I 時間追跡ー単振動

【メモ】

・高校範囲で時間追跡可能な運動は，等加速度運動，単振動，速度に比例した空気抵抗の運動の 3 つであり，前 2 つはエネルギーによる解法の選択も可能．この問題では，一部時間追跡の誘導が付いているため，その問題については時間追跡で考える．

【解答】

問 1　運動方程式より，

$$ma = -kx\,, \qquad \therefore \omega_1 = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\,.$$

問 2　運動方程式は，

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{ma = -2kx}\,.$$

問 3　運動方程式より，

$$\omega_2 = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{2k}{m}}}\,.$$

問 4　物体のエネルギー収支を考えて[*1]，

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = \int_A^0 (-2kx)\,dx = \frac{1}{2}kA^2\,, \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim\sim}{A\sqrt{\frac{2k}{m}}}\,.$$

問 5　ばね 1 が x 伸びているとき，ばね 3 は x 伸びており，ばね 2 は $2x$ 縮んでいる．よって，運動方程式は，

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{ma = -3kx}\,.$$

問 6　公式より，

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \underset{\sim\sim\sim\sim}{2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}}\,.$$

[*1] 物体と 2 つのばねを合わせた系を考えて，以下の力学的エネルギー保存則を用いてもよい．

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kA^2 \times 2\,.$$

問 7　物体 1 の位置，および速度をそれぞれを x_1，v_1，物体 2 も同様に x_2，v_2 とする．始状態で $x_1 = +A$，$x_2 = -A$，$v_1 = v_2 = 0$ より，物体の位置 x_1，x_2 はそれぞれ時刻 t の関数として，

$$\begin{cases} x_1 = A\cos\left(\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\,t\right), \\ x_2 = -A\cos\left(\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\,t\right) \end{cases}$$

と書ける．よって，各物体の速度は，

$$\begin{cases} v_1 = -A\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\,\sin\left(\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\,t\right), \\ v_2 = A\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\,\sin\left(\sqrt{\dfrac{3k}{m}}\,t\right) \end{cases}$$

となり，2 物体系の運動エネルギーは，

$$\frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 = \underline{3kA^2\sin^2\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t\right)}.$$

Ⅱ 電磁誘導ー $vB\ell$，電気回路

【メモ】

・静磁場中を導体棒が運動するタイプの電磁誘導.

・回路の状態決定は，キルヒホッフ則，電荷保存則，素子の性質で一意に決まる.

・ジュール熱は，以下のように分類して考える.

$$J = \begin{cases} RI^2 \Delta t & (I\text{ 一定}) \\ \text{エネルギー収支から逆算} & (I\text{ 非一定}) \end{cases}$$

【解答】

問 1　公式より，

$$f = \underset{\sim\sim}{evB}, \ \underset{\sim\sim\sim\sim}{(y\text{ 軸正方向})}.$$

問 2　素子の性質より $I = 0$ ゆえ，

$$\phi_{\mathrm{P}} = 0 - R \cdot 0 = \underset{\sim}{0}.$$

問 3　公式より，

$$V = \underset{\sim\sim}{vB\ell}, \ \underset{\sim\sim\sim\sim}{(y\text{ 軸負方向})}.$$

問 4　キルヒホッフ則より，

$$vB\ell - RI - \frac{Q}{C} = 0.$$

ここで，素子の性質より十分時間経過で $I = 0$ ゆえ[*2]，

$$Q = \underset{\sim\sim\sim}{CvB\ell}.$$

問 5　$I = \dfrac{dQ}{dt}$，$v = 0$ より，キルヒホッフ則は，

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC} Q.$$

よって，Q は指数関数に比例する関数形となり，初期条件 $Q(0) = vB\ell$ より，

$$Q = CvB\ell e^{-\frac{t}{RC}}.$$

[*2] 本当はキルヒホッフ則を微分方程式として解いて I を時刻 t の関数として求めることでわかる事実だが，受験では知識として頭に入れておく（例外もあるが，そのような場合は誘導に従えれば十分）.

以上から，

$$I=\frac{dQ}{dt}=-\frac{vB\ell}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

よりグラフは (エ) であり，電流の向きは $\mathrm{a}\to\mathrm{b}$ である．

問 6　回路のエネルギー収支より，

$$J=-\mathit{\Delta}U=-\left(0-\frac{1}{2}\frac{(CvB\ell)^2}{C}\right)=\frac{1}{2}c(vB\ell)^2\,.$$

問 7　公式より，

$$F=IB\ell\,,\ \ (x\text{ 軸正方向})\,.$$

問 8　時刻 t での導体棒の速度を u とする．キルヒホッフ則，および導体棒の運動方程式より，

$$\begin{cases} uB\ell-RI-\dfrac{Q}{C}=0\,, \\ ma=-IB\ell\,. \end{cases}$$

題意より，十分時間経過で $a=0$ より，運動方程式から $I=0$ が言え，キルヒホッフ則より $Q_{\mathrm{fin}}=Cv_0B\ell$ を得る．よって，系のエネルギー収支より，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2+\frac{1}{2}\frac{{Q_{\mathrm{fin}}}^2}{C}+J=\frac{1}{2}\frac{{Q_{\mathrm{ini}}}^2}{C}\,,\qquad \therefore Q_{\mathrm{fin}}<Q_{\mathrm{ini}}\,.$$

以上から，コンデンサの帯電量は終状態よりも始状態の方が大きく，十分時間経過で $Cv_0B\ell$ に収束していくことから (ウ) のグラフが適当．

問 9　全体のエネルギー収支より，

$$J=-\mathit{\Delta}U-\mathit{\Delta}K=\frac{1}{2}C\left(v^2-{v_0}^2\right)B^2\ell^2-\frac{1}{2}m{v_0}^2\,.$$

【補足 1】問 6 のジュール熱を直接計算

定義より，

$$J=\int_0^\infty\left(-\frac{vB\ell}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2R\,dt=\left[\frac{(vB\ell)^2}{R}\left(-\frac{RC}{2}\right)e^{-\frac{2}{RC}t}\right]_0^\infty=\frac{1}{2}C(vB\ell)^2\,.$$

【補足 2】問 8 を解く

$t=0$ で $v=0$，$Q=CvB\ell$ より，キルヒホッフ則から，

時刻 t における速度を u とする．運動方程式の両辺を t で積分して，

$$\begin{aligned} m\frac{du}{dt} &= -\frac{dQ}{dt}B\ell \\ \therefore m(u-0) &= -B\ell(Q-CvB\ell) \\ \therefore u &= -\frac{B\ell}{m}(Q-CvB\ell)\,. \end{aligned}$$

キルヒホッフ則より，積分定数を A として，

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= -\frac{1}{RC}\left\{1+\frac{C(B\ell)^2}{m}\right\}\left\{Q-\frac{C(B\ell)^2}{m+C(B\ell)^2}CvB\ell\right\} \\ \therefore Q &= \frac{C(B\ell)^2}{m+C(B\ell)^2}CvB\ell + Ae^{-\frac{1}{RC}\left\{1+\frac{C(B\ell)^2}{m}\right\}t}\,. \end{aligned}$$

ここで，$t=0$ で $Q=CvB\ell$ となるように積分定数 A を選べば，

$$Q = \frac{m}{m+C(B\ell)^2}CvB\ell\left(\frac{C(B\ell)^2}{m}+e^{-\frac{1}{RC}\left\{1+\frac{C(B\ell)^2}{m}\right\}t}\right)\,.$$

なお，$t\to\infty$ で $Q=Cv_0B\ell$ より，

$$Q(\infty) = \frac{C(B\ell)^2}{m+C(B\ell)^2}CvB\ell = Cv_0B\ell\,,\qquad \therefore v_0 = \frac{C(B\ell)^2}{m+C(B\ell)^2}v$$

と v_0 を求めることもできる．

III 固有振動ー弦

【メモ】

・固有振動の問題は図を描いて考察する．

・反射波と定常波を形成するとき，境界条件が固定端のときは節，自由端のときは腹を形成する．

・固有振動は弦（両端節），気柱（開管が両端腹，閉管が腹と節）のそれぞれを押さえる．気柱の固有振動において境界が自由端のとき，開口端補正を考慮する必要がある．

【解答】

問 1　それぞれ図より，

$$\frac{1}{2}\lambda_{\mathrm{A}} \times 4 = 1\,\mathrm{m}\,, \qquad \therefore \lambda_{\mathrm{A}} = \underset{\sim\sim\sim}{0.5\,\mathrm{m}}\,.$$
$$\frac{1}{2}\lambda_{\mathrm{B}} \times 1 = 0.5\,\mathrm{m}\,, \qquad \therefore \lambda_{\mathrm{B}} = \underset{\sim\sim}{1\,\mathrm{m}}\,.$$

問 2　波の基本式，および弦を伝わる波の速さの公式より，

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{S}{\rho}}$$

つりあいより A 側，B 側の張力の大きさ S はそれぞれ $M_{\mathrm{A}}g$，$M_{\mathrm{B}}g$ ゆえ，問 1 より，

$$\frac{1}{\lambda_{\mathrm{A}}}\sqrt{\frac{M_{\mathrm{A}}g}{\rho}} = \frac{1}{\lambda_{\mathrm{B}}}\sqrt{\frac{M_{\mathrm{B}}g}{\rho}}\,, \qquad \therefore M_{\mathrm{B}} = \underset{\sim\sim\sim}{4M_{\mathrm{A}}}\,.$$

問 3　A，B それぞれの側で次の固有振動が起こるのは，A は 5 倍振動，B は 2 倍振動であり，それぞれの振動数 f_{A}，f_{B} は[*3]，

$$f_{\mathrm{A}} = \frac{5}{4}f_1\,, \quad f_{\mathrm{B}} = 2f_1\,.$$

よって，先に固有振動が生じるのは 弦 OA の側であり，その振動数は $f_2 = \underset{\sim\sim}{\frac{5}{4}f_1}$ である．

[*3] 回りくどいが次のように計算してもよい．A 側の 5 倍振動，および B 側の 2 倍振動の波長 λ_{A}，λ_{B} はそれぞれ，

$$\frac{1}{2}\lambda_{\mathrm{A}} \times 5 = 1\,\mathrm{m}\,, \qquad \therefore \lambda_{\mathrm{A}} = \frac{2}{5}\,\mathrm{m}\,.$$
$$\frac{1}{2}\lambda_{\mathrm{B}} \times 2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\,, \qquad \therefore \lambda_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\,.$$

A 側，B 側それぞれの波の伝わる速さをそれぞれ v_{A}，v_{B} とすると，波の基本式より $f_1 = 2v_{\mathrm{A}} = 1 \cdot v_{\mathrm{B}}$ ゆえ，A 側の 5 倍振動，および B 側の 2 倍振動の振動数は，

$$f_{\mathrm{A}} = \frac{v_{\mathrm{A}}}{2/5} = \frac{5}{4}f_1\,, \quad f_{\mathrm{B}} = \frac{v_{\mathrm{B}}}{1/2} = 2f_1\,.$$

問 4　$f = 2f_1$ で次に両側で定常波が生じる（A 側では 8 倍振動，B 側では 2 倍振動）．このとき，A 側では腹が 8 個の定常波が，B 側では腹が 2 個の定常波が生じる．よって，それぞれの波長は，

$$\frac{1}{2}\lambda_{\mathrm{A}} \times 8 = 1\,\mathrm{m}\,, \qquad \therefore \lambda_{\mathrm{A}} = 0.25\,\mathrm{m}\,.$$
$$\frac{1}{2}\lambda_{\mathrm{B}} \times 2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{m}\,, \qquad \therefore \lambda_{\mathrm{B}} = 0.5\,\mathrm{m}\,.$$

問 5　題意より，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{v_{\mathrm{A}}}{f_1} \times 4 = 1\,, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{v_{\mathrm{A}}}{f_1 + 220} \times 6 = 1\,, \end{cases} \qquad \therefore v_{\mathrm{A}} = 220\,\mathrm{m/s}\,, \quad f_1 = 440\,\mathrm{Hz}\,.$$

問 6　基本振動ゆえ λ は一定値を取る．波の基本式，および弦を伝わる波の速さの公式，およびつりあいより，

$$\begin{aligned} f_1 + \varDelta f &= \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{M_{\mathrm{B}} + \varDelta M}{\rho}g} \\ \varDelta f &= \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{M_{\mathrm{B}}g}{\rho} + \frac{\varDelta M g}{\rho}} - \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{M_{\mathrm{B}}g}{\rho}} \\ &= \underbrace{\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{M_{\mathrm{B}}g}{\rho}}}_{=f_1}\left(\sqrt{1 + \frac{\varDelta M}{M_{\mathrm{B}}}} - 1\right) \\ &\fallingdotseq f_1\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\varDelta M}{M_{\mathrm{B}}} - 1\right) \\ &= \frac{\varDelta M}{2M_{\mathrm{B}}}f_1\,. \end{aligned}$$

問 7　与えられた数値より，

$$\varDelta f = \frac{\frac{4}{100}M_{\mathrm{B}}}{2M_{\mathrm{B}}} \cdot 440\,\mathrm{Hz} = 8.8\,\mathrm{Hz}\,.$$

よって，

$$\begin{cases} |f_4 - 440| = 2\,, & \therefore f_4 = 442\,\mathrm{Hz}\,,\ 438\,\mathrm{Hz}\,, \\ |f_4 - 448.8| \fallingdotseq 7\,, & \therefore f_4 \fallingdotseq 441.8\,\mathrm{Hz}\,,\ 455.8\,\mathrm{Hz}\,, \end{cases} \qquad \therefore f_4 = 442\,\mathrm{Hz}\,.$$