1

I 衝突，時間追跡ー等加速度

【メモ】

・衝突は，以下の 2 式連立が基本．

$$\left\{ \text{撃力のない方向成分の直前・直後の運動量保存則問題文の条件} \right.$$

・高校範囲で時間追跡可能な運動は，等加速度運動，単振動，速度に比例した空気抵抗の運動の 3 つであり，前 2 つはエネルギーによる解法の選択も可能．この問題では，時間追跡の誘導が付いているため時間追跡で考える．

【解答】

問 1　面がなめらかなことから，面に平行な速度成分 $v_{//}$ は不変，面に垂直な成分 $v_{\perp}$ は $-e$ 倍される．衝突直前の速度 $\vec{v}_0$ を斜面に平行な成分（斜面上向き正）と垂直な成分（斜面の左上向きを正）で表せば，

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{//} \\ v_{\perp} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_0 \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} .$$

よって，衝突後の速度 $\vec{v}$ を斜面に平行な成分（斜面上向き正）と垂直な成分（斜面の左上向きを正）で表せば，

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} v_0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} e v_0 \end{pmatrix} .$$

以上より，$e = 1$ では (ア)，$e = 0$ では (イ) とわかる．

問 2　題意より，

$$\vec{v}_{//} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_0 \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} , \quad \vec{v}_{\perp} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_0 \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} .$$

問 3　衝突の条件より[*1]，

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{v}'_{//} &= \vec{v}_{//} \, , \\ \vec{v}'_{\perp} &= -e \vec{v}_{\perp} \, , \end{aligned} \right. \qquad \therefore \vec{v}' = \vec{v}'_{//} + \vec{v}'_{\perp} = \frac{v_0}{2} \begin{pmatrix} 1 - e \\ 1 + e \end{pmatrix} .$$

[*1] 単位ベクトルで書くと余計に汚くなるのでこの形で表した．

問 4　$t = 0$ で,

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(0) = \frac{v_0}{2}\begin{pmatrix} 1-e \\ 1+e \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix},$$

より,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\begin{pmatrix} \dfrac{1-e}{2}v_0 t \\ \dfrac{1+e}{2}v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}}.$$

問 5　問 4 より,

$$t = \frac{2}{1-e}\frac{x}{v_0}$$

ゆえ,

$$\begin{aligned} y &= \frac{1+e}{2}v_0\frac{2}{1-e}\frac{x}{v_0} - \frac{1}{2}g\left(\frac{2}{1-e}\frac{x}{v_0}\right)^2 \\ &= \frac{1+e}{1-e}x - \frac{2g}{(1-e)^2{v_0}^2}x^2 \\ \therefore a &= \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1+e}{1-e}}, \quad b = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{2g}{(1-e)^2{v_0}^2}}. \end{aligned}$$

問 6　$y\left(x = \dfrac{h}{2}\right) > \dfrac{h}{2}$ を満たせばよいので,

$$\frac{1+e}{1-e}\frac{h}{2} - \frac{2g}{(1-e)^2{v_0}^2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 > \frac{h}{2}, \qquad \therefore v_0 > \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{gh}{2e(1-e)}}}\,(= V).$$

Ⅱ 中身の見えるコンデンサ

【メモ】

・電場の計算は，点電荷の作る電場（公式），形状のある帯電体の作る電場（ガウス則），電位分布から逆算の 3 通り．

・電荷 Q が一様に帯電した面積 S 平板の作る電場 E はガウス則より，真空の誘電率を ε_0 として[*2]，

$$E\cdot 2S = \frac{Q}{\varepsilon_0}\,, \qquad \therefore E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}\,.$$

これは，導出ができる状態にしておきながら覚えておきたい「公式」．

・平行平板コンデンサ（間隔 d）の内部電場は平行一様電場と見なせるため，コンデンサの電位差 $\Delta\phi$ と極板間電場 E の間には次の関係がある．

$$\Delta\phi = Ed\,.$$

ここにガウス則を合わせれば，

$$Q = \varepsilon_0\frac{S}{d}\Delta\phi.$$

となり，静電容量 $C = \varepsilon_0\dfrac{S}{d}$ を得る[*3]．

・コンデンサの中身を見る問題は，電位の関係として $\Delta\phi = \dfrac{Q}{C}$ を使う問題，$\Delta\phi = Ed$ を使う問題（と両方を使い分ける問題）に分類される．

【解答】

問 1　容量は公式より，

$$C = \underbrace{\varepsilon_0\frac{L^2}{d}}_{ア}\,.$$

また，キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} V_0 - \dfrac{Q}{C} = 0\,, \\ V_0 - Ed = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore Q = \underbrace{\varepsilon_0\frac{L^2}{d}V_0}_{イ}\,, \quad E = \underbrace{\frac{V_0}{d}}_{ウ}\,.$$

よって，静電エネルギーは公式より，

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \underbrace{\frac{\varepsilon_0 L^2 {V_0}^2}{2d}}_{エ}\,.$$

[*2] ここでは，平板の端の影響を考えていない．

[*3] 他の形状のコンデンサの容量を求める場合も，ガウス則より E と Q の関係，電位の関係（キルヒホッフ則）より $\Delta\phi$ と E の関係を得て，これらを組み合わせることで Q と $\Delta\phi$ の関係を作り，この比例係数から容量を読み取る流れとなる．

問 2 (a)　導体：電位⑧，電場⑩　　　誘電体：電位③，電場⑪

(b)　ガウス則より，各極板からは $E=\dfrac{Q}{2\varepsilon_0 L^2}$ の電場が生じている．導体の場合の上側の極板の電位は，キルヒホッフ則より，

$$\phi=E\frac{d}{4}+0+E\frac{d}{4}=\underbrace{\frac{1}{2}V_0}_{\text{オ}}\ .$$

誘電体の場合，誘電体内部の電場は $E'=\dfrac{Q}{\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0 L^2}$ となる．よって，キルヒホッフ則より，

$$\phi=E\frac{d}{4}+E'\frac{d}{2}+E\frac{d}{4}=\underbrace{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}\right)V_0}_{\text{カ}}\ .$$

問 3　容量の合成則より，誘電体側の極板が形成するコンデンサの容量 C' は，

$$\frac{1}{C'}=\frac{1}{\varepsilon_0\dfrac{L^2/2}{d/2}}+\frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0\dfrac{L^2/2}{d/2}}\,,\qquad \therefore C'=\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}}{\varepsilon_{\mathrm{r}}+1}\varepsilon_0\frac{L^2}{d}\,.$$

よって，容量の合成則より，

$$C=\varepsilon_0\frac{L^2/2}{d}+\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}}{\varepsilon_{\mathrm{r}}+1}\varepsilon_0\frac{L^2}{d}=\underbrace{\frac{3\varepsilon_{\mathrm{r}}+1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}+1}\frac{\varepsilon_0 L^2}{2d}}_{\text{キ}}\ .$$

また，静電エネルギーは公式より，

$$U=\frac{1}{2}\frac{(CV_0)^2}{C}=\underbrace{\frac{3\varepsilon_{\mathrm{r}}+1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}+1}\frac{\varepsilon_0 L^2}{4d}{V_0}^2}_{\text{ク}}\ .$$

【補足 1】問 3

誘電体が挿入されている側の帯電量を Q_1，されていない側の帯電量を Q_2 とする．ガウス則より，それぞれの極板の作る電場は $\dfrac{Q_1}{2\varepsilon_0 L^2/2}$，$\dfrac{Q_2}{2\varepsilon_0 L^2/2}$ であり，キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} V_0-\dfrac{Q_1}{\varepsilon_0 L^2/2}d=0\,, \\ V_0-\dfrac{Q_2}{\varepsilon_0 L^2/2}\dfrac{d}{4}-\dfrac{Q_2}{\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0 L^2}\dfrac{d}{2}-\dfrac{Q_2}{\varepsilon_0 L^2}\dfrac{d}{4}=0\,, \end{cases}\qquad \therefore Q_1=\varepsilon_0\frac{L^2}{2d}V_0\,,\quad Q_2=\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}}{\varepsilon_{\mathrm{r}}+1}\frac{\varepsilon_0 L^2}{d}V_0\,.$$

よって，極板の帯電量から，

$$Q_{\mathrm{tot}}=Q_1+Q_2=\frac{3\varepsilon_{\mathrm{r}}+1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}+1}\frac{\varepsilon_0 L^2}{2d}V_0\,,\qquad \therefore C=\frac{3\varepsilon_{\mathrm{r}}+1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}+1}\frac{\varepsilon_0 L^2}{2d}\,.$$

Ⅲ 熱力学ー基本

【メモ】

・熱力学の基本的（むらがなく熱あり）な過程に関する問題．可動部分のつりあいから圧力の決定，状態方程式から温度の決定．内部エネルギー変化を公式，気体のする仕事を $P-V$ 図の面積評価，熱力学第 1 法則を通じて熱を計算するのが基本．

【解答】

問 1　状態方程式より，

$$\begin{cases} PV = RT_0\,, \\ P'V = 2RT_0\,, \end{cases} \qquad \therefore \frac{P'}{P} = \underbrace{2}_{\text{ア}}\,.$$

内部エネルギー変化は公式より，

$$\varDelta U = \frac{3}{2}R(2T_0 - T_0) = \underbrace{\frac{3}{2}}_{\text{イ}} \times RT_0\,.$$

問 2　内部気体の圧力は，ピストンのつりあいより，

$$P = \underbrace{P_0}_{\text{ウ}}\,.$$

よって，温度は状態方程式より，

$$T = \underbrace{\frac{P_0 S\ell}{R}}_{\text{エ}}\,.$$

問 3　ピストンのつりあいより，

$$0 = PS + Mg\sin\theta - P_0 S\,, \qquad \therefore P = \underbrace{P_0 - \frac{Mg}{S}\sin\theta}_{\text{オ}}\,.$$

ℓ' は状態方程式より，

$$\left(P_0 - \frac{Mg}{S}\sin\theta\right)S\ell' = R\frac{P_0 S\ell}{R}\,, \qquad \therefore \ell' = \underbrace{\frac{P_0 S}{P_0 S - Mg\sin\theta}\ell}_{\text{カ}}\,.$$

また，$\ell' \to L$ での温度 T' も状態方程式より，

$$\left(P_0 - \frac{Mg}{S}\sin\theta\right)SL = RT'\,, \qquad \therefore \ell' = \underbrace{\frac{(P_0 S - Mg\sin\theta)L}{R}}_{\text{キ}}\,.$$

この間の内部エネルギー変化は，公式より，

$$\varDelta U = \frac{3}{2}R(T' - T) = \underbrace{\frac{3}{2}\{P_0 S(L-\ell) - Mg\sin\theta\}}_{\text{コ}}\,.$$

仕事は $P-V$ 図より，

$$W=\left(P_0-\frac{Mg}{S}\sin\theta\right)S(L-\ell')=\underbrace{P_0S(L-\ell)-MgL\sin\theta}_{ケ}.$$

よって，吸収熱は熱力学第 1 法則より，

$$Q=\Delta U+W=\underbrace{\frac{5}{2}\{P_0S(L-\ell)-Mg\sin\theta\}}_{ク}.$$