2 電荷と電磁場に関する以下の問いに答えよ．ここでは，特に断らない限り極座標表示を用いることとし，位置ベクトルは

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$$

と表される．また，ベクトル場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v}(r, \theta, \varphi)$ を極座標の各成分 v_r，v_θ，v_φ を用いて，

$$\boldsymbol{v}(r, \theta, \varphi) = v_r\boldsymbol{e}_r + v_\theta\boldsymbol{e}_\theta + v_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$$

と表す．ここで，$\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_\varphi$ は極座標表示における単位ベクトルであり，直線直交座標系で書くと

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_r &= (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta) \\
\boldsymbol{e}_r &= (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta) \\
\boldsymbol{e}_r &= (\sin\varphi, \cos\varphi, 0)
\end{aligned}$$

である．以下では真空の誘電率を ε_0，真空の透磁率を μ_0，真空中の光速を $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ とし，必要ならスカラー場 $f(\boldsymbol{r}) = f(r, \theta, \varphi)$ の勾配，およびベクトル場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ の発散，回転に関する公式

$$\begin{aligned}
\nabla f &= (\partial_r f)\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}(\partial_\theta)\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}(\partial_\varphi f)\boldsymbol{e}_\varphi\,, \\
\nabla\cdot\boldsymbol{v} &= \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 v_r)\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(v_\theta\sin\theta)\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi v_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi\,, \\
\nabla\times\boldsymbol{v} &= \frac{1}{r\sin\theta}[\partial_\theta(v_\varphi\sin\theta) - \partial_\varphi v_\theta]\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi v_r - \partial_r(rv_\varphi)\right]\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}[\partial_r(rv_\theta) - \partial_\theta v_r]\boldsymbol{e}_\varphi
\end{aligned}$$

を用いてよい．ただし，$\partial_r = \dfrac{\partial}{\partial r}$，$\partial_\theta = \dfrac{\partial}{\partial\theta}$，$\partial_\varphi = \dfrac{\partial}{\partial\varphi}$ である．解答欄には答のみを記入すること．

[A] 真空中に電荷 q に帯電した半径 a の導体球がある．

(1) この導体球の $r \leq a$，および $r > a$ における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ と電位 $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めよ．ただし，導体球の中心が原点になるように座標をとり，無限遠点における電位を $\lim_{r\to\infty}\phi(\boldsymbol{r}) = 0$ とする．

(2) 静電エネルギー U を求めよ．

(3) この導体球を囲むように，原点を中心とした電荷 $-q$ に帯電した十分に大きな球殻があると考えることで，この導体球をコンデンサーと見なすことができる．この導体球の電気容量 C を求めよ．

[B]　真空中において，xy 平面上で原点を中心に回転している点電荷の対による電磁波の放射を考える．電荷 q の点電荷が直線直交座標系で

$$\boldsymbol{r}_0(t) = \left(\frac{d}{2}\cos\omega t, \frac{d}{2}\sin\omega t, 0\right)$$

にあり，$-q$ の点電荷が $-\boldsymbol{r}_0(t)$ にある．ここで ω および d は正定数であり，t は時刻である．原点にある電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}(t)$ のつくるスカラー・ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r},t)$，およびベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ が

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\boldsymbol{p}(t-r/c)\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} + \frac{\dot{\boldsymbol{p}}(t-r/c)\cdot\boldsymbol{r}}{cr^2}\right],$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\mu_0}\dot{\boldsymbol{p}}(t-r/c)$$

で与えられることを用いてよい．ここで，$\dot{\boldsymbol{p}}(t) = \dfrac{d\boldsymbol{p}(t)}{dt}$ である．

(4)　この点電荷の対がつくるスカラー・ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r},t)$，およびベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ の $r \gg c/\omega$，$r \gg d$ における漸近形を r^{-1} のオーダーまで求めよ．

(5)　(4) の漸近形を用いて，電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$，および磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ の漸近形を r^{-1} のオーダーまで求めよ．

(6)　この点電荷の対が動径方向に放射するエネルギーの流速密度の大きさを $S(\boldsymbol{r},t)$ とする．(5) の漸近形を用いて $S(\boldsymbol{r},t)$ の時間平均 $\overline{S}(\boldsymbol{r})$ の漸近形を求めよ．

(7)　r を一定としたとき，$\overline{S}(\boldsymbol{r})$ が最も大きい方向を以下から 1 つ選べ．

i.　x 軸方向
ii.　y 軸方向
iii.　z 軸方向
iv.　x 軸方向および y 軸方向
v.　xy 平面内の任意の方向
vi.　全ての方向で等しい

(8)　この点電荷の対が単位時間あたりに放射する全エネルギーの時間平均 P を求めよ．

【メモ】

・2022 年東工大院試（午後）第 1 問より．間違いがあれば教えてください．

・動径方向の単位ベクトルは，$\boldsymbol{e}_r$，$\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ のどちらかで記す．また，r の時間微分について，

$$\frac{1}{c}\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{c} \simeq 0$$

の近似が成り立つ範囲での計算を考える．

【解答】

[A] (1) 閉曲面として導体と同心の球を考え，その閉曲面（球面）を A，閉曲面で囲まれた領域を V とする．対称性より $\boldsymbol{E}_\varphi = \boldsymbol{E}_\theta = 0$ である．Gauss 則より，導体内部と外部で場合分けして，

$$\int_A \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{e}_r\,dS = \int_V \frac{Q_{\text{in}}}{\varepsilon_0}\,dV\,, \qquad \therefore \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 0\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} & (0\le r\le a)\,, \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} & (a\le r)\,. \end{cases}$$

また，電位 ϕ は，考えているのが静電場ゆえ，

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\int_\infty^r \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{e}_r\,dr = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{a} & (0\le r\le a)\,, \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} & (a\le r)\,. \end{cases}$$

(2) 静電エネルギーは，単位体積当たりの静電エネルギーを全領域で積分して，

$$U = \int_0^\infty dr\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{\varepsilon_0}{2}|\boldsymbol{E}|^2 r^2\sin\theta = \underline{\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}}\,.$$

(3) 導体間の電位差を考えて，

$$\varDelta\phi = \phi_+ - \phi_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\,, \qquad \therefore C = \lim_{b\to\infty}4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a} = \underline{4\pi\varepsilon_0 a}\,.$$

[B] (4) 定義より，電気双極子モーメント $\boldsymbol{p}(t-r/c)$ は，

$$\boldsymbol{p}(t) = -qd\begin{pmatrix}\cos(\omega t)\\ \sin(\omega t)\\ 0\end{pmatrix}\,.$$

このとき，$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}$，および $\dot{\boldsymbol{p}}(t-r/c)\cdot\boldsymbol{r}$ はそれぞれ[*1]，

$$\boldsymbol{p}(t-r/c)\cdot\boldsymbol{r} = -qd\left\{\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\sin\theta\cos\varphi + \sin\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\sin\theta\sin\varphi\right\}\,,$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}(t-r/c)\cdot\boldsymbol{r} \simeq -qd\omega\left\{-\sin\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\sin\theta\cos\varphi + \cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\sin\theta\sin\varphi\right\}\,.$$

[*1] $\dot{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{r}$ の計算では，$\dot{\boldsymbol{p}}$ の計算から生じる $\left(1-\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\dfrac{\dot{\boldsymbol{r}}}{c}\right)$ のファクターを落としている．

よって，与式より，スカラーポテンシャル ϕ，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は，r^{-2} の項を落として，

$$
\begin{aligned}
\phi(r,\theta,\varphi,t) &= -\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left[\frac{1}{r}\left\{\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\sin\theta\cos\varphi+\sin\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\sin\theta\sin\varphi\right\}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\omega}{c}\left\{-\sin\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\sin\theta\cos\varphi+\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\sin\theta\sin\varphi\right\}\right]\\
&\simeq -\frac{qd\omega}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{1}{r}\sin\theta\left\{-\sin\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\cos\varphi+\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\sin\varphi\right\}.
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{A}(r,\theta,\varphi,t) = -\frac{\mu_0 qd\omega}{4\pi}\frac{1}{r}\begin{pmatrix}-\sin\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\\ \cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\\ 0\end{pmatrix}.
$$

(5)　電場 $\boldsymbol{E}$，および磁場 $\boldsymbol{B}$ はそれぞれ，以下のように計算される．

$$
\boldsymbol{E} = -\nabla\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\,,\qquad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}\,.
$$

静電場の r 成分は，

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial\phi}{\partial r} &= \frac{qd\omega}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\sin\theta}{r}\left\{-\sin\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\cos\varphi+\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\sin\varphi\right\}\right]\\
&= \frac{qd\omega}{4\pi\varepsilon_0 c}\sin\theta\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\{\cdots\}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\{\cdots\}\right]\\
&\simeq -\frac{qd\omega}{4\pi\varepsilon_0 c}\sin\theta\left[\frac{1}{r}\left(-\frac{\omega}{c}\right)\left\{-\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\cos\varphi-\sin\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\sin\varphi\right\}\right]\\
&= \frac{\mu_0 qd\omega^2}{4\pi}\frac{1}{r}\sin\theta\left\{\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\cos\varphi+\sin\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\sin\varphi\right\}\,.
\end{aligned}
$$

θ 成分，φ 成分はともに r^{-2} に比例するので，

$$
-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\simeq 0\,,\qquad -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\simeq 0\,.
$$

また，誘導電場の寄与は $1/r$ の時間微分に関する項の寄与が r^{-2} に比例することから*2

$$
\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 qd\omega}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{r}\begin{pmatrix}-\sin\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\\ \cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\\ 0\end{pmatrix}\right]\simeq\frac{\mu_0 qd\omega^2}{4\pi}\frac{1}{r}\begin{pmatrix}\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\\ \sin\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\\ 0\end{pmatrix}\,.
$$

*2 r^{-1} に関する計算でも以下の近似を用いている．

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left[\sin\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\right]=\omega\left(1-\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{c}\right)\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\simeq\omega\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\,.
$$

よって，誘導電場の寄与の各成分は，

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot \boldsymbol{e}_r &= \frac{\mu_0 q d\omega^2}{4\pi}\frac{1}{r}\sin\theta\left\{\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\cos\varphi+\sin\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\sin\varphi\right\}\ ,\\
-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot \boldsymbol{e}_\theta &= \frac{\mu_0 q d\omega^2}{4\pi}\frac{1}{r}\cos\theta\left\{\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\cos\varphi+\sin\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\sin\varphi\right\}\ ,\\
-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot \boldsymbol{e}_\varphi &= \frac{\mu_0 q d\omega^2}{4\pi}\frac{1}{r}\left\{-\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\sin\varphi+\sin\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\cos\varphi\right\}\ .
\end{aligned}
$$

以上より，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = &-\frac{\mu_0 q d\omega^2}{4\pi}\frac{1}{r}\Bigg[\cos\theta\left\{\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\cos\varphi+\sin\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\sin\varphi\right\}\boldsymbol{e}_\theta\\
&+\left\{-\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\sin\varphi+\sin\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\cos\varphi\right\}\boldsymbol{e}_\varphi\Bigg]\,.
\end{aligned}
$$

　磁場は与式より r^{-2} の項を落とせば，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\sin\theta)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right\}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right\}\boldsymbol{e}_\theta\\
&\quad+\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right\}\boldsymbol{e}_\varphi\\
&\simeq -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)\boldsymbol{e}_\varphi\,.
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
A_\theta &= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_\theta = -\frac{\mu_0 q d\omega}{4\pi}\frac{1}{r}\cos\theta\left\{-\sin\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\cos\varphi+\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\sin\varphi\right\}\ ,\\
A_\varphi &= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_\varphi = -\frac{\mu_0 q d\omega}{4\pi}\frac{1}{r}\left\{\sin\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\sin\varphi+\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\cos\varphi\right\}
\end{aligned}
$$

より，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = &\frac{\mu_0 q d\omega^2}{4\pi c}\frac{1}{r}\Bigg[\left\{\sin\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\cos\varphi-\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\sin\varphi\right\}\boldsymbol{e}_\theta\\
&-\cos\theta\left\{\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\cos\varphi+\sin\left(\omega t-\frac{\omega}{c}r\right)\sin\varphi\right\}\boldsymbol{e}_\varphi\Bigg]\,.
\end{aligned}
$$

(6) Poynting ベクトル $\boldsymbol{S}$ は，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S} &= \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \\
&= \frac{1}{\mu_0}\left\{(E_\theta B_\varphi - B_\theta E_\varphi)\boldsymbol{e}_r + (E_\varphi B_r - B_\varphi E_r)\boldsymbol{e}_\theta + (E_r B_\theta - B_r E_\theta)\boldsymbol{e}_\varphi\right\} \\
&= \frac{\mu_0 q^2 d^2 \omega^4}{16\pi^2 c}\frac{1}{r^2}\left[\cos^2\theta\left\{\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}r\right)\cos\varphi + \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c}r\right)\sin\varphi\right\}^2\right. \\
&\qquad \left. + \left\{\sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c}r\right)\cos\varphi - \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}r\right)\sin\varphi\right\}^2\right]\boldsymbol{e}_r \\
\therefore S(r,\theta,\varphi,t) &= \frac{\mu_0 q^2 d^2 \omega^4}{16\pi^2 c}\frac{1}{r^2}\left[\cos^2\theta\left\{\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}r\right)\cos\varphi + \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c}r\right)\sin\varphi\right\}^2\right. \\
&\qquad \left. + \left\{\sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c}r\right)\cos\varphi - \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}r\right)\sin\varphi\right\}^2\right].
\end{aligned}$$

よって，時間平均は[*3]，

$$\overline{S}(r,\theta,\varphi) = \frac{\mu_0 q^2 d^2 \omega^4}{32\pi^2 c}\frac{1+\cos^2\theta}{r^2}.$$

(7) $\cos^2\theta = 1$ となるときを考えればいいので iii.

(8) $\overline{S}$ の半径 r の球面上での和を考えて[*4]，

$$P = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\,\overline{S} = \frac{\mu_0 q^2 d^2 \omega^4}{16\pi c}\int_0^\pi d\theta\,\sin\theta(2-\sin^2\theta) = \frac{\mu_0 q^2 d^2 \omega^4}{6\pi c}.$$

[*3] $t=0$ から $t=\dfrac{2\pi}{\omega}$ まで積分し，$\dfrac{2\pi}{\omega}$ で割った値.

[*4] 電気双極子を一定角速度で回転させるために加える外力の仕事率と等しい．ここから，外力の大きさが逆算できる.