I 非等速円運動，複数物体系（衝突），投射（等加速度運動の時間追跡）

【メモ】

・問 1，問 2，問 4(a)，問 5 は非等速円運動．非等速円運動は，以下 2 式を連立する．

$$\begin{cases} \text{運動方程式の中心成分} \\ \text{力学的エネルギー保存則} \end{cases}$$

・問 3 は衝突．衝突は，

$$\begin{cases} \text{外力のない方向の運動量保存則} \\ \text{問題文の条件} \end{cases}$$

を連立する．この問題で与えられた条件は弾性衝突である．

・問 4(b) は等加速度運動の時間追跡．加速度一定のときに成り立つ以下の公式を連立する．

$$\begin{cases} x = x(0) + v(0)t + \dfrac{1}{2}at^2\,, \\ v = v(0) + at\,. \end{cases}$$

・全体的に計算が大変．

【解答】

問 1　力学的エネルギー保存則より[*1]，

$$\frac{1}{2}m{v_1}^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + mga\,, \qquad \therefore v_1 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{{v_0}^2 + 2ga}}\,.$$

問 2　運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{{v_1}^2}{R} = N - mg\,, \qquad \therefore N = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{m\frac{{v_0}^2}{a} + 3mg}\,.$$

問 3　運動量保存則，1 次元の弾性衝突よりはね返り係数 1 の式を考えて，

$$\begin{cases} mv_2 + \dfrac{1}{2}mV_2 = mv_1\,, \\ v_2 - V_2 = -1\cdot(v_1 - 0)\,, \end{cases} \qquad \therefore V_2 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{4}{3}\sqrt{{v_0}^2 + 2ga}}\,,\quad v_2 = \frac{1}{3}\sqrt{{v_0}^2 + 2ga}\,.$$

[*1] 小球のエネルギー収支を考えても良い．このとき，小球のされる仕事は重力による寄与のみ（垂直抗力の寄与は 0）．重力は一定の大きさの力ゆえ，その仕事の値は力の大きさ，変位の大きさ，cos（なす角）の積で計算すればよく，

$$\mathit{\Delta}K = W = mg\sqrt{2}\,a\cos 45^\circ = mga\,, \qquad \therefore v_1 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{{v_0}^2 + 2ga}}\,.$$

問 4 (a)　小球 2 の位置，O，B を結ぶ 2 直線の間の角を θ とする．運動方程式の中心成分・力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}m\dfrac{v^2}{a} = N - \dfrac{1}{2}mg\cos\theta\,, \\ \dfrac{1}{4}mv^2 + \dfrac{1}{2}mga(a-\cos\theta) = \dfrac{1}{4}m{V_2}^2\,. \end{cases}$$

V_2 に問 3 の結果を代入，v を消去し，$\theta=\pi$ を代入すれば，

$$\begin{aligned} N &= \frac{8}{9}\frac{m{v_0}^2}{a} + \frac{7}{9}mg + \frac{3}{2}mg\cos(\pi) \\ &= \frac{8}{9}\frac{m{v_0}^2}{a} - \frac{13}{18}mg\,. \end{aligned}$$

これが正の値を取ればよいので，

$$\frac{8}{9}\frac{m{v_0}^2}{a} - \frac{13}{18}mg > 0\,, \qquad v_0 > \underline{\frac{\sqrt{13ga}}{4}}\,(=v_\mathrm{A})\,.$$

(b)　また，このとき v は力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{aligned} v^2 &= {V_2}^2 - 2ga(1-\cos(\pi)) \\ &= \frac{16}{9}{v_0}^2 - \frac{4}{9}ga \\ &= \frac{16}{9}\frac{13}{16}ga - \frac{4}{9}ga \\ \therefore v &= \sqrt{ga}\,. \end{aligned}$$

落下時の鉛直方向の加速度は g のため，落下に要する時間は鉛直方向の原点を水平面に取れば，

$$a = 2a - \frac{1}{2}gt^2\,, \qquad \therefore t = \sqrt{\frac{2a}{g}}\,.$$

よって，水平方向の原点を A に取れば，

$$d = -a + \sqrt{ga}\sqrt{\frac{2a}{g}} = \underline{\left(\sqrt{2}-1\right)a}\,.$$

問 5　問 3 同様に[*2]，

$$\begin{cases} mv_2 + mV_2 = mv_1\,, \\ v_2 - V_2 = -1\cdot(v_1 - 0)\,, \end{cases} \qquad \therefore V_2 = v_1\,,\quad v_2 = 0\,.$$

[*2] 質量が等しくかつ 1 次元の弾性衝突のときに限り速度が交換する．かなり特殊な条件下で成り立つことなので覚える必要はない．

運動方程式の中心成分・力学的エネルギー保存則より，

$$
\begin{cases}
m\dfrac{v^2}{a} = N - mg\cos\theta\,, \\
\dfrac{1}{2}mv^2 + mga(a-\cos\theta) = \dfrac{1}{2}m{v_1}^2\,.
\end{cases}
$$

ここに $N = 0$[*3]，$v_0 = \dfrac{\sqrt{13ga}}{4}$ を代入し v を消去すれば，

$$
\cos\theta = -\frac{13}{48}\,.
$$

よって，水平面からの高さは，

$$
(1-\cos\theta)a = \frac{61}{48}a\,.
$$

[*3] 面から離れる瞬間を考えているから．

II 電磁誘導 2 タイプどっちも

【メモ】

・問 1 は磁場が時間変化するのでファラデイ則一択となる．ファラデイ則では，ループ一周あたりの起電力が求まり，その値は

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

と計算され，起電力の正の向きは，磁束の正の向きに対して右ねじの方向を正と定める．

・問 2 以降は回路の一部が静磁場中を運動する電磁誘導のため，$vB\ell$ 公式によって誘導起電力を決定するのが基本となる．

【解答】

問 1 (a)　磁束密度の時間変化は

$$B(t) = \frac{t}{t_1}B_1$$

と書けるので，磁束の正の向きを鉛直上向きとして，誘導起電力の値はファラデイ則より，

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\left(\ell^2\frac{t}{t_1}B_1\right) = -\frac{B_1\ell^2}{t_1}\,.$$

キルヒホッフ則より，

$$\mathcal{E} - \ell rI = 0\,, \qquad I = -\frac{B_1\ell}{t_1 r}\,.$$

以上から，電流は e → f の向きに大きさ $\dfrac{B_1\ell}{t_1 r}$ で流れる．

(b)　導体棒のつりあいより[*4]，

$$0 = -IB_1\ell + mg\,, \qquad t_1 = \frac{{B_1}^2\ell^2}{rmg}\,.$$

問 2 (a)　キルヒホッフ則より，この瞬間回路に流れる電流は，

$$v_0B_2\ell - \ell rI = 0\,, \qquad I = \frac{v_0B_2}{r}\,.$$

導体棒，およびおもりの運動方程式から[*5]，

$$\begin{cases} m(-a) = T - mg\,, \\ 0\cdot a = T - IB_2\ell\,, \end{cases} \qquad \therefore a = g - \frac{{B_2}^2\ell v_0}{rm}\,.$$

[*4] おもりのつりあいから張力の大きさ T は $T = mg$ と求まる．

[*5] 糸の長さ一定より，導体棒の水平方向の変位（右向き正）とおもりの鉛直方向の変位（上向き正）の和は 0 である．これより，両物体の加速度の大きさは等しく，互いに異符号となる．

(b)　このときの速さを v とする．すると，I や a を $v_0 \to v$ とすればよく，v 一定より $a = 0$ を考えて，

$$v = \frac{rmg}{{B_2}^2\ell}\,.$$

問 3　i → j 間を流れる電流を i_1，f → d 間を流れる電流を i_2，ij の長さを x とする．キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} vB\ell_1 - rxi_1 - r\ell_1(i_1 + i_2) = 0\,, \\ vB\ell_2 + rxi_1 - r\ell_2 i_2 = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore\, i_1 = 0\,,\quad i_2 = \frac{vB}{r}\,.$$

問 4　i → j を流れる電流を i_1，f → d を流れる電流を i_2，i → h を流れる電流を i_3，f → c を流れる電流を i_4，ij の長さを x，hi の長さを y とする．キルヒホッフ則より問 3 の計算と同様にして，

$$\begin{cases} vB\ell_1 - rxi_1 - r\ell_1(i_1 + i_2) = 0\,, \\ vB\ell_2 + rxi_1 - r\ell_2 i_2 = 0\,, \\ vB\ell_1 - ryi_3 - r\ell_1(i_3 + i_4) = 0\,, \\ vB\ell_2 + ryi_3 - r\ell_2 i_4 = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore\, i_1 = i_3 = 0\,,\quad i_2 = i_4 = \frac{vB}{r}\,.$$

よって，キルヒホッフ第 1 法則から，

$$i_{\mathrm{ei}} = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = \frac{2vB}{r}\,,\quad i_{\mathrm{if}} = i_2 + i_4 = \frac{2vB}{r}\,,\quad i_{\mathrm{ij}} = i_1 = 0\,.$$

III 浮力絡みの熱力学

【メモ】

・問 1，問 3，問 4 は可動部分のつりあいを考える．このとき，どの部分のつりあいを考えるかを明確にするようにする[*6].

・浮力とまわりの流体から受ける圧力は同時に考えない．

・問 5 は基本操作[*7]に分類される．基本操作では，気体の状態決定は状態方程式

$$PV = nRT$$

を用い，P は可動部分のつりあい，V は図から，n が与えられたとき T が決定する方程式として扱うのが基本[*8].

また，熱力学第 1 法則は，

$$Q = \underbrace{\Delta U}_{\text{公式}} + \underbrace{W}_{P\,-\,V\ \text{図の面積}}$$

として熱量 Q を求めるための式として用いる（今回は問われていない）．

・問 6，問 7 は断熱過程である．ただし，内部気体にむらが生じていない記述はない[*9]．ゆっくりとした断熱操作では，ポアソンの公式[*10]

$$PV^{\gamma} = \text{const}$$

が成り立ち，ポアソンの公式によって圧力 P/体積 V が決定，状態方程式から温度 T が決まる．

また，$Q = 0$ より，熱力学第 1 法則は

$$W = -\Delta U$$

と内部エネルギーの公式から気体が外部にした仕事を逆算するための式となる．

[*6] 日頃の習慣として．

[*7] 断熱過程，気体にむらの生じる過程以外の過程．

[*8] もちろん T が与えられ n を求めたり，P や V を求める式として用いることもあるが，あくまで基本はこのような位置付けという認識を持ってほしい．

[*9] 「円筒がゆっくりと沈み続けるように」とあるが，この「ゆっくり」は「力のつりあいを保ちながら」と読むのが適当だろう．そのため，解答では気体にむらが生じないと仮定し議論をした（そうでないと，圧力や仕事などが定義されず，議論が複雑になるからである）．

[*10] 比熱比 γ は，$\gamma = \dfrac{C_\mathrm{p}}{C_\mathrm{v}}$ と定義される．単原子分子理想気体では $C_\mathrm{v} = \dfrac{3}{2}R$ ゆえ $\gamma = \dfrac{5}{3}$ である．

【解答】

問 1　液面のつりあいより，

$$0 = pS - (p_0 + \rho g d)S\,, \qquad \therefore p = p_0 + \rho g d\,.$$

問 2　大気：$p_0 S$　　内部気体：$p_0 S + \rho S d g$

問 3　容器のつりあいより，

$$0 = (p_0 S + \rho S d g) - p_0 S - Mg - F_{\text{ex}}\,, \qquad \therefore F_{\text{ex}} = \rho S d g - Mg\,.$$

問 4　容器のつりあいより[*11]，

$$0 = \rho \frac{1}{2} S d g - Mg\,, \qquad \therefore M = \frac{1}{2}\rho S d\,.$$

問 5　状態方程式より，

$$\begin{cases} (p_0 + \rho g d)Sd = nRT\,, \\ \left\{p_0 + \rho g \left(h + \dfrac{1}{2}d\right)\right\} \dfrac{1}{2}Sd = nRT\,, \end{cases} \qquad \therefore h = \frac{p_0}{\rho d} + \frac{3}{2}d\,.$$

問 6　ゆっくりと沈む操作の間，気体にむらが生じないものと考える[*12]．$Q = 0$，$W < 0$ より，熱力学第 1 法則から，

$$\Delta U = -W > 0\,.$$

一般に内部エネルギーは温度の増加関数ゆえ温度は上昇する．

また，ポアソンの公式，および状態方程式より，

$$T' = \left(\frac{V}{V'}\right)^{\gamma} T$$

であり，$V > V'$，$\gamma > 1$ より $T' > T$ を得る．

問 7　このとき，ポアソンの公式より比熱比を γ として，

$$\begin{aligned} \left\{p_0 + \rho g \left(h' + \frac{1}{2}d\right)\right\} \left(\frac{1}{2}Sd\right)^{\gamma} &= (p_0 + \rho g d)(Sd)^{\gamma} \\ p_0 + \rho g \left(h' + \frac{1}{2}d\right) &= 2^{\gamma}(p_0 + \rho g d) \\ \therefore h' &= (2^{\gamma} - 1)\frac{p_0}{\rho d} + \left(2^{\gamma} - \frac{1}{2}\right)d\,. \end{aligned}$$

一般に比熱比 γ は 1 よりも大きな値を取る[*13]ため，h' は h よりも大きい．

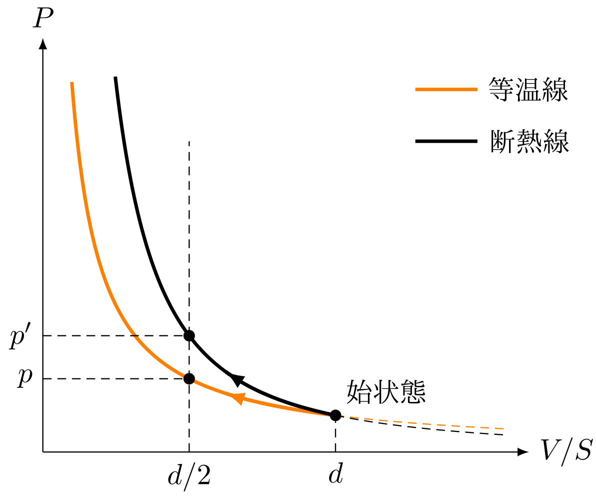
[*11] 浮力を考えたが，上下の水圧を計算しても良い．ただし，このとき浮力は考えてはいけない．

[*12] 準静的な断熱過程の繰り返しから成り，$p - V$ 図上に断熱曲線が定義できるような断熱過程を想定する．

[*13] 理想気体であれば $\gamma = 1 + \dfrac{R}{C_{\text{v}}}$．

【補足】問 7 をグラフを使って

　等温過程，断熱過程で始状態がともに等しいことから，等温線と断熱線の交点が始状態とわかり，断熱線の方が急勾配であることから，この過程での気体の状態変化は図のようになる．同一の体積下において体積を比較すれば，明らかに断熱過程の下での p の方が大きな値を取る．したがって，液面のつりあいを考えれば $h' > h$ が言える．



【参考】気体にむらが生じている場合の議論の例[*14]

ここでは，シリンダの運動は十分に早く，過程の間における液体の気体の間の熱の移動はないと仮定する．

液面のつりあい，および状態方程式より，

$$\left\{p_0+\rho g\left(h''+\frac{1}{2}d\right)\right\}\frac{1}{2}Sd=nRT''\,,\qquad \therefore nRT''=\frac{1}{2}p_0Sd+\frac{1}{2}\rho gSdh+\frac{1}{4}\rho gSd^2\,.$$

ここで，$nRT=p_0Sd+\rho gSd^2$ より，気体の定積モル比熱を C_v とすれば，

$$\begin{aligned}\Delta U_\mathrm{gas}&=nC_\mathrm{v}(T''-T)\\&=\frac{C_\mathrm{v}}{R}\left(-\frac{1}{2}p_0Sd+\frac{1}{2}\rho gSdh-\frac{3}{4}\rho gSd^2\right)\,.\end{aligned}$$

よって，気体，シリンダ（による重力場）からなる系のエネルギー収支は，系が外部からされた「仕事」を $W^*\,(>0)$ とすると[*15*16]，

$$\Delta U_\mathrm{gas}+\Delta U=W^*\,,\qquad \therefore h''=\frac{C_\mathrm{v}}{C_\mathrm{v}-R}\left(\frac{p_0}{\rho g}+\frac{3}{2}d+\frac{2W^*}{\rho Sgd}\frac{R}{C_\mathrm{v}}\right)>h\,.$$

---

*14 即席の議論です．不備があれば教えて下さい．

*15 気体が液面にする/される「仕事」については計算が難しい（気体にむらが生じている（当然液体にも流れが生じている）ため，気体の圧力が一意に定まらず定義による計算ができない）．これを仕事と呼んでいいのかどうかは解釈に依存するため，ここでは「仕事」と呼ぶことにする．気体がする「仕事」は，液面にする「仕事」W^*_lq とシリンダにする「仕事」W^*_cy の総和であり，「仕事」は通常の仕事と同様に体積が増加していれば正，体積が減少していれば負とすれば，この場合気体のした「仕事」は負とわかる．よって，気体のされた「仕事」W^*_gas は，$W^*_\mathrm{gas}=-(W^*_\mathrm{lq}+W^*_\mathrm{cy})>0$ である．

*16 シリンダが大気，内部気体，および外力の合力からされた仕事 W_ex は，その変位から明らかに正ゆえ，シリンダと内部気体からなる系のされた「仕事」$W^*\,(=W^*_\mathrm{gas}+W_\mathrm{ex})$ は正と考えてよいだろう．