ．なお，点 E を $x-y$ 座標の原点とする．

(b)　衝突後，物体 1 をレールに接触させないようにするための物体 2 の質量に関する条件を示せ．

(4)　物体 1 と物体 2 の衝突後，物体 2 はレールから離れることなく点 E に達した．このときの電荷 q の最小値を求めよ．



《メモ》

2018 年東京海洋大より．

略解・ヒント

■略解

1

(1) ア：$m\dfrac{v^2}{(\ell_0+\ell)}\sin\theta = k\ell\sin\theta$

イ：$0 = k\ell\cos\theta - mg$　ウ：$\dfrac{v^2}{g(\ell_0+\ell)}$

エ：$m\dfrac{(v+\Delta v)^2}{(\ell_0+\ell+\Delta\ell)}\sin\theta = k(\ell+\Delta\ell)\sin\theta$

オ：$0 = k(\ell+\Delta\ell)\cos\theta - (m+\Delta m)g$

カ：$\dfrac{(v+\Delta v)^2}{g(\ell_0+\ell+\Delta\ell)}$

キ：$\dfrac{2(\ell+\ell_0)}{v}$　ク：$\dfrac{\ell}{m}$　ケ：$\dfrac{v\ell}{2m(\ell+\ell_0)}$

2

問 1 $mg\cos\theta$　問 2 $2\sqrt{g\ell(1-\cos\theta)}$

問 3 $mg(3-2\cos\theta)$　問 4 $mg(5-4\cos\theta)$

問 5 $\dfrac{\pi}{3}$　問 6 $\sqrt{g\ell\left(\dfrac{1}{2}-\cos\theta'\right)}$　問 7 $\sqrt{2}$

3

(1) $\sqrt{gr}$

(2) 物体 1 直前：$\sqrt{5gr}$,

物体 1 直後：$\dfrac{M-m}{M+m}\sqrt{5gr}$,

物体 2 直後：$\dfrac{2M}{M+m}\sqrt{5gr}$

(3) (a) $y = 2r - \dfrac{1}{10}\left\{\dfrac{M+m}{M-m}\right\}^2\dfrac{x^2}{r}$

(b) $m < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}M$

(4) $r\sqrt{\dfrac{5mg}{k}\left\{1+\left(\dfrac{2M}{M+m}\right)^2\right\}}$

■ヒント

・等速円運動の定石は以下の通り．

$$\begin{cases}\text{運動方程式の中心成分}\\ \text{つりあいの式}\end{cases}$$

・非等速円運動の定石は以下の通り．

$$\begin{cases}\text{運動方程式の中心成分} \quad \leftarrow \quad \text{拘束力の決定}\\ \text{力学的エネルギー保存則} \quad \leftarrow \quad \text{v の決定}\end{cases}$$

以下ヒントのない問題は全て上記の定石通り．

2

問 7　時間追跡で考える．水平左方向に $\ell \sin\theta$ 変位するのに要した時間と，鉛直下方向に $\ell \cos\theta$ 変位するのに要した時間が等しければ原点 O を通過する．軌跡の方程式が原点 O を通過するとしても同じ．

3

(2)　・衝突は，以下の 2 式を連立．

$$\begin{cases}\text{衝突の直前直後の運動量保存則}\\ \text{衝突の条件}\end{cases}$$

解答編

1 等速円運動，近似計算

(1)　運動方程式より，

$$\begin{cases} \underbrace{m\dfrac{v^2}{(\ell_0+\ell)}\sin\theta = k\ell\sin\theta}_{\text{(ア)}}\ , \\ \underbrace{0 = k\ell\cos\theta - mg}_{\text{(イ)}}\ , \end{cases} \qquad \therefore \tan\theta\sin\theta = \underbrace{\frac{v^2}{g(\ell_0+\ell)}}_{\text{(ウ)}}\ .$$

(2)　運動方程式より，

$$\begin{cases} \underbrace{m\dfrac{(v+\Delta v)^2}{(\ell_0+\ell+\Delta\ell)}\sin\theta = k(\ell+\Delta\ell)\sin\theta}_{\text{(エ)}}\ , \\ \underbrace{0 = k(\ell+\Delta\ell)\cos\theta - (m+\Delta m)g}_{\text{(オ)}}\ , \end{cases} \qquad \therefore \tan\theta\sin\theta = \underbrace{\frac{(v+\Delta v)^2}{g(\ell_0+\ell+\Delta\ell)}}_{\text{(カ)}}\ .$$

ここで，（ウ），（カ）より，

$$\frac{v^2}{g(\ell_0+\ell)} = \frac{(v+\Delta v)^2}{g(\ell_0+\ell+\Delta\ell)}$$

$$1+\frac{\Delta\ell}{\ell_0+\ell} = \left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)^2 \fallingdotseq 1+2\frac{\Delta v}{v}\,, \qquad \therefore \Delta\ell = \underbrace{\frac{2(\ell+\ell_0)}{v}}_{\text{(キ)}} \times \Delta v\,.$$

(3)　（イ），（オ）より，

$$\begin{cases} 0 = k\ell\cos\theta - mg\,, \\ 0 = k(\ell+\Delta\ell)\cos\theta - (m+\Delta m)g\,, \end{cases} \qquad \therefore \Delta\ell = \underbrace{\frac{\ell}{m}}_{\text{(ク)}} \times \Delta m\,.$$

よって，（キ），（ク）より，

$$\frac{2(\ell+\ell_0)}{v}\Delta v = \frac{\ell}{m}\Delta m\,, \qquad \therefore \Delta v = \underbrace{\frac{v\ell}{2m(\ell+\ell_0)}}_{\text{(ケ)}} \times \Delta m\,.$$

【参考】微分方程式を解いてみる（立てただけではもったいない気がするので）

問題文で得た微分方程式を解き，v の m 依存性を調べてみる[*1][*2].

$$\begin{cases} \dfrac{d\ell}{dv} = \dfrac{2(\ell+\ell_0)}{v}\,, \\ \dfrac{dv}{dm} = \dfrac{v\ell}{2m(\ell+\ell_0)}\,. \end{cases}$$

[*1] 文字は混乱を避けるために，始状態での質量，速さ，ばねの長さをそれぞれ m^*，v^*，ℓ^* とする.

[*2] 上記の微分方程式を解くより，以下の 2 つの組を解く方が計算量は少ない.

$$\begin{cases} \dfrac{d\ell}{dv} = \dfrac{2(\ell+\ell_0)}{v}\,, \\ \dfrac{d\ell}{dm} = \dfrac{\ell}{m}\,. \end{cases}$$

まず，上の式の変数を分離し，両辺を v で積分して，

$$\begin{aligned}\int_{\ell^*}^{\ell}\frac{1}{\ell+\ell_0}\,d\ell &= \int_{v^*}^{v}\frac{2}{v}\,dv\\ \log\left|\frac{\ell+\ell_0}{\ell^*+\ell_0}\right| &= \log\left(\frac{v}{v^*}\right)^2\\ \therefore \ell &= -\ell_0+(\ell^*+\ell_0)\left(\frac{v}{v^*}\right)^2 .\end{aligned}$$

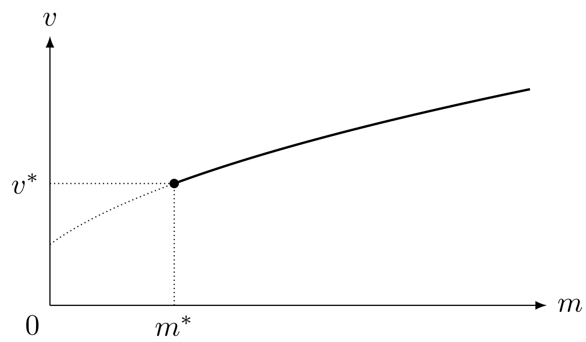
これを下の式に代入して，

$$\frac{dv}{dm}=\frac{v\ell}{2m(\ell+\ell_0)}=\frac{1}{2mv}\left(v^2-\frac{\ell_0}{\ell^*+\ell_0}{v^*}^2\right) .$$

ここで，$\alpha^2=\dfrac{\ell_0}{\ell^*+\ell_0}$ として，変数を分離し，両辺 m で積分して，

$$\begin{aligned}\int_{v^*}^{v}dv\left(\frac{1}{v-\alpha v^*}+\frac{1}{v+\alpha v^*}\right) &= \int_{m^*}^{m}\frac{dm}{m}\\ \log\left|\frac{v^2-(\alpha v^*)^2}{(1-\alpha^2){v^*}^2}\right| &= \log\left|\frac{m}{m^*}\right|\\ \therefore v &= v^*\sqrt{\frac{\ell^*}{\ell^*+\ell_0}\left(\frac{\ell_0}{\ell^*}+\frac{m}{m^*}\right)}.\end{aligned}$$

グラフは以下のようになる．



2　非等速円運動－糸，等加速度運動の時間追跡

問１　運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{0^2}{2\ell} = T - mg\cos\theta\,, \qquad \therefore T = mg\cos\theta\,.$$

問２　運動方程式（中心成分），および力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} m\dfrac{{v_\mathrm{B}}^2}{2\ell} = T - mg\cos 0\,, \\ \dfrac{1}{2}m{v_\mathrm{B}}^2 - 2mg\ell\cos 0 = \dfrac{1}{2}m\cdot 0^2 - 2mg\ell\cos\theta\,, \end{cases}$$
$$\therefore v = \sqrt{2g\ell(1-\cos\theta)}\,,\quad T = mg(3-2\cos\theta)\,.$$

問３　問２に示した．

問４　運動方程式（中心成分），および力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{\ell} = T - mg\cos 0\,, \\ \dfrac{1}{2}mv^2 - 2mg\ell\cos 0 = \dfrac{1}{2}m\cdot 0^2 - 2mg\ell\cos\theta\,, \end{cases}$$
$$\therefore v = \sqrt{2g\ell(1-\cos\theta)}\,,\quad T = mg(5-4\cos\theta)\,.$$

問５　小球が点 O の高さを超えなければよいので，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 - mg\ell = \frac{1}{2}m\cdot 0^2 - 2mg\ell\cos\theta$$
$$\therefore \frac{1}{2}mv^2 = mg\ell - 2mg\ell\cos\theta \leq 0$$
$$\cos\theta \geq \frac{1}{2}\,, \qquad \therefore \max\{\theta\} = \frac{\pi}{3}\,.$$

問６　C で糸が弛むことを考慮して，運動方程式（中心成分），および力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} m\dfrac{{v_\mathrm{C}}^2}{\ell} = 0 - mg\cos(\pi-\alpha)\,, \\ \dfrac{1}{2}m{v_\mathrm{C}}^2 - mg\ell\{\cos(\pi-\alpha)+1\} = \dfrac{1}{2}m\cdot 0^2 - 2mg\ell\cos\theta'\,, \end{cases}$$
$$\therefore \cos\theta' = \frac{1}{2} - \cos\alpha\,,\quad v_\mathrm{C} = \sqrt{g\ell\cos\alpha} = \sqrt{g\ell\left(\frac{1}{2}-\cos\theta'\right)}\,.$$

問７　糸が弛んだ瞬間の水平方向の速度成分は $v_\mathrm{C}\cos\alpha$，鉛直方向の速度成分は $v_\mathrm{C}\sin\alpha$ であり，水平左向きに $\ell\sin\alpha$ 変位する時間と鉛直下向きに $\ell\cos\theta$ 変位する時間が等しければ点 O を通過する．水平左向きに x 軸を，鉛直上向きに y 軸を定め，その原点を点 O とし，小球の位置を (x, y) とす

る．糸がたるんでからの小球の位置は，

$$\begin{cases} x = -\ell \sin\alpha + v_{\mathrm{C}} \cos\alpha t\,, \\ y = \ell \cos\alpha + v_{\mathrm{C}} \sin\alpha t - \dfrac{1}{2} g t^2\,. \end{cases}$$

$x = 0$，$y = 0$ を満たす時刻 t が等しいときを考えて[*3]，

$$\begin{aligned} 0 &= \ell \cos\alpha + v_{\mathrm{C}} \sin\alpha \frac{\ell}{v_{\mathrm{C}}} \tan\theta - \frac{1}{2} g \left(\frac{\ell}{v_{\mathrm{C}}} \tan\theta \right)^2 \\ 0 &= \cos\alpha + \sin\alpha \tan\alpha - \frac{\tan^2\alpha}{2\cos\alpha} \\ \therefore \tan\alpha &= \underset{\sim\sim}{\sqrt{2}}\,. \end{aligned}$$

[*3] x の式から $t = \dfrac{\ell}{v_{\mathrm{C}}} \tan\theta$ を求め，y の式へ代入した．

3 非等速円運動ー面，衝突

(1)　運動方程式（中心成分）より，

$$M\frac{V^2}{r} = N + Mg$$
$$N = M\frac{V^2}{r} - Mg > 0\,, \qquad \therefore V > \underset{\sim\sim}{\sqrt{gr}}\,.$$

(2)　運力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}M{V_0}^2 + Mg\cdot 0 = \frac{1}{2}M(\sqrt{gr})^2 + Mg\cdot 2r\,, \quad \therefore V_0 = \underset{\sim\sim}{\sqrt{5gr}}\,.$$

また，衝突の直前・直後の運動量保存則，および問題文の条件（弾性衝突）より，

$$\begin{cases} MV + mv = MV_0 + m\cdot 0\,, \\ V - v = -(V_0 - 0)\,, \end{cases} \qquad \therefore V = \underset{\sim\sim}{\frac{M-m}{M+m}\sqrt{5gr}}\,, \quad v = \underset{\sim\sim}{\frac{2M}{M+m}\sqrt{5gr}}\,.$$

(3) (a)　点 C でレールから離れることから，

$$\begin{cases} x = Vt\,, \\ y = 2r - \dfrac{1}{2}gt^2\,, \end{cases} \qquad \therefore y = \underset{\sim\sim}{2r - \frac{1}{10}\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\frac{x^2}{r}}\,.$$

(b)　運動方程式（中心成分）より，

$$M\frac{V^2}{r} = -N + Mg\,, \qquad \therefore N = -M\frac{V^2}{r} + Mg$$

よって，$N \leq 0$ を考えて[*4][*5]，

$$\frac{1}{2}M\left(\frac{M-m}{M+m}\sqrt{5gr}\right)^2 \geq Mg$$
$$4m^2 - 12Mm + 4M^2 \leq 0\,, \qquad \therefore \underset{\sim\sim}{m \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}M}\,.$$

[*4] 離れていないならば $N > 0$ ゆえ，$N \leq 0$ ならば離れている．等号成立については，有効数字のことを考えれば，本質的ではないことはわかってもらえるだろう．

[*5] $m > \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}M$ は，物体 1 が x 負の向きに運動してかつ（レールが下側に曲がっている円弧となっている場合に）レールから離れるような状況だが，レールは上側に円弧をとっているのでこの場合，物体 1 はレールから離れることはない．

(4)　物体 2 のある位置を R としたとき，$\angle \mathrm{CQR} = \theta$ とすると，運動方程式（中心成分），および力学的エネルギー保存則より[*6]，

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{r} = -N + mg\cos\theta + k\dfrac{q^2}{r^2}\,, \\ \dfrac{1}{2}mv^2 + mgr\cos\theta + k\dfrac{q(-q)}{r} = \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{2M}{M+m}\sqrt{5gr}\right)^2 + mgr + k\dfrac{q(-q)}{r}\,, \end{cases}$$

$$\therefore N = k\frac{q^2}{r^2} - 5mg\left\{\left(\frac{2M}{M+m}\right) - \frac{1}{5}(2 - 3\cos\theta)\right\}\,.$$

以上より，$\theta = \pi$ で N が最小値を取ることがわかり，このときの N の値が 0 より大きければ物体 2 はレールから離れない．よって，

$$k\frac{q^2}{r^2} - 5mg\left\{\left(\frac{2M}{M+m}\right) - \frac{1}{5}(2 - 3\cos\theta)\right\} > 0\,,$$

$$\therefore q > r\sqrt{\frac{5mg}{k}\left\{1 + \left(\frac{2M}{M+m}\right)^2\right\}}\,.$$

*6 速さの 2 乗は $v^2 = 5gr\left\{\left(\frac{2M}{M+m}\right)^2 + \frac{2}{5}(1 - \cos\theta)\right\}$ である．