I　非等速円運動，面積速度保存則

【メモ】

・問 1，問 2 が非等速円運動．それ以降は中心力を受ける物体の運動．

・ケプラー運動以外で面積速度保存則を使う場合，必ず問題文で指示される．

・時間追跡ができない物体の運動は保存則で考える他ない．中心力を受ける物体の場合は，以下の 2 式の保存則が成り立つ．

$$\begin{cases} \text{面積速度保存則} \\ \text{系の力学的エネルギー保存則} \end{cases}$$

【解答】

問 1　運動方程式より，

$$m\frac{{v_0}^2}{L\sin\theta} = T\sin\theta + N\cos\theta\,.$$

よって，向心力は，

$$F_r = T\sin\theta + N\cos\theta = m\frac{{v_0}^2}{L\sin\theta}\,.$$

問 2　運動方程式より，

$$\begin{cases} m\dfrac{{v_0}^2}{L\sin\theta} = T\sin\theta + N\cos\theta\,, \\ 0 = N\sin\theta - T\cos\theta - mg\,, \\ 0 = T - Mg\,, \end{cases}$$

$$\therefore T = Mg\,,\quad N = \frac{M\cos\theta + m}{\sin\theta}g\,,\quad v_0 = \sqrt{\left(\cos\theta + \frac{M}{m}\right)gL}\,.$$

問 3　エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + 0\,,\qquad \therefore v = v_0\,.$$

問 4　糸を切る前後の面積速度保存則・エネルギー保存則の結果より，

$$\begin{cases} UL = v_0L\,, \\ v_0 = \sqrt{{v_0}^2 + V^2}\,, \end{cases}\qquad \therefore U = v_0\,,\quad V = 0\,.$$

問 5　再び穴からの距離が L となったとき始状態と一致していることから，この運動をくり返す．よって，(エ)．

II 内部構造の見えるコンデンサ

【メモ】

・広がりを持つ電荷分布の作る電場はガウス則

$$ES = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

に従う．ここで，S は考える領域を囲う閉曲面の表面積，Q は領域内部の電荷である．特に，無限に広い一様に帯電した板の作る電場の大きさは，$E = \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}$ となる．

・誘電率 ε の誘電体内部の電場 $E_{\rm pol}$ は外部の電場 E に対して，比誘電率 $\varepsilon_{\rm r} = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ を用いて，

$$E_{\rm pol} = \frac{1}{\varepsilon_{\rm r}} E$$

となる．

・平行一様電場の強さ E と間隔 d にある 2 点間の電位差 $\Delta\phi$ は以下の関係を満たす．

$$\Delta\phi = Ed\,.$$

・コンデンサの性質：

- 平行平板コンデンサの容量 $C = \varepsilon \dfrac{S}{d}$ [*1]
- 静電エネルギー $U = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$
- 十分時間経過と言われたら $I = \pm\dfrac{dQ}{dt} = 0$ [*2]

・極板間引力の公式

$$F = \frac{1}{2} QE$$

は導出の過程が誘導されることも多いが，式の形は単に電荷 Q の帯電体が電場 $\dfrac{1}{2}E$ 中にあるときに受ける静電気力を考えているだけなので覚えてしまうのが良い[*3]．

[*1] 一般に，コンデンサの容量は，ガウス則と電場と電位の関係を組み合わせて用いることで得られる．

[*2] 符号は Q に対する I の定義に依る．

[*3] 覚えるというか，静電気力の公式を使っているだけだが....

【解答】

問 1　公式より，

$$C_0 = \underset{\sim\sim\sim}{\varepsilon_0 \frac{S}{d}}\,.$$

キルヒホッフ則より，

$$Q_0 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\varepsilon_0 \frac{S}{d} V_0}\,.$$

公式より，

$$U_0 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{\varepsilon_0 S {V_0}^2}{2d}}\,.$$

問 2　電荷保存則より電荷 Q は一定に保たれる．容量は公式から，

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d + \varDelta d}$$

に変化する．よって，公式より，

$$\varDelta U = \frac{1}{2}\frac{{Q_0}^2}{C} - \frac{1}{2}\frac{{Q_0}^2}{C_0} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{{Q_0}^2}{2\varepsilon_0 S}\varDelta d}\,.$$

問 3　極板間引力は公式より[*4]，

$$F = Q\frac{E}{2} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S} = \frac{\varepsilon_0 S {V_0}^2}{2d^2}\,.$$

よって，極板のつりあいより，

$$k\frac{d}{20} = \frac{\varepsilon_0 S {V_0}^2}{2d^2}\,, \qquad \therefore k = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{10\varepsilon_0 S {V_0}^2}{d^3}}\,.$$

[*4] 問 2 より，ばねの伸びを x とすると系のエネルギー収支は，

$$F_{\mathrm{ex}}\varDelta d = \frac{\varepsilon_0 S {V_0}^2}{2d^2}\varDelta d + kx\varDelta d$$

となり，第 1 項が極板間引力 F の寄与と解釈できる．ガウス則より，片方の極板の作る電場の強さは $E = \dfrac{Q_0}{2\varepsilon_0 S}$ であり，問 1 の Q_0 を用いれば，

$$F = Q_0 \frac{E}{2}$$

とまとめることができる．

問 4　容量は公式，電荷はキルヒホッフ則よりそれぞれ，

$$C = \varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0 \frac{S}{d/2}\,,\quad Q = \varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0 \frac{S}{d/2} V_0\,.$$

このとき，極板間の電場は電荷 Q が生む電場が油による誘電分極によって

$$E_{\mathrm{pol}} = \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}\frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

となり，極板間引力は，

$$F = Q\frac{E_{\mathrm{pol}}}{2} = \frac{2\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0 S {V_0}^2}{d^2}\,.$$

よって，極板のつりあいより，

$$\frac{10\varepsilon_0 S {V_0}^2}{d^3}\frac{11}{20}d = \frac{2\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0 S {V_0}^2}{d^2}\,,\qquad \therefore \varepsilon_{\mathrm{r}} = \frac{11}{4}\,.$$

問 5　電荷保存則より，電荷 Q は問 4 の値のままで一定．極板間電場は公式[*5]より，

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{11}{2}\frac{V_0}{d}$$

よって，電場と電位の関係より，

$$V = Ed = \frac{11}{2}V_0\,,\qquad \therefore \frac{V}{V_0} = \frac{11}{2}\,.$$

[*5] ガウス則より各極板の電場の強さを計算して，

$$E = E_{上側} + E_{下側} = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}\times 2\,.$$

III ドップラー効果

【メモ】

・音源が動く場合，聞く音波の波長が変化する．観測者が動く場合，聞く音波の音速が変化する．

・原理などを考えずに解くのであれば，ドップラー効果の公式として，

$$f=\frac{(\text{観測者の聞く音の音速})}{(\text{観測者の聞く音の波長})}=\frac{V\pm v_{\text{観測者}}}{(V\pm v_{\text{音源}})/f_0}=\frac{V\pm v_{\text{観測者}}}{V\pm v_{\text{音源}}}f_0$$

を覚え，どのような状況で音が高く聞こえるか，低く聞こえるかの知識を密輸入し，上式の符号を決めるのが手っ取り早い[*6]．音源が動くことにより変化した波長は分母を見ればよい．

【解答】

問 1　音源が速さ v_s で観測者に近づくとき，音源から出る音の観測者側では $(V-v_\mathrm{s})t$ の長さの間に f_0t 個の波が存在する．この波の波長 λ は，

$$\lambda=\frac{(V-v_\mathrm{s})t}{f_0t}=\frac{V-v_\mathrm{s}}{f_0}$$

である．したがって，この音波の振動数は波の基本式より，

$$f=\frac{V}{\lambda}=\frac{V}{V-v_\mathrm{s}}f_0\,.$$

問 2　公式より，

$$f_\mathrm{A}=\frac{V}{V+v_0}f_0\,,\quad f_\mathrm{B}=\frac{V}{V+v_0L/\sqrt{L^2+R^2}}f_0\,,\quad f_\mathrm{C}=f_0\,,$$

$$f_\mathrm{D}=\frac{V}{V-v_0L/\sqrt{L^2+R^2}}f_0\,,\quad f_\mathrm{E}=\frac{V}{V-v_0}f_0\,,\quad f_\mathrm{F}=f_0\,.$$

よって，f_max は E，f_min は A.

問 3　問 2 より，

$$\begin{cases} f_\mathrm{max}=\dfrac{V}{V-v_0}f_0\,,\\ f_\mathrm{min}=\dfrac{V}{V+v_0}f_0\,,\end{cases}\qquad \therefore v_0=\frac{f_\mathrm{max}-f_\mathrm{min}}{f_\mathrm{max}+f_\mathrm{min}}V\,,\quad f_0=2\frac{f_\mathrm{max}f_\mathrm{min}}{f_\mathrm{max}+f_\mathrm{min}}\,.$$

問 4　グラフより，

$$T=t_3-t_1\,.$$

[*6] もちろん，どのようなメカニズムでドップラー効果が生じるかを押さえ，観測する波長，観測する音速を計算し，波の基本式から観測する振動数を求める方が学習態度としては正しいとは思います．

また，円運動の周期を考えて，

$$v_0(t_3 - t_1) = 2\pi R, \qquad \therefore R = \frac{v_0(t_3 - t_1)}{2\pi}\,.$$

問 5　$\angle \mathrm{AOE} = \pi - 2\theta$ より，

$$v_0(t_3 - t_2) = R(\pi - 2\theta)\,, \qquad \therefore \theta = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}\right).$$

以上の結果より，

$$\begin{aligned} L &= \frac{R}{\sin\theta} \\ &= \frac{V(t_3 - t_1)}{2\pi\cos\left(\dfrac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}\pi\right)}\frac{f_{\mathrm{max}} - f_{\mathrm{min}}}{f_{\mathrm{max}} + f_{\mathrm{min}}}\,. \end{aligned}$$