I　剛体のつりあい

【メモ】

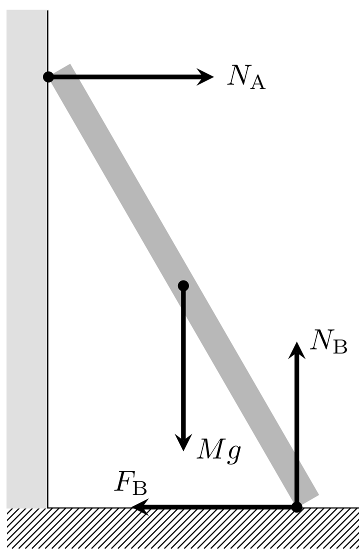
・剛体のつりあいは，

$$\begin{cases} \text{力のつりあい} \\ \text{力のモーメントのつりあい} \end{cases}$$

で処理する．

【解答】

問 1



問 2　棒のつりあいより，

$$\underbrace{\begin{cases} 0 = N_{\mathrm{A}} - F_{\mathrm{B}}\,, \\ 0 = N_{\mathrm{B}} - Mg\,. \end{cases}}_{\text{(a)}}$$

点 B まわりの力のモーメントのつりあいより，

$$\underbrace{0 = Mg\frac{\ell}{2}\cos\theta - N_{\mathrm{A}}\ell\sin\theta}_{\text{(b)}}\quad .$$

以上 2 式より，

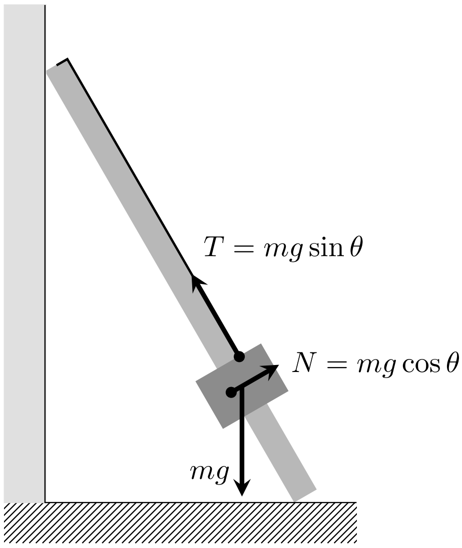
$$N_{\mathrm{A}} = F_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2\tan\theta}Mg\,,\quad N_{\mathrm{B}} = Mg\,.$$

よって，すべる瞬間を考えて，

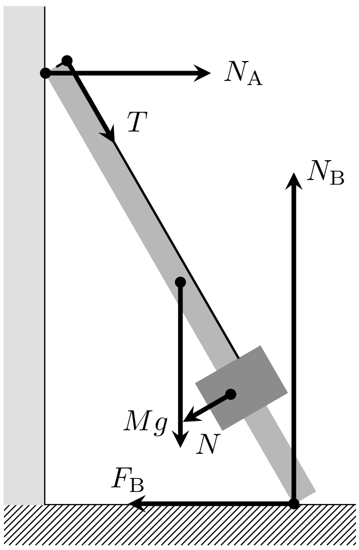
$$F_{\mathrm{B}} = \mu N_{\mathrm{B}}\,, \qquad \therefore \tan\theta_0 = \underbrace{\frac{1}{2\mu}}_{\text{(c)}}\ .$$

問 3　張力の大きさを T，垂直抗力の大きさを N とする．重力の大きさは公式より mg である．おもりの力のつりあい・力のモーメントのつりあいより（図を参照），

$$\begin{cases} 0 = N\sin\theta - T\cos\theta\,, \\ 0 = N\cos\theta + T\sin\theta - mg\,, \end{cases} \qquad \therefore T = mg\sin\theta\,,\quad N = mg\cos\theta\,.$$



問 4



問 5　おもり，棒の力のつりあい・力のモーメントのつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = N\sin\theta - T\cos\theta\,, \\ 0 = N\cos\theta + T\sin\theta - mg\,, \\ 0 = N_{\mathrm{A}} - N\sin\theta + T\cos\theta - F_{\mathrm{B}}\,, \\ 0 = N_{\mathrm{B}} - N\cos\theta - T\sin\theta - Mg\,, \\ 0 = Mg\dfrac{\ell}{2}\cos\theta - N_{\mathrm{A}}\ell\sin\theta + N(\ell - x)\,, \end{cases}$$

$$\therefore N_{\mathrm{B}} = (M+m)g\,,\quad N_{\mathrm{A}} = F_{\mathrm{B}} = \frac{g}{2\tan\theta}\left\{M + 2\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)m\right\}\,.$$

よって，すべる瞬間を考えて，

$$F_{\mathrm{B}} = \mu N_{\mathrm{B}}\,,\qquad \therefore \tan\theta_1 = \underline{\frac{M + 2(1 - x/\ell)m}{2\mu(M+m)}}\,.$$

問 6　問 2，問 5 より，

$$\tan\theta_1 < \tan\theta_0$$

$$\frac{M + 2(1 - x/\ell)m}{2\mu(M+m)} < \frac{1}{2\mu}\,,\qquad \therefore \underline{x > \frac{\ell}{2}}\,.$$

II 回路の一部が動く（$\boldsymbol{vB\ell}$ 公式を用いる）電磁誘導

【メモ】

・回路の一部が動く電磁誘導は，誘導起電力の決定では $vB\ell$ の公式が基本となる．

・電磁誘導の問題は，

① 誘導起電力の決定

② 回路の議論

③ 運動の議論

④ エネルギーの議論

のような作りが定石となっているが，この問題ではエネルギー収支は問われていない．

【解答】

問 1 向きはフレミング左手則より y 軸正方向．大きさは公式より，

$$f = evB\,.$$

問 2 ローレンツ力により電荷分布に偏りが生じ，y 軸正方向 に電場が生じる．つりあいより，

$$0 = evB - eE\,, \qquad \therefore E = vB\,.$$

問 3 導線 W_1 が接地されているため，

$$\phi_{\mathrm{P}_1} = 0 - Ef = -vBf\,.$$

問 4 キルヒホッフ則より，

$$V_0 - \frac{Q}{C} + vB\{a\sin(kx) + b\} = 0\,, \qquad \therefore \frac{Q}{C} = V_0 + vB\{a\sin(kx) + b\}\,.$$

題意より，コンデンサの電位差は振動中心 0 で振動するため，

$$V_0 = -vBb\,.$$

また，$x = vt$ より振動の周期 T は，

$$T = \frac{2\pi}{kv}\,.$$

問 5 キルヒホッフ則より，

$$I = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(CvBa\sin(kvt)\right) = -Cv^2Bak\cos(kvt)\,.$$

問 6　つりあいより，

$$0 = IBy + F_{\mathrm{ex}}\,, \qquad F_{\mathrm{ex}} = -IBy = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{Cv^2B^2ak\cos(kvt)\left\{a\sin(kvt)+b\right\}}\,.$$

III　固有振動，ドップラー効果

【メモ】

・弦は両端が固定端（節）の固有振動，管は一端もしくは両端が自由端（腹）の固有振動が生じる[*1].

・固有振動の問題は，図を描いて弦/管と波長の間に長さの関係を付ける.

【解答】

問 1　開口端補正が無視できるので，L の間に半波長が n 個含まれている．よって，

$$\frac{\lambda_n}{2}n = L\,, \qquad \therefore \lambda_n = \frac{2L}{n}\,.$$

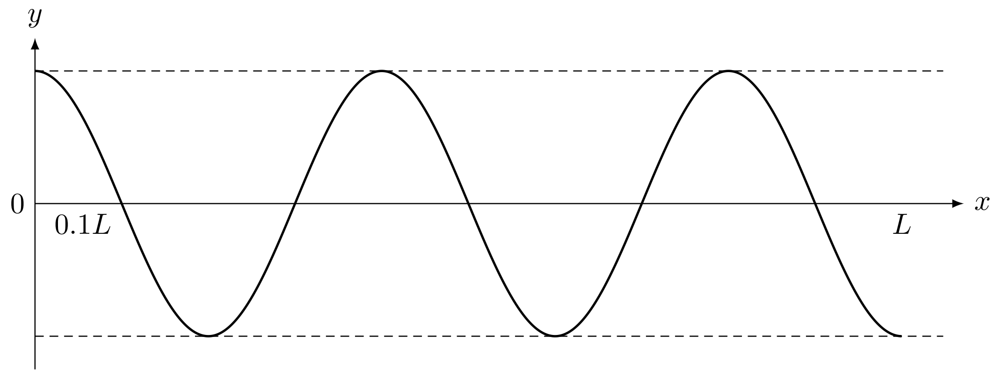
振動数は波の基本式より，

$$f_n = \frac{V}{\lambda_n} = \frac{V}{2L}n\,.$$

問 2 (a)　定常波の節が，密または疎となる．$0.1L$ のところまで密度の最大最小はなく，$0.1L$ の位置で初めて密度最大より，

$$\frac{\lambda}{4} = \frac{1}{10}L\,, \qquad \therefore \lambda = \frac{2}{5}L\,.$$

よって，5 回目の共鳴でかつ $\dfrac{\lambda}{4}$ 位置が密となるようなグラフをとなる（以下の図）.

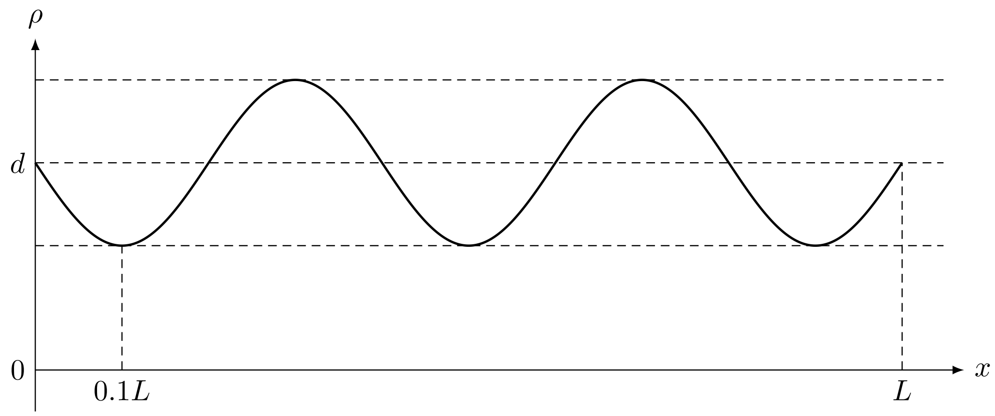


(b)　波の基本式より，

$$T = \frac{\lambda}{V} = \frac{2L}{5V}\,.$$

(c)　半周期後の密度は，

[*1] 管の腹は，管の端から少しずれた位置に生じる（開口端補正）.



問 3　n 回目の共鳴ゆえ，定常波の様子から，

$$\frac{\lambda_n}{2}n = L\,, \qquad \therefore \lambda_n = \frac{2L}{n}\,.$$

また，この波長が音源が近づいてくるときの波長と等しく，

$$\frac{2L}{n} = \frac{V-w}{f_0}\,, \qquad \therefore f_0 = \frac{V-w}{2L}n\,.$$

問 4　近づく場合と遠ざかる場合それぞれを考えて，

$$\begin{cases} 2L = \dfrac{V-w}{f}\,, \\ 2L = \dfrac{V+w}{f'}\,. \end{cases}$$

$f' - f = \delta$ より，

$$\delta = \frac{w}{L}\,, \qquad \therefore w = \delta L\,.$$

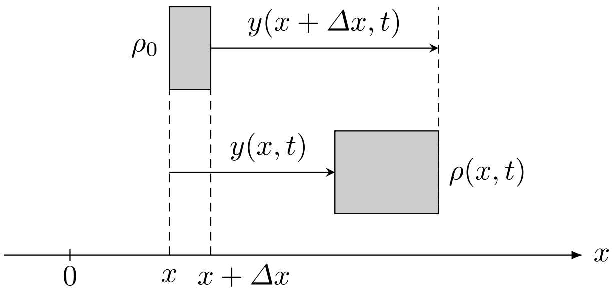
問 5　うなりの公式より，

$$\left|1000 - \frac{340}{2L}\right| = 10\,, \qquad \therefore L = 0.172\,\mathrm{m}\,,\ 0.168\,\mathrm{m}\,.$$

問 6　音速 V は大気の温度 T の増加関数である．そのため，温度を上げていくと一度うなりが消えたということから $15\,{}^\circ\mathrm{C}$ での b の振動数は $1000\,\mathrm{Hz}$ より小さいことがわかる．よって，

$$L = 0.172\,\mathrm{m}\,.$$

【補足 1】疎密波の変位と密度の関係



図のように，位置 x から $x+\Delta x$ の微小区間に静止していた気柱（断面積 S，密度 ρ_0）が時刻 t に振動した状況を考える．振動の変位は時刻 t，位置 x において $y(x,t)$ で与えられる．ここで，Δx が微小であることから，以下の近似が成り立つ[*2]．

$$y(x+\Delta x, t) - y(x,t) \fallingdotseq y(x,t) + \frac{dy}{dx}\Delta x - y(x,t) = \frac{dy}{dx}\Delta x\,.$$

今，変位前後の気柱の質量の流出入量の合計はこの気柱内部の密度を $\rho(x,t)$ とすると，

$$\rho(x,t)S\left[\{x+\Delta x + y(x+\Delta x, t)\} - \{x + y(x,t)\}\right] = \rho(x,t)S\Delta x\left(1+\frac{dy}{dx}\right)\,.$$

気柱の質量が前後で保存すると考えて，

$$\rho(x,t)S\Delta x\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = \rho_0 S\Delta x$$
$$\rho(x,t) = \rho_0\left(1+\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$$

通常，音波の変位，変位の勾配のオーダーは 1 に比べて十分に小さく，

$$\rho(x,t) \fallingdotseq \rho_0\left(1-\frac{dy}{dx}\right)$$

を得る．

【補足 2】上の結果を今回の問題で使って色々考えてみる

$x=0$ を管の左端，$x=L$ を管の右端とし，時刻 t における左端にある媒質の入射波の変位

$$y_0(0,t) = A\sin\left(2\pi f t + \theta\right)$$

を既知であるとする．

[*2] 本当は d ではなく，偏微分の記号 ∂ を使った方が良い．

位置 x における入射波の変位 $y_{\mathrm{in}}(x,t)$ は,

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{in}}(x,t) &= y_0\left(0, t-\frac{x}{V}\right) \\ &= A\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{x}{V}\right)+\theta\right\}. \end{aligned}$$

反射波は $x=L$ で自由端反射をすることから,

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{re}}(x,t) &= +y_0\left(0, t-\frac{2L-x}{V}\right) \\ &= A\sin\left\{2\pi f\left(t+\frac{x-2L}{V}\right)+\theta\right\}. \end{aligned}$$

よって,観測される合成波の変位は,

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_{\mathrm{in}}(x,t)+y_{\mathrm{re}}(x,t) \\ &= A\sin(\bullet)+A\sin(\bigstar) \\ &= A\left\{\sin\left(\frac{\bullet+\bigstar}{2}+\frac{\bullet-\bigstar}{2}\right)+\sin\left(\frac{\bullet+\bigstar}{2}-\frac{\bullet-\bigstar}{2}\right)\right\} \\ &= 2A\sin\left(\frac{\bullet+\bigstar}{2}\right)\cos\left(\frac{\bullet-\bigstar}{2}\right) \\ &= \underbrace{2A\cos\left\{2\pi f\left(\frac{L-x}{V}\right)\right\}}_{\text{位置 } x \text{ における振幅}}\underbrace{\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{L}{V}\right)+\theta\right\}}_{-1\sim+1 \text{ の振動}}. \end{aligned}$$

また,合成波の密度は,

$$\rho(x,t) = d\left[1-\frac{4\pi Af}{V}\sin\left\{2\pi f\left(\frac{L-x}{V}\right)\right\}\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{L}{V}\right)+\theta\right\}\right].$$

変位の式より振幅最大(腹)となる位置 x は m を整数として[*3],

$$\frac{2\pi}{\lambda}(L-x) = m\pi.$$

ここで,$x=L$ は $m=0$ に対応し,

$$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot 0 = 0\cdot\pi.$$

また,$x=0$ に対応する整数を $m=n$ と取れば,

$$\frac{2\pi}{\lambda}L = n\pi, \qquad \therefore L=\frac{\lambda}{2}n.$$

このとき,$0\leq x\leq L$ より整数 m の取り得る範囲として,

$$0\leq L-\frac{\lambda}{2}m\leq L, \qquad \therefore 0\leq m\leq n$$

[*3] 波の基本式より波長 λ を $\lambda=\dfrac{V}{f}$ とした.

であることがわかる．

さて，$x=0$ で

$$\frac{2\pi}{\lambda}L = n\pi$$

であり，$x=\dfrac{L}{10}$ まで密度が最小となることなく，$x=\dfrac{L}{10}$ で 1 回目に最大の値を取ることから[*4]，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(L-\frac{L}{10}\right)=n\pi-\frac{\pi}{2}$$

を満たす．よって，以上 2 式より，

$$\begin{cases} \dfrac{2\pi}{\lambda}L = n\pi\,, \\ \dfrac{2\pi}{\lambda}\left(L-\dfrac{L}{10}\right)=n\pi-\dfrac{\pi}{2}\,, \end{cases} \qquad \therefore L=\frac{5}{2}\lambda,\quad n=5\,.$$

この結果を用いれば密度の式は，

$$\rho(x,t)=d\left[1-\frac{4\pi A}{\lambda}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{L}{V}\right)+\theta\right\}\right]\,.$$

ここに $x=\dfrac{L}{10}$ で密度最大より，

$$\rho(x,t)=d\left[1-\frac{4\pi A}{\lambda}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{L}{V}\right)+\theta\right\}\right]$$

から，

$$\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{L}{V}\right)+\theta\right\}=-1\,.$$

よって，この時刻 t において変位を表す式は，

$$\begin{aligned} y(x,t)&=2A\cos\left\{2\pi\left(\frac{5\lambda/2-x}{\lambda}\right)\right\}\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{L}{V}\right)+\theta\right\} \\ &=2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right). \end{aligned}$$

また，時刻 $t+\dfrac{T}{2}$ において密度を表す式は[*5]，

$$\begin{aligned} \rho(x,t)&=d\left[1-\frac{4\pi A}{\lambda}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\sin\left\{2\pi f\left(t+\frac{T}{2}-\frac{L}{V}\right)+\theta\right\}\right] \\ &=d\left\{1-\frac{4\pi A}{\lambda}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right\}\,. \end{aligned}$$

[*4] $x=0$ では位相が $n\pi$ より，密度は最大の値ではない（真ん中の値）．そこから $x=\dfrac{L}{10}$ で最小となることなく 1 回目に最大となることから，位相は $n\pi$ から $\dfrac{\pi}{2}$ だけ小さくなっているときとわかる．

[*5] 時刻 t を含む因子は，

$$\sin\left\{2\pi f\left(t+\frac{T}{2}-\frac{L}{V}\right)+\theta\right\}=\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{L}{V}\right)+\theta\right\}\cos(\pi)=+1\,.$$