I　複数物体系，単振動，非等速円運動

【メモ】

・問 1，問 4 は 1 物体系のエネルギー保存.

・問 2 は非等速円運動.

・問 3 は時刻 t が問われているため，単振動の時間追跡.

・問 5，問 6，問 7 は複数物体系の基本.

【解答】

問 1　力学的エネルギー保存則[*1]より，

$$\frac{1}{2}m{v_1}^2 = mgh\,, \qquad \therefore v_1 = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{2gh}}\,.$$

問 2　運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{{v_1}^2}{R} = N_1 - mg\,, \qquad \therefore N_1 = \underset{\sim\sim\sim}{\left(1 + 2\frac{h}{R}\right)mg}\,.$$

鉛直方向のつりあいより，

$$N_2 = \underset{\sim}{mg}\,.$$

問 3　単振動の $\frac{1}{4}$ 周期を計算すればよい．単振動の角振動数は $\sqrt{\frac{k}{m}}$ であるから，

$$t = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}}\,.$$

問 4　力学的エネルギー保存則[*2]より，

$$\frac{1}{2}k{x_1}^2 = \frac{1}{2}m{v_1}^2 = mgh\,, \qquad \therefore x_1 = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{2mgh}{k}}}\,.$$

問 5　ばねが最も縮むとき $v_2 = v_3$ を満たす．運動量保存則より，

$$mv_2 + mv_3 = m\sqrt{2gh}\,, \qquad v_2 = v_3 = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{gh}{2}}}\,.$$

[*1] 物体と重力場を合わせて 1 つの系と見る.

[*2] 物体とばねを合わせて 1 つの系と見る.

問 6　力学的エネルギー保存則[*3]より,

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2+\frac{1}{2}m{v_3}^2+\frac{1}{2}k{x_2}^2=mgh\,,\qquad x_2=\sqrt{\frac{mgh}{k}}\,.$$

問 7　力学的エネルギー保存則より[*4],

$$\begin{cases} mv_4+mv_5=m\sqrt{2gh}\,,\\ \dfrac{1}{2}m{v_4}^2+\dfrac{1}{2}m{v_5}^2+\dfrac{1}{2}k\cdot 0^2=mgh\,, \end{cases}\qquad v_4=0,\quad v_5=\sqrt{2gh}\,.$$

【補足】問 5,問 6,問 7 を時間追跡で解く

両物体共ばねに触れているときを考える.両物体の位置,速度をそれぞれ x_1,x_2,v_1,v_2,ばねの自然長を ℓ とする[*5].両物体の運動方程式は,

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_1}{dt}=-k\{\ell-(x_2-x_1)\}\,,\\ m\dfrac{dv_2}{dt}=+k\{\ell-(x_2-x_1)\}\,. \end{cases}$$

2 式の和と,2 式を質量で割った式の差を考えて,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(v_1+v_2)=0\,,\\ \dfrac{d^2}{dt^2}(x_1-x_2)=-\dfrac{2k}{m}(x_1-x_2+\ell)\,. \end{cases}$$

よって,第 1 式(運動量保存則),および第 2 式から,

$$x_1+x_2=x_1(0)+\{x_1(0)+\ell\}+\sqrt{2gh}\,t\,.$$

$$x_1-x_2=-\ell+\sqrt{\frac{mgh}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right).$$

以上 2 式より,

$$\begin{cases} x_1=x_1(0)+\sqrt{\dfrac{gh}{2}}\,t+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{mgh}{k}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{2m}{k}}\,t\right),\\ x_2=\ell+x_1(0)+\sqrt{\dfrac{gh}{2}}\,t-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{mgh}{k}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{2m}{k}}\,t\right),\\ v_1=\sqrt{\dfrac{gh}{2}}\left\{1+\cos\left(\sqrt{\dfrac{2m}{k}}\,t\right)\right\},\\ v_2=\sqrt{\dfrac{gh}{2}}\left\{1-\cos\left(\sqrt{\dfrac{2m}{k}}\,t\right)\right\}, \end{cases}$$

を得る.これらの式から相対速度 0,相対位置 ℓ の時刻を求め,各物理量に代入すればよい[*6].

[*3] 2 物体とばねを合わせて 1 つの系と見る.

[*4] そろそろくどいので補足にも書かないが,エネルギー保存則を因数分解して運動量保存則を代入することで弾性衝突と同値な式が出てくる(このように解くことで計算ミスのリスクも減らせる).

[*5] 気持ち悪いけど左向き正,x 軸の原点は適当.

[*6] これらを求めるのは各自.

II 電気回路（コンデンサの無限回操作）

【メモ】

・コンデンサの性質：

- 平行平板コンデンサの容量 $C = \varepsilon \dfrac{S}{d}$[*7]
- 静電エネルギー $U = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$
- 十分時間経過と言われたら $I = \pm \dfrac{dQ}{dt} = 0$[*8]

・電気回路の状態は，以下の 3 つにより一意に決まる．

$$\begin{cases} \text{キルヒホッフ則} \\ \text{電荷保存則} \\ \text{素子の性質} \end{cases}$$

・問 2 から問 5 まで使っている物理法則は全く同じなので，解法を見つけるという観点では難しさは違わない．解けなかったのなら，操作を丁寧に追うことができてないか，単に電気回路の解き方が身に付いていないかのどちらかである．

【解答】

問 1　公式より，

$$C_1 = \varepsilon_0 \underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{S}{H-h}}, \quad C_2 = \varepsilon_0 \underset{\sim\sim}{\frac{S}{h}}.$$

問 2　上側で形成されるコンデンサに蓄えられる電荷を Q_1，下側で形成されるコンデンサに蓄えられる電荷を Q_2 とする．キルヒホッフ則・電荷保存則より，

$$\begin{cases} V_\mathrm{a} - \dfrac{Q_1}{C_1} - \dfrac{Q_2}{C_2} = 0\,, \\ -Q_1 + Q_2 = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore \frac{Q_1}{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} V_\mathrm{a} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\left(1 - \frac{h}{H}\right) V_\mathrm{a}}.$$

問 3　電荷保存則より上側で形成されるコンデンサの電気量は一定．よって，キルヒホッフ則より，

$$V_1' = \frac{Q_1}{C_1} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\left(1 - \frac{h}{H}\right) V_\mathrm{a}}, \quad V_2' = \frac{Q_2}{C_2} = \underset{\sim}{V_\mathrm{b}}.$$

[*7] 一般に，コンデンサの容量は，ガウス則と電場と電位の関係を組み合わせて用いることで得られる．

[*8] 符号は Q に対する I の定義に依る．

問 4　電荷保存則・キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} V_{\mathrm{a}} - \dfrac{Q_1}{C_1} - \dfrac{Q_2}{C_2} = 0\,, \\ -Q_1 + Q_2 = -\dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} V_{\mathrm{a}} + C_2 V_{\mathrm{b}}\,, \end{cases}$$

$$\therefore V_1'' = \frac{Q_1}{C_1} = \underline{\left\{1 - \left(\frac{h}{H}\right)^2\right\} V_{\mathrm{a}} - \left(1 - \frac{h}{H}\right) V_{\mathrm{b}}}\,.$$

問 5　操作を無限回繰り返したとき，電荷の移動が起こらないため同一の電荷のまま異なる 2 つの回路状態が成り立つ[*9]．キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} \mathrm{S}_1\text{側}: V_{\mathrm{a}} - \dfrac{Q_1}{C_1} - \dfrac{Q_2}{C_2} = 0\,, \\ \mathrm{S}_2\text{側}: V_{\mathrm{b}} - \dfrac{Q_2}{C_2} = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore V_1^{\infty} = \frac{Q_1}{C_1} = \underline{V_{\mathrm{a}} - V_{\mathrm{b}}}\,.$$

【補足】問 5 を漸化式で解く

S_2 が OFF の状態で S_1 のみを ON にする操作を操作 1，その後 S_1 を OFF にし S_2 のみを ON にする操作を操作 2 と呼ぶ．n 回目の操作 1 終了後の上側のコンデンサの帯電量を x_n，下側のコンデンサの帯電量を y_n，n 回目の操作 2 終了後の下側のコンデンサの帯電量を z_n とする．このとき，各操作に対するキルヒホッフ則，および操作 1 における極板 E_2 の電荷保存則は，

$$\begin{cases} \text{操作 1}: V_{\mathrm{a}} - \dfrac{x_n}{C_1} - \dfrac{y_n}{C_2} = 0\,, \\ \text{操作 2}: V_{\mathrm{b}} - \dfrac{z_n}{C_2} = 0\,, \\ \text{極板 } \mathrm{E}_2: -x_n + y_n = -x_{n-1} + z_{n-1}\,. \end{cases}$$

この漸化式を x_n について整理すれば，

$$x_{n+1} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} x_n + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}(V_{\mathrm{a}} - V_{\mathrm{b}})$$

$$\therefore x_{n+1} - C_1(V_{\mathrm{a}} - V_{\mathrm{b}}) = \frac{C_1}{C_1 + C_2}\left\{x_n - C_1(V_{\mathrm{a}} - V_{\mathrm{b}})\right\}$$

となり[*10]，等比数列の漸化式を得る．よって，一般項は，

$$\frac{x_n}{C_1} = V_{\mathrm{a}} - V_{\mathrm{b}} + \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right)^n \left\{V_{\mathrm{a}} + \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right) V_{\mathrm{b}}\right\}$$

であり，$n \to \infty$ の極限の下では第 2 項が 0 に落ちるため先に示した解答と整合していることが確認できる．

[*9] スイッチを全て ON にするというわけではないので注意.

[*10] この漸化式の特性方程式を解いても良いし，

$$x_{n+1} - k = \frac{C_1}{C_1 + C_2}(x_n - k)$$

を考えて，$x_{n+1} = \cdots$ として元の漸化式と等しくなるような k を見つけても良い.

III 幾何光学

【メモ】

・幾何光学で用いる物理法則は屈折の法則のみ．あとは図形の考察を行う．図形の考察は，

- 角と角 → 平行線，または三角形の内角・外角
- 辺と辺 → 相似を利用
- 角と辺 → 三角比を利用*11

によって行う．

【解答】

問 1 平行線の同位角に注目して，

$$\begin{cases} k = \dfrac{h}{R}\,, \\ \sin i = \dfrac{h}{R}\,, \end{cases} \quad \therefore \underbrace{\sin i = k}_{ア}\,.$$

屈折の法則より，

$$\underbrace{\sin i = n \sin\theta}_{イ}\,.$$

B での入射角と反射角が等しいこと，△OAB，△OBC がそれぞれ二等辺三角形であることより，

$$\underbrace{r = 2\theta}_{ウ}\,.$$

屈折の法則より，

$$n \sin\theta = \sin t\,, \qquad \therefore \underbrace{t = i}_{エ}\,.$$

角 ϕ の頂点を E とする．△OAB，△OAE に注目して*12，

$$\begin{cases} i + \dfrac{\phi}{2} + \angle\mathrm{AOB} = \pi\,, \\ \theta + \dfrac{r}{2} + \angle\mathrm{AOB} = \pi\,, \end{cases} \quad \therefore \underbrace{\phi = 4\theta - 2i}_{オ}\,.$$

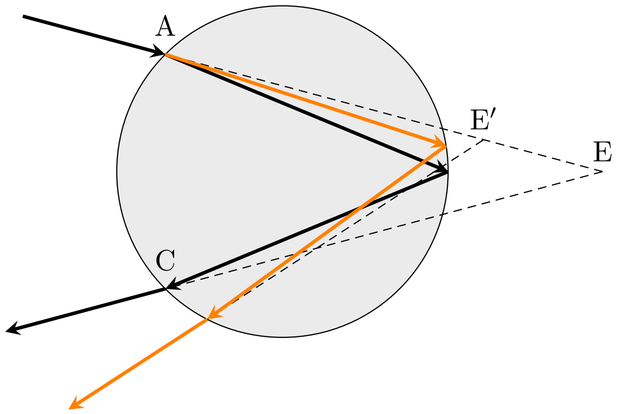
問 2 屈折の法則より，同じ i に対して，屈折率が小さくなると θ は大きくなる．よって，ϕ は大きくなる*13．入射後の光路は図のオレンジ色の線で示した．

---

*11 正弦定理，余弦定理に注意．

*12 四角形 OABC，四角形 OACE に注目しても同じ．今回は三角形を見るということに拘って解答を作りたかったので三角形とした．

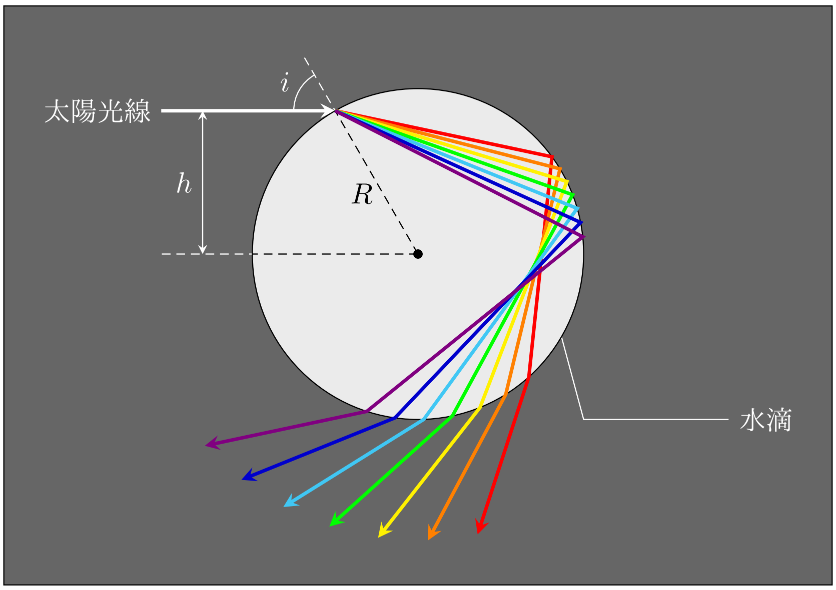
*13 図のように E の位置が E′ にずれる．図からも ∠AEC < ∠AE′C は明らか．



問 3　カ：大きく　　キ：赤色

【参考】様々な波長の光線を図示

問題に設定において，$k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$i=60^\circ$ の場合を図示した．この図からもわかるように，波長が短い（紫側）ほど見上げる角度 ϕ は小さくなり，波長が長い（赤側）ほど見上げる角度 ϕ は大きくなる[*14]．



[*14] 目に届く赤色の光を出している水滴は，目に届く紫色の光を出している水滴よりも高い位置にある．