I　時間追跡（等加速度，単振動），衝突

【メモ】

・エネルギーを論じるときはどこまでを 1 つの系と見るかが重要[*1].

・等加速度運動と単振動は，時間追跡，エネルギーどちらでも考えられるが，時刻が問われていないときはエネルギーで考えた方が楽なことが多い.

・衝突は運動量保存則と問題文で与えられた条件を連立する.

【解答】

問 1　つりあいより，

$$0 = kx_0 - Mg\,, \qquad \therefore x_0 = \frac{Mg}{k}\,.$$

問 2　周期は公式より $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}$ である．振幅は力学的エネルギー保存則より[*2][*3]，

$$\frac{1}{2}k(x_0 + A)^2 + Mg(-x_0 - A) = \frac{1}{2}M{V_0}^2 + \frac{1}{2}k{x_0}^2 + Mg(-x_0)\,, \qquad \therefore A = V_0\sqrt{\frac{M}{k}}\,.$$

問 3　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = mgh\,, \qquad \therefore v_0 = \sqrt{2gh}\,.$$

問 4　衝突方向の運動量保存則[*4]・はね返り係数の式より，

$$\begin{cases} mv_1 + MV_1' = m(-v_0)\,, \\ v_1 - V_1' = -e(-v_0 - 0)\,, \end{cases} \qquad v_1 = \frac{eM - m}{M + m}\sqrt{2gh}\,, \quad V_1 = |V_1'| = \frac{(1+e)m}{M + m}\sqrt{2gh}\,.$$

問 5　単振動の半周期は，

$$t = \pi\sqrt{\frac{M}{k}}\,.$$

[*1] エネルギーに限らないことだが，エネルギーに関しては雑になる人が多い印象があるので.

[*2] 物体，ばね，重力場を 1 つの系と見る.

[*3] （お手軽な方法/試験場ならこれがいい）: 円運動の正射影と見なせることから，

$$V_0 = A\omega = A\sqrt{\frac{k}{M}}\,, \qquad \therefore A = V_0\sqrt{\frac{M}{k}}\,.$$

[*4] 重力は外力だが，衝突の直前直後で見たとき，撃力に比べて重力から受ける力積は十分に小さく無視できる.

放物運動の折り返して元の位置に戻るまでの時間は，

$$t=\frac{2V_1}{g}=\frac{2(eM-m)}{M+m}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

よって，

$$e=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{m}{M}+\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{m}{M}\right)\sqrt{\frac{Mg}{2kh}}}\,.$$

問 6 (a)　落下に要する時間が板の単振動の $\dfrac{1}{4}$ 周期ゆえ，

$$H=\frac{1}{2}g\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{k}}\right)^2=\underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{\pi^2}{8}\frac{Mg}{k}}\,.$$

(b)　両方の速さが等しいので，

$$\sqrt{2gH}=X\sqrt{\frac{k}{M}}\,,\qquad \therefore X=\sqrt{\frac{2MgH}{k}}=\underset{\sim\sim}{\frac{4}{\pi}H}\,.$$

(c)　両物体は原点で衝突を繰り返す[*5]．したがって，1 回目の衝突までの $\dfrac{1}{4}$ 周期と以降の $n-1$ 回の $\dfrac{1}{2}$ 周期を計算すればよく，

$$t_n=\frac{T}{4}+(n-1)\frac{T}{2}=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{2n-1}{2}\pi\sqrt{\frac{M}{k}}}\,.$$

[*5] そのように H と X の間に関係を付けている．はね返り係数 1 で質量が等しいことから，衝突後，速さは等しく逆向きに運動する．小球が再び原点に戻ってくるのに要する時間は

$$2\sqrt{\frac{2H}{g}}=\pi\sqrt{\frac{M}{k}}=\frac{T}{2}$$

であり，原点で衝突することが確認できる．

II　磁石が動く電磁誘導

【メモ】

・磁石が動くことでループを貫く磁束が時間変化し回路に誘導起電力が生じる（ファラデイ則）．

【解答】

問 1　磁束の定義より，面積を計算して，

$$\varPhi_{\mathrm{M}} = B\left\{\frac{1}{2}(10a)^2\frac{\pi}{10} - \frac{1}{2}(8a)^2\frac{\pi}{10}\right\} = \frac{9}{5}\pi Ba^2\,.$$

t_0 は，回転に要する時間から，

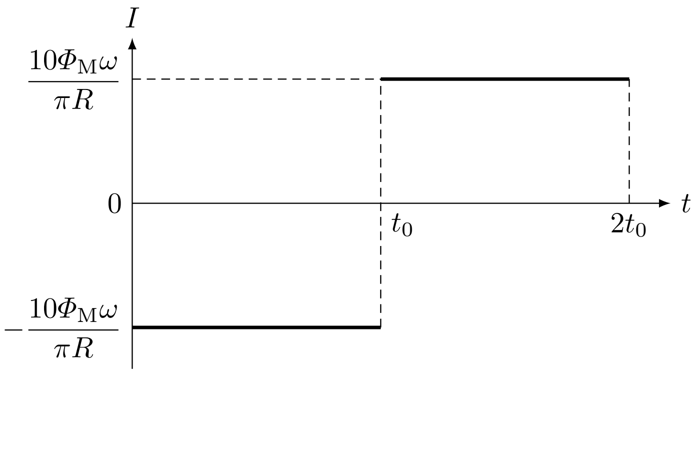
$$\omega t_0 = \frac{\pi}{10}\,, \qquad \therefore t_0 = \frac{\pi}{10\omega}\,.$$

問 2　回路 1 周に生じる誘導起電力はファラデイ則より，

$$\mathcal{E} = -\frac{d\varPhi}{dt} = \begin{cases} -\dfrac{\varPhi_{\mathrm{M}}}{t_0} & (0 < t < t_0)\,, \\ \dfrac{\varPhi_{\mathrm{M}}}{t_0} & (t_0 < t < 2t_0)\,. \end{cases}$$

よって，キルヒホッフ則より（グラフは以下の図）[*6]，

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \begin{cases} -\dfrac{10\varPhi_{\mathrm{M}}\omega}{\pi R} & (0 < t < t_0)\,, \\ \dfrac{10\varPhi_{\mathrm{M}}\omega}{\pi R} & (t_0 < t < 2t_0)\,. \end{cases}$$



問 3　公式より，

$$F_1 = \frac{10\varPhi_{\mathrm{M}}Ba\omega}{\pi R}\,, \quad F_2 = \frac{20\varPhi_{\mathrm{M}}Ba\omega}{\pi R}\,.$$

[*6] $\varPhi_{\mathrm{M}}$ の値を代入しても文字指定を満たす．

問 4　力のモーメントの定義より[*7]，

$$N = \underset{\sim\sim\sim}{18F_1 a} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{648B^2a^3}{R}\omega}\,.$$

問 5　磁石と同じ回転方向に，角速度 ω で等角速度運動を行う．（26 字）

【補足 1】磁石が固定され円板が運動する場合

この場合，静磁場中を回路の一部が運動するとき $vB\ell$ 公式が基本となる．円板の中心を原点に中心から外側に向かい x 軸を定める．磁場を横切る導線部分に生じる起電力は，

$$\begin{aligned} V &= \int_{8a}^{10a} xB\omega\,dx \\ &= \frac{1}{2}(10a)^2B\omega - \frac{1}{2}(8a)^2B\omega \\ &= 18Ba^2\omega\,. \end{aligned}$$

問題の設定とは異なる設定だが，相対運動として見たとき，直感と整合した結果が得られる．

【補足 2】エネルギー収支

回路のエネルギー収支は磁場のかかる部分の 2 つのループを考えて，

$$\begin{cases} \mathcal{E}I - RI^2 = 0\,, \\ \mathcal{E}I - RI^2 = 0\,. \end{cases}$$

磁石（運動エネルギー K で一定）と円板（運動エネルギー K'）のエネルギー収支は，

$$\begin{cases} \dfrac{dK}{dt} = F_{\mathrm{ex}}\cdot 9a\omega - 2IB(2a)\cdot 9a\omega\,, \\ \dfrac{dK'}{dt} = 2IB(2a)\cdot 9a\omega'\,. \end{cases}$$

ここで，円板の角速度が ω' のとき誘導起電力は

$$\mathcal{E} = \mp 18Ba^2(\omega - \omega')$$

である．この結果を利用すれば，全体のエネルギー収支は[*8]，

$$\frac{dK'}{dt} + 2RI^2 = F_{\mathrm{ex}}\cdot 9a\omega$$

となり，磁石を回している外力のする仕事が，磁場を介して，円板の運動エネルギーと回路で生じるジュール熱に変換されていることが確認できる．

[*7] F_1，F_2 の値を代入しても文字指定を満たす．

[*8] $\dfrac{dK}{dt} = 0$ を利用した．

【補足 3】問 5 を定量的に（高校範囲外）

円板の「回転のしにくさ」[*9]を M，円板の角速度を ω' とする．このとき，回転の運動方程式[*10][*11]より，

$$M\frac{d\omega'}{dt}=-\frac{648B^2a^3}{R}(\omega'-\omega)\,,\qquad \therefore\frac{d\omega'}{dt}=-\frac{648B^2a^3}{MR}(\omega'-\omega)\,.$$

初期条件 $\omega'(0)=0$ より，

$$\omega'(t)=\omega\left(1-e^{-\frac{648B^2a^3}{MR}t}\right)$$

を得る．よって，円板の角速度はすぐに ω へ収束することがわかる．

[*9] 慣性モーメントと呼ぶ．質量 m，半径 a の円板を，円板の中心を垂直に貫く軸まわりの慣性モーメントは $\dfrac{1}{2}ma^2$ である．

[*10] 回転の運動方程式は，

$$M\frac{d^2\theta}{dt^2}=N$$

と書ける θ に対する（2 回常）微分方程式である．ここで，M を慣性モーメント，$\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ を角加速度，N を力のモーメントと呼ぶ．

[*11] **【補足 2】**のエネルギー収支の式に $K'=\dfrac{1}{2}M\omega'^2$ を代入しても得られる．

III　原子核，熱力学の基本操作

【メモ】

・問 1 から問 3 までが原子（原子核の範囲），問 4 のみが熱力学の問題．

・数値計算は選択肢から選ぶもので，特に問 2 は桁数のみを合わせればよいので，解答のようにそこそこ丁寧にやらないである程度ざっくりでよい．

【解答】

問 1　γ 線[*12]．

問 2　ウランの質量欠損を $\varDelta M$ は，

$$\frac{\varDelta M \times 1.7 \times 10^{-17}\,\mathrm{kg} \times (3.0 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s})^2}{1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{eV}} = 200 \times 10^{6}\,\mathrm{eV}\,, \qquad \therefore \varDelta M = \frac{1.6 \times 2}{1.7 \times 9}\,\mathrm{u}\,.$$

よって，

$$\frac{\varDelta M}{235} \times 100 = 0.089... \fallingdotseq 0.1\,\%\,.$$

問 3 (a)　Cs：陽子 55 個，中性子 76 個　　Xe：陽子 54 個，中性子 77 個

(b)　^{1}31Ba の半減期より，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{23}{11.50}} \times 100 = 25\,\%\,.$$

(c)　計算する量は，

$$\frac{n_{\mathrm{Xe}}}{n_{\mathrm{Cs}}} = \frac{n_{\mathrm{Cs}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{23}{9.689}} n_{\mathrm{Cs}}}{n_{\mathrm{Cs}}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{23}{9.689}}$$

である．ここで[*13]，

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2} < 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{23}{9.689}} < 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2.5} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$0.75 < 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{23}{9.689}} < 0.82...$$

より，

$$\frac{n_{\mathrm{Xe}}}{n_{\mathrm{Cs}}} \times 100 \fallingdotseq 80\,\%\,.$$

[*12] 各放射線の正体は，α 線はヘリウム原子核（α 粒子），β 線は電子，γ 線は電磁波（光）である．

[*13] 上を 3 乗で押さえると 87.5 % 未満となり判別できない．

問 4 (a)　ピストンのつりあいより，

$$0 = PS - P_0S - Mg\,, \qquad \therefore P = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{P_0 + \frac{Mg}{S}}\,.$$

(b)　内部エネルギー変化は公式より，

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR\left(\frac{P_0 + Mg/S}{nR}SL - \frac{P_0 + Mg/S}{nR}Sh\right) = \frac{3}{2}(P_0S + Mg)(L - h)\,.$$

内部気体のした仕事は，

$$W = P\Delta V = (P_0S + Mg)(L - h)\,.$$

よって，熱力学第 1 法則より，

$$Q = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{5}{2}(P_0S + Mg)(L - h)}\,.$$