I 時間追跡（等加速度），衝突，漸化式

【メモ】

・漸化式が絡んでくる典型的な設定．物理として難しい箇所はない．

【解答】

問 1　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\cdot\frac{1}{2}R = mgR, \qquad \therefore v = \sqrt{gR}.$$

よって，

$$v_x = \frac{\sqrt{gR}}{2}, \quad v_y = \frac{\sqrt{3gR}}{2}.$$

問 2　鉛直上方向に y 軸を定め，その原点を地面に取る．衝突するまでの時刻 t における小球の位置 y，および速度 v_y はそれぞれ，

$$\begin{cases} y = \dfrac{R}{2} + \dfrac{\sqrt{3gR}}{2}t - \dfrac{1}{2}gt^2, \\ v_y = \dfrac{\sqrt{3gR}}{2} - gt. \end{cases}$$

$v_y = 0$ を満たす時刻は $t = \dfrac{\sqrt{3gR}}{2g}$ ゆえ[*1]，

$$y = \frac{R}{2} + \frac{\sqrt{3gR}}{2}\frac{\sqrt{3gR}}{2g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{\sqrt{3gR}}{2g}\right)^2 = \frac{7}{8}R.$$

問 3　$y = 0$ を解いて，

$$t = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

よって，

$$x = \frac{\sqrt{gR}}{2}\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}\sqrt{\frac{R}{g}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{4}R.$$

問 4　表記を簡単にするため衝突の度に時刻を 0 としそのように測った時刻を τ，また点 D の位置を x_0 と記す．1 回目の衝突後の小球の位置は，

$$\begin{cases} y_1 = e\dfrac{\sqrt{7gR}}{2}\tau - \dfrac{1}{2}g\tau^2, \\ x_1 = \dfrac{\sqrt{gR}}{2}\tau + x_0. \end{cases}$$

[*1] 力学的エネルギー保存則に $v_y = 0$ を代入しても求まる．

$y_1 = 0$ を満たす時刻は $\tau = e\sqrt{\dfrac{7R}{g}}$ ゆえ,

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{e\sqrt{7}}{2}}R\,.$$

問 5　n 回目の衝突後の小球の位置は,

$$\begin{cases} y_n = e^n\dfrac{\sqrt{7gR}}{2}\tau - \dfrac{1}{2}g\tau^2\,, \\ x_n = \dfrac{\sqrt{gR}}{2}\tau + x_{n-1}\,. \end{cases}$$

$y_n = 0$ を満たす時刻は $\tau = e^n\sqrt{\dfrac{7R}{g}}$ ゆえ,

$$\Delta x_n = x_n - x_{n-1} = e^n\frac{\sqrt{7}}{2}R\,.$$

よって，衝突の水平方向の距離間隔は公比 e の等比数列とわかる[*2].

問 6　問 5 より，$n+1$ 回目に地面と衝突する位置 $x = x_n$ は,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = x_n - x_0 &= (e + \cdots + e^n)\frac{\sqrt{7}}{2}R \\ &= \frac{e(1-e^n)}{1-e}\frac{\sqrt{7}}{2}R \\ \therefore x_n &= x_0 + \frac{e(1-e^n)}{1-e}\frac{\sqrt{7}}{2}R\,. \end{aligned}$$

$n \to \infty$ で $e^n \to 0$ より,

$$\lim_{n\to\infty}\{x_n - x_0\} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{e}{1-e}\frac{\sqrt{7}}{2}}R\,.$$

[*2] 漸化式を見れば,

$$\frac{\Delta x_n}{\Delta x_{n-1}} = e\,.$$

II　中身の見えるコンデンサ，熱力学の基本処理

【メモ】

・問 2 のジュール熱の計算は，I が一定でないことからエネルギー収支から逆算する他ない．

・問 4 以降では，熱力学の基本処理に従う．すなわち，圧力 p を可動部分のつりあい，体積 V を図から，温度 T を状態方程式により決定する．

【解答】

問 1　C は公式より，

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}\,.$$

Q はキルヒホッフ則より，

$$E - r \cdot 0 - \frac{Q}{C} = 0\,, \qquad \therefore Q = \varepsilon_0 \frac{S}{d} E$$

U は公式より，

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{\varepsilon_0 S E^2}{2d}\,.$$

問 2　系のエネルギー収支より，

$$\mathit{\Delta} U + J = W = \mathit{\Delta} Q E\,, \qquad \therefore J = \frac{\varepsilon_0 S E^2}{2d}\,.$$

問 3　スイッチが切られているのでコンデンサの電荷 Q は一定に保たれている．系のエネルギー収支より，

$$F_{\mathrm{ex}} \mathit{\Delta} d = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}(d + \mathit{\Delta} d) - \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} d\,, \qquad \therefore F_{\mathrm{ex}} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\,,$$

$$\therefore F = F_{\mathrm{ex}} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\,.$$

問 4　極板間隔が $\frac{4}{5}d$ のときコンデンサに蓄えられる電荷 Q はキルヒホッフ則より，

$$Q = \frac{5\varepsilon_0 S E}{4d}\,.$$

内部気体の圧力は，極板のつりあいより，

$$\begin{aligned}0 &= pS - F - p_0 S\\ p &= p_0 + \frac{F}{S}\\ &= p_0 + \frac{(5\varepsilon_0 SE/4d)^2}{2\varepsilon_0 S}\frac{1}{S}\\ &= p_0 + \frac{25}{32}\frac{\varepsilon_0 E^2}{d^2}\,.\end{aligned}$$

状態方程式より，

$$\begin{cases} p_0 Sd = nRT\,, \\ \left(p_0 + \dfrac{25}{32}\dfrac{\varepsilon_0 E^2}{d^2}\right)\dfrac{4}{5}Sd = nRT\,, \end{cases} \qquad \therefore E = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{2d}{5}\sqrt{\frac{2p_0}{\varepsilon_0}}}\,.$$

問 5　極板間隔が d のときを考えて，状態方程式より，

$$\begin{cases} p_0 Sd = nRT_0\,, \\ \left(p_0 + \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2d^2}\right)Sd = nRT\,, \end{cases} \qquad \therefore \frac{T}{T_0} = \frac{p_0 + \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2d^2}}{p_0} = 1 + \frac{\varepsilon_0 \dfrac{4d^2}{25}\dfrac{2p_0}{\varepsilon_0}}{2p_0 d^2} = \underset{\sim\sim}{\frac{29}{25}}\,.$$

III　光電効果

【メモ】

・光電効果の典型的な問題.

【解答】

問 1　光電効果.

問 2　可視光線[*3].

問 3　電子のエネルギー収支より，

$$T_{\mathrm{m}} = \underset{\sim\sim\sim\sim}{h\nu - W}\,.$$

問 4　力学的エネルギー保存則より，

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{T_{\mathrm{m}} + (-e)V_{\mathrm{s}} = 0}\,.$$

問 5　グラフの傾きを読んで，

$$\begin{aligned}
\frac{h}{e} &= \frac{1.4 - 0.2\,\mathrm{J/C}}{(8.1 - 5.2)\times 10^{14}\,/\mathrm{s}} \\
\therefore h &= \frac{1.2\,\mathrm{J/C}}{2.9 \times 10^{14}\,/\mathrm{s}} \cdot 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \\
&= 6.62... \times 10^{-34}\mathrm{J \cdot s} \\
&\fallingdotseq \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{6.6 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}}\,.
\end{aligned}$$

問 6　光子の持つエネルギーが仕事関数の値より小さくなるため.

*3 （振動数の桁から可視光ということくらい予想が付くと思うけど）分からなければ，与えられた数値から波長に換算してみればよい.