

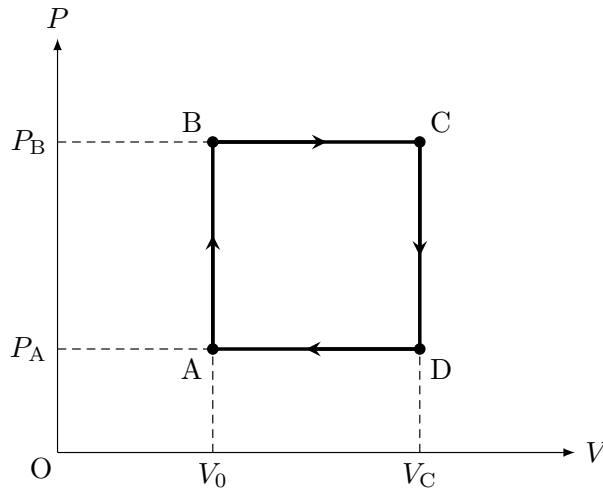
60 $T - V$ 図, 定石通りに処理

【解答】

- (1) BC 間, DA 間は傾き一定ゆえ, 状態方程式から圧力一定とわかる. 状態方程式より, 各状態における圧力は,

$$P_A = \frac{RT_0}{V_0}, \quad P_B = \frac{RT_1}{V_0} > P_A, \quad P_C = \frac{RT_2}{V_C} = P_B, \quad P_D = \frac{RT_D}{V_C} = P_A.$$

したがって, $P - V$ 図は以下のようなになる.



さて, $P - V$ 図より $W_{AB} = 0$ ゆえ, 熱力学第 1 法則より,

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} = \frac{3}{2}R(T_1 - T_0).$$

- (2) 状態方程式より,

$$P_C = P_B = \frac{RT_1}{V_0}.$$

- (3) $P_A = P_D$, $P_B = P_C$ ゆえ, 状態方程式より,

$$\begin{cases} \frac{RT_D}{V_C} = \frac{RT_0}{V_0}, \\ \frac{RT_2}{V_C} = \frac{RT_1}{V_0}, \end{cases} \quad \therefore V_C = \frac{T_2}{T_1}V_0, \quad T_D = \frac{V_C}{V_0}T_0 = \frac{T_2}{T_1}T_0.$$

よって, 熱力学第 1 法則より,

$$Q_{DA} = \Delta U_{DA} + W_{DA} = \frac{3}{2}R(T_A - T_D) + P_A(V_A - V_D) = \frac{3}{2}RT_0 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) < 0$$

$$\therefore Q_{DA}^* = -Q_{DA} = \frac{3}{2}RT_0 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right).$$

(4) $P - V$ 図より, 閉曲線内部の (符号付) 面積を計算して*1,

$$W_{\text{cyc}} = (P_B - P_A)(V_C - V_0) = \underbrace{R(T_1 - T_0) \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right)}.$$

(5) CD 間では $\Delta U_{CD} < 0$ ゆえ $Q_{CD} < 0$ であり, この熱機関は AB, BC 間でのみ外部から熱を吸収する. BC 間の吸熱量は, 熱力学第 1 法則より,

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} + W_{BC} = \frac{3}{2}R(T_C - T_B) + P_B(V_C - V_B) = \frac{5}{2}R(T_2 - T_1).$$

よって, 熱機関の熱効率 e は,

$$e = \frac{W_{\text{cyc}}}{Q_{AB} + Q_{BC}} = \frac{2}{5} \frac{(T_2 - T_1)(T_1 - T_0)}{\underbrace{T_1(5T_2 - 2T_1 - 3T_0)}}.$$

*1 $W_{\text{cyc}} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$ である.

66 浮力絡みの熱力学

【解答】

- (1) 液面のつりあい，および容器のつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = pS - (p_0 + \rho g d)S, \\ 0 = pS - p_0 S - Mg - F_{\text{ex}}, \end{cases} \quad \therefore p = p_0 + \rho g d, \quad F_{\text{ex}} = \underline{\underline{\rho S d g - Mg}}.$$

- (2) 容器のつりあいより*2，

$$0 = \rho \frac{1}{2} S d g - Mg, \quad \therefore M = \underline{\underline{\frac{1}{2} \rho S d}}.$$

- (3) 状態方程式より，

$$\begin{cases} (p_0 + \rho g d) S d = n R T, \\ \left\{ p_0 + \rho g \left(h + \frac{1}{2} d \right) \right\} \frac{1}{2} S d = n R T, \end{cases} \quad \therefore h = \underline{\underline{\frac{p_0}{\rho d} + \frac{3}{2} d}}.$$

- (4) ポアソンの公式より，比熱比を γ として，

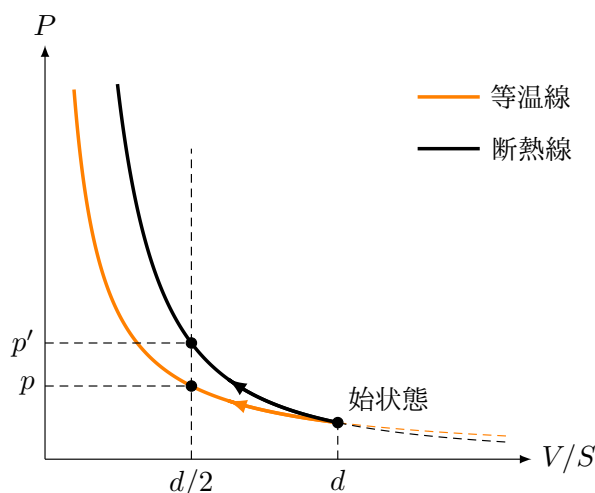
$$\begin{aligned} \left\{ p_0 + \rho g \left(h' + \frac{1}{2} d \right) \right\} \left(\frac{1}{2} S d \right)^\gamma &= (p_0 + \rho g d) (S d)^\gamma \\ p_0 + \rho g \left(h' + \frac{1}{2} d \right) &= 2^\gamma (p_0 + \rho g d) \\ \therefore h' &= (2^\gamma - 1) \frac{p_0}{\rho d} + \left(2^\gamma - \frac{1}{2} \right) d. \end{aligned}$$

一般に比熱比 γ は 1 よりも大きな値を取る*3ため， h' は h よりも大きい。

なお，想定解答は $P - V$ 図を用いた解答であり，問題集の作成者はゆっくりとした断熱過程を想定している（グラフが描ける，すなわち気体の状態が一意に定まるということから）。等温過程，断熱過程で始状態がともに等しいことから，等温線と断熱線の交点が始状態とわかり，断熱線の方が急勾配であることから，この過程での気体の状態変化は図ようになる。同一の体積下において体積を比較すれば，明らかに断熱過程の下での p の方が大きな値を取る。したがって，液面のつりあいを考えれば $h' > h$ が言える。

*2 浮力を考えたが，上下の水圧を計算しても良い。ただし，このとき浮力は考えてはいけない。

*3 理想気体であれば $\gamma = 1 + \frac{R}{C_v}$ 。



【参考】気体にむらが生じている場合の議論の例*4

ここでは、シリンダの運動は十分に早く、過程の間における液体の気体の間の熱の移動はないと仮定する。

液面のつりあい、および状態方程式より、

$$\left\{ p_0 + \rho g \left(h'' + \frac{1}{2}d \right) \right\} \frac{1}{2}Sd = nRT'', \quad \therefore nRT'' = \frac{1}{2}p_0Sd + \frac{1}{2}\rho gSdh + \frac{1}{4}\rho gSd^2.$$

ここで、 $nRT = p_0Sd + \rho gSd^2$ より、気体の定積モル比熱を C_v とすれば、

$$\begin{aligned} \Delta U_{\text{gas}} &= nC_v(T'' - T) \\ &= \frac{C_v}{R} \left(-\frac{1}{2}p_0Sd + \frac{1}{2}\rho gSdh - \frac{3}{4}\rho gSd^2 \right). \end{aligned}$$

よって、気体、シリンダ（による重力場）からなる系のエネルギー収支は、系が外部からされた「仕事」を $W^* (> 0)$ とすると*5*6、

$$\Delta U_{\text{gas}} + \Delta U = W^*, \quad \therefore h'' = \frac{C_v}{C_v - R} \left(\frac{p_0}{\rho g} + \frac{3}{2}d + \frac{2W^* R}{\rho Sgd C_v} \right) > h.$$

*4 即席の議論です。不備があれば教えて下さい。

5 気体が液面にする/される「仕事」については計算が難しい（気体にむらが生じている（当然液体にも流れが生じている）ため、気体の圧力が一意に定まらず定義による計算ができない）。これを仕事と呼んでいいのかどうかは解釈に依存するため、ここでは「仕事」と呼ぶことにする。気体をする「仕事」は、液面にする「仕事」 W_{li}^ とシリンダにする「仕事」 W_{cy}^* の総和であり、「仕事」は通常の仕事と同様に体積が増加していれば正、体積が減少していれば負とすれば、この場合気体のした「仕事」は負とわかる。よって、気体のされた「仕事」 W_{gas}^* は、 $W_{\text{gas}}^* = -(W_{\text{li}}^* + W_{\text{cy}}^*) > 0$ である。

6 シリンダが大気、内部気体、および外力の合力からされた仕事 W_{ex} は、その変位から明らかに正ゆえ、シリンダと内部気体からなる系のされた「仕事」 $W^ (= W_{\text{gas}}^* + W_{\text{ex}})$ は正と考えてよいだろう。

99 箔検電器

【解説】 定量的な説明

一連の操作は、以下の3つの段階に分かれている。

- ① 箔検電器の極板に指を触れた状態で、正に帯電したガラス棒を近づける。このとき、箔検電器の極板とガラス棒、箔と地面がコンデンサを形成し、それぞれの静電容量を C_0 , C_1 とする (図1)。
- ② ガラス棒の状態を維持したまま、箔検電器から指を外す。このとき、操作①のときと同様に箔検電器の極板とガラス棒、箔と地面がコンデンサを形成している (図2)。
- ③ ガラス棒を箔検電器から遠ざける。このとき、箔検電器の極板と地面、箔と地面がコンデンサを形成し、それぞれの静電容量を C_2 , C_1 とする (図3)。

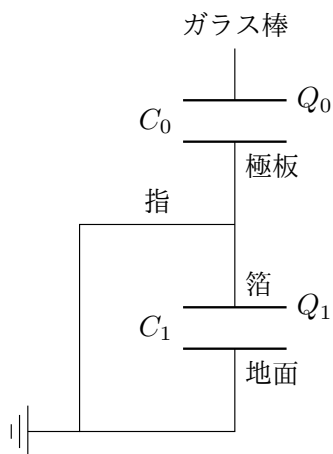


図1

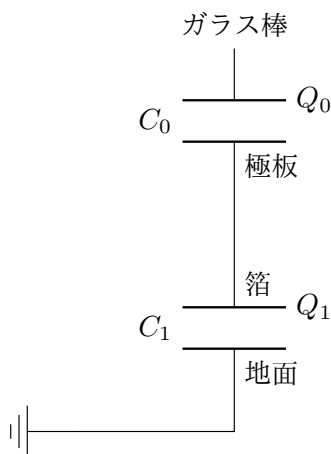


図2

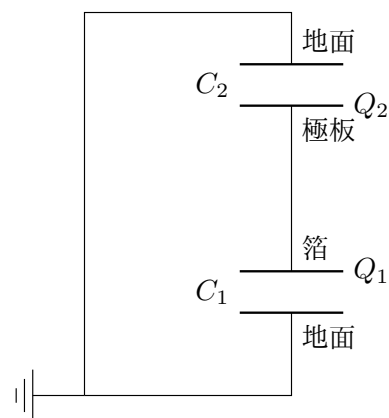


図3

・操作①について：キルヒホッフ則より，

$$0 = \frac{Q_1}{C_1}, \quad \therefore Q_1 = 0.$$

すなわち、箔は帯電しておらず、箔は閉じたままである。また、静電誘導によって、極板には $-Q_0$ の電荷が帯電している。

・操作②について：ガラス棒と極板がコンデンサを形成していることから極板には $-Q_0$ の電荷が帯電しており、電荷保存則から箔の帯電量は0と決まる。したがって、箔は閉じたままである。

・操作③について：キルヒホッフ則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} 0 = \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2}, \\ Q_1 + Q_2 = -Q_0, \end{cases} \quad \therefore Q_1 = -\frac{C_1}{C_1 + C_2} Q_0, \quad Q_2 = -\frac{C_2}{C_1 + C_2} Q_0.$$

ここで、極板と地面からなるコンデンサの容量 C_2 は、箔と地面からなるコンデンサの容量 C_1 に比べる

と十分に小さいことが知られており、 $C_1 \gg C_2$ とすれば、

$$Q_1 = -\frac{1}{1 + C_2/C_1} Q_0 \doteq -Q_0,$$

$$Q_2 = -\frac{C_2/C_1}{1 + C_2/C_1} Q_0 \doteq 0.$$

よって、箔の帯電量は $-Q_0$ となり、箔は開く。