I　時間追跡（等加速度），剛体のつりあい

【メモ】

・問 1 から問 3 までは質点の力学．問 1 はつりあいと滑らない条件．問 2 は時間追跡[*1]．問 3 は仕事の定義が聞かれている．仕事の計算は 3 通りに分類できるが，今の場合力の大きさが一定なことから，定義から積分を利用することなく計算できる．

・問 4 以降は剛体のつりあい．剛体のつりあいは，

$$\begin{cases} \text{各方向の力のつりあい} \\ \text{力のモーメントのつりあい} \end{cases}$$

を連立して考える．ここに滑らない条件など，状況に応じた条件を加えて問題を解く．

【解答】

問 1　以下全ての箇所で静止摩擦力の大きさを R，垂直抗力の大きさを N とする．つりあいより，

$$\begin{cases} 0 = mg\sin\theta - R\,, \\ 0 = N - mg\cos\theta\,, \end{cases} \qquad R = mg\sin\theta\,,\quad N = mg\cos\theta\,.$$

滑らない条件を考えて，

$$\begin{aligned} R &< \mu_0 N \\ mg\sin\theta &< \mu_0 mg\cos\theta\,, \qquad \therefore \tan\theta_0 = \underset{\sim}{\mu_0}\,. \end{aligned}$$

問 2　運動方程式より，

$$\begin{cases} ma = mg\sin\theta' - \mu' N\,, \\ 0 = N - mg\cos\theta'\,, \end{cases} \qquad N = mg\cos\theta'\,,\quad a = g(\sin\theta' - \mu'\cos\theta')\,.$$

x 軸を斜面に沿って定め，その原点を頂点 B の初期位置とする．時刻 t における頂点 B の位置を x，物体の速度を v と記す．加速度が一定値を取ることより，

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}at^2\,, \\ v = at\,. \end{cases}$$

$x = \dfrac{h}{\sin\theta'}$ の下で 2 式を解いて，

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a\sin\theta'}} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{2h}{g\sin\theta'(\sin\theta' - \mu'\cos\theta')}}}\,,\quad v = \sqrt{\frac{2ah}{\sin\theta'}} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{2gh\left(1 - \frac{\mu'}{\tan\theta'}\right)}}\,.$$

[*1] 等加速度なのでエネルギーで考えても解けるが，設問で時刻 t が聞かれているため時間追跡の方法で解く．

問 3　仕事の定義より，

$$W_1 = mg\frac{h}{\sin\theta'}\cos(90^\circ - \theta') = mgh\,,\quad W_2 = N\frac{h}{\sin\theta'}\cos(0^\circ) = 0\,,$$
$$W_3 = \mu' mg\cos\theta'\frac{h}{\sin\theta'}\cos(180^\circ) = -\frac{\mu' mgh}{\tan\theta'}\,.$$

問 4　頂点 B と抗力[*2]の作用点の距離を x とする．力のつりあい・力のモーメントのつりあい（B を回転軸）より[*3]，

$$\begin{cases} 0 = mg\sin\theta - R\,, \\ 0 = N - mg\cos\theta\,, \\ 0 = xN + \dfrac{a}{2}mg\sin\theta - \dfrac{b}{2}mg\cos\theta\,. \end{cases}$$

回転を始める瞬間を考えるので，$x = 0$ の下で 3 式を解けば[*4]，

$$\tan\theta_1 = \frac{a}{b}\,.$$

また，このとき（$x = 0$ のとき，すなわち $\theta = \theta_1$ のとき）に滑らない条件を考えれば，

$$R < \mu_1 N$$
$$mg\sin\theta_1 < \mu_1 mg\cos\theta_1\,,\qquad \therefore \tan\theta_1 = \mu_1\,.$$

問 5　力のつりあい・力のモーメントのつりあい（C を回転軸）より，

$$\begin{cases} 0 = mg\sin\theta_2 - R - F\cos\theta_2\,, \\ 0 = N - mg\cos\theta_2 - F\sin\theta_2\,, \\ 0 = -(b-x)N + \dfrac{a}{2}mg\sin\theta_2 + \dfrac{b}{2}mg\cos\theta_2 - aF\cos\theta_2 + bF\sin\theta_2\,. \end{cases}$$

$x = b$ の下で力のモーメントの式を解いて[*5]，

$$F = \frac{1}{2}\frac{a\sin\theta_2 + b\cos\theta_2}{a\cos\theta_2 - b\sin\theta_2}mg\,.$$

[*2] 斜面と垂直な成分が垂直抗力，斜面と平行な成分が静止摩擦力である．

[*3] この式から，回転する直前を考えていないときの抗力の作用点の位置 x を求めることもできる（こういう設問もある）．

[*4] N，R はともに設問になっていないので求める必要はないが，仮の求めたくなった場合，$\cos\theta$ は三角関数の相互関係から，

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}\,,\qquad \therefore \cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

と求まり（図より，正は明らか）．$\sin\theta$ は $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ から求まる．そしてこの値を使えばよい．

[*5] 分母の符号が正であることは $\theta_1 > \theta_2$ より，

$$\tan\theta_1 = \frac{a}{b} > \tan\theta_2\,,\qquad \therefore a\cos\theta_2 > b\sin\theta_2$$

と確認できる．

問 6　問 5 より，

$$0 = -(b-x)(mg\cos\theta + F\sin\theta) + \frac{a}{2}mg\sin\theta + \frac{b}{2}mg\cos\theta - aF\cos\theta + bF\sin\theta$$

$$\therefore b - x = \frac{1}{2}\frac{mg}{mg + F\tan\theta}(a\tan\theta + b) - \frac{F}{mg + F\tan\theta}(a - b\tan\theta)\,.$$

以上より，$b-x$ は $F>0$ において単調に増加，または減少する関数である[*6]．今，$F>0$ の任意の F において $b-x$ が正の値であればよく[*7]，$F=0$ において正の値を取ることから $F\to\infty$ でも正の値を取ればよい．よって，

$$\lim_{F\to\infty}(b-x) = -\frac{a - b\tan\theta}{\tan\theta} > 0\,, \qquad \therefore \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\tan\theta > \frac{a}{b}}\,.$$

[*6] 分数関数より，$F = \dfrac{mg}{\tan\theta}$ を境に単調に増加/減少することは明らかである．

[*7] 転倒するとき抗力の作用点が C と一致する（$b-x$ が 0 となる）ことから，抗力の作用点が C と一致しない（$b-x$ が正の値を取る）とき転倒しない．

II　電気回路，内部構造の見えるコンデンサ

【メモ】

・問 3 のみ素子の中身が見える問題で，それ以外は普通の電気回路の問題である．

・（そろそろくどい気もするが）電気回路は

$$\begin{cases} \text{キルヒホッフ則} \\ \text{電荷保存則} \\ \text{素子の性質} \end{cases}$$

を連立して考える．

【解答】

問 1　以下全ての箇所でコンデンサ $\mathrm{C_1}$ に蓄えられる電荷を Q_1，コンデンサ $\mathrm{C_2}$ に蓄えられる電荷を Q_2，抵抗 R を流れる電流を I と記す．キルヒホッフ則・電荷保存則より，

$$\begin{cases} 2E - R\cdot 0 - \dfrac{Q_1}{C_1} - \dfrac{Q_2}{C_2} = 0\,, \\ -Q_1 + Q_2 = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore Q_1 = Q_2 = \underline{\dfrac{2C_1C_2}{C_1+C_2}}E\,.$$

極板間電位差は，

$$\frac{Q_1}{C_1} = \underline{\frac{2C_2}{C_1+C_2}}E\,.$$

問 2　キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} E - R\cdot 0 - \dfrac{Q_1}{C_1} = 0\,, \\ E - \dfrac{Q_2}{C_2} = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore Q_1 = C_1E\,,\quad Q_2 = C_2E\,.$$

よって，問 1 まで孤立部分だった箇所の電荷を計算すると，

$$-Q_1 + Q_2 = (C_2 - C_1)E > 0$$

より，この部分に正の電荷が $\underline{(C_2 - C_1)E}$ だけ流れ込んだことがわかる．よって，電流は $\underline{f\text{ から }c}$ に流れた．

問 3　コンデンサを左右に分けて考え，左右の部分の容量をそれぞれ C_L，C_R と記す．C_R は $t=0$ で 0，$t=t_0$ で $3C_2$ となることと，時刻 t に比例することから[*8]，

$$C_\mathrm{R} = 3C_2\frac{t}{t_0}\,.$$

[*8] この議論がわかりにくければ，平行平板コンデンサの容量の公式 $C = \varepsilon\dfrac{S}{d}$ を用いて，例として極板間隔を d，面積を $S = ab$

C_L は $t=0$ で C_2，$t=t_0$ で 0 となることを踏まえ同様に考えれば，

$$C_\mathrm{L}=C_2\left(1-\frac{t}{t_0}\right).$$

よって，時刻 t における $\mathrm{C_2}$ の容量は，

$$C_2(t)=C_\mathrm{R}+C_\mathrm{L}=C_2\left(1+2\frac{t}{t_0}\right).$$

キルヒホッフ則より，

$$E-\frac{Q_2}{C_2}=0\,,\qquad \therefore\ \frac{dQ_2}{dt}=\frac{dC_2}{dt}E=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{2C_2E}{t_0}}.$$

問 4　コンデンサの静電エネルギー変化は，

$$\mathit{\Delta}U=\frac{1}{2}\frac{(3C_2E)^2}{C_2}-\frac{1}{2}\frac{(3C_2E)^2}{3C_2}=3C_2E^2\,.$$

系のエネルギー収支より，

$$W_\mathrm{ex}=\mathit{\Delta}U=\underset{\sim\sim\sim}{3C_2E^2}\,.$$

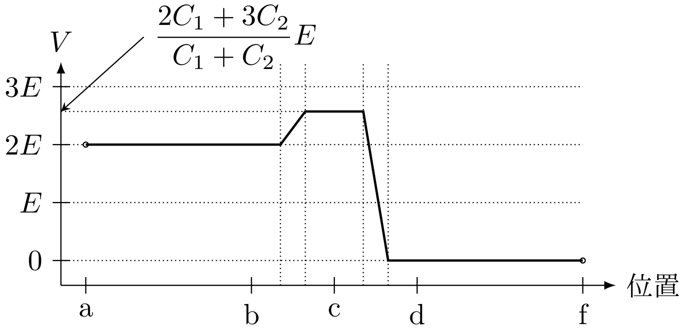
問 5　キルヒホッフ則・電荷保存則より，

$$\begin{cases}2E-R\cdot 0-\dfrac{Q_1}{C_1}-\dfrac{Q_2}{C_2}=0\,,\\ -Q_1+Q_2=3C_2E\,,\end{cases}\qquad \therefore Q_1=-\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}E\,,\quad Q_2=\frac{C_2(2C_1+3C_2)}{C_1+C_2}E\,.$$

よって，それぞれの極板間電位差は，

$$\frac{|Q_1|}{C_1}=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{C_2}{C_1+C_2}E}\,,\quad \frac{Q_2}{C_2}=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{2C_1+3C_2}{C_1+C_2}E}\,.$$

グラフは以下のようになる[*9]．



のように仮定し，挿入した距離を $x=vt\,(0\le x\le a)$，$C_2=\varepsilon_0\dfrac{ab}{d}$，$t_0=\dfrac{a}{v}$ とすれば，

$$C_\mathrm{R}=3\varepsilon_0\frac{bv}{d}t=3C_2\frac{t}{t_0}\,,\quad C_\mathrm{L}=\varepsilon_0\frac{b(a-vt)}{d}=C_2\left(1-\frac{t}{t_0}\right).$$

*9 極板間には平行一様電場が生じているため，極板間の電位差の傾きは一定となる．

III　光の干渉

【メモ】

・問 1，問 2 は幾何光学の問題．そのため，使う物理法則は屈折の法則のみ．屈折の法則以外には図形の考察を行うが，この問題では角度 i_0 と r_0，長さ d が与えられているので，三角比を用いることになる．

・問 3 からは干渉の問題となる．干渉条件は整数を m として，

$$\text{（位相差）} = \begin{cases} 2m\pi & \text{（強めあい）}, \\ (2m-1)\pi & \text{（弱めあい）}. \end{cases}$$

【解答】

問 1　屈折の法則より，

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{1 \cdot \sin i_0 = n \sin r_0}\,.$$

問 2　図より，

$$\overline{\mathrm{BD}} = 2\overline{\mathrm{BC}} \sin r_0 = 2\frac{d}{\cos r_0} \sin r_0 = 2d \tan r_0\,.$$

よって，

$$\text{（BG 間の光路長）} = 1 \cdot \overline{\mathrm{BG}} = \overline{\mathrm{BD}} \sin i_0 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{2d \tan r_0 \sin i_0}\,.$$

同様にして，

$$\text{（FD 間の光路長）} = n\overline{\mathrm{FD}} = n\overline{\mathrm{BD}} \cos(90^\circ - r_0) = 2nd \tan r_0 \sin r_0 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{2d \tan r_0 \sin i_0}\,.$$

問 3　反射による位相のずれを考慮して，

$$\frac{2\pi}{\lambda/n} \cdot 2\cos r - \pi = (2m+1)\pi\,, \qquad \therefore \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\cos r = \frac{\lambda}{2nd}(m+1)}\,.$$

問 4　両方の経路の光がともに位相反転しているので，

$$\frac{2\pi}{\lambda/n} \cdot 2\cos r = (2m+1)\pi\,, \qquad \therefore \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\cos r = \frac{\lambda}{2nd}\left(m + \frac{1}{2}\right)}\,.$$

問 5　図より経路差は 0．よって，位相差も $\underset{\sim}{0}$.

問 6　圧力が P のとき，2 光の位相差 $\varDelta\phi$ は，

$$\varDelta\phi = \frac{2\pi}{\lambda/n}L - \frac{2\pi}{\lambda/1}L = \frac{2\pi}{\lambda}L(n_1 - 1)\frac{P}{P_1}\,.$$

$P=P_1$ で強めあい，$P=2P_1$ でその後の 50 回目の強めあいより，

$$\begin{cases} \dfrac{2\pi}{\lambda}L(n_1-1)=2m\pi\,, \\ \dfrac{2\pi}{\lambda}L\cdot 2(n_1-1)=2(m+50)\pi\,, \end{cases} \qquad \therefore m=50\,,\quad n_1=1+50\frac{\lambda}{L}\,.$$

よって，与えられた数値を代入して，

$$n_1-1=\frac{5\times10^{-7}\,\mathrm{m}}{50\times10^{-3}\,\mathrm{m}}\times 50=\underline{5\times10^{-4}}\,.$$