I 非等速円運動，複数物体系

【メモ】

・問 1，問 2 は非等速円運動．以下 2 式を連立して解く．

$$\begin{cases} \text{運動方程式の中心成分} \\ \text{力学的エネルギー保存則} \end{cases}$$

・問 3 以降は複数物体系の力学．全体を 1 つと見て保存則を連立するのが基本．

$$\begin{cases} \text{運動量保存則} \\ \text{力学的エネルギー保存則} \end{cases}$$

【解答】

問 1　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = mgh\,, \qquad \therefore v_0 = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{2gh}}\,.$$

問 2　運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{(\sqrt{2gh})^2}{h} = S - mg\,, \qquad \therefore S = \underset{\sim\sim}{3mg}\,.$$

問 3　運動量保存則より，

$$mV_1 + MV_1 = mv_0\,, \qquad \therefore V_1 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{m}{M+m}\sqrt{2gh}}\,.$$

問 4　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m{V_1}^2 + \frac{1}{2}M{V_1}^2 + \frac{1}{2}kX^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2\,, \qquad \therefore X = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{2Mm}{k(M+m)}gh}}\,.$$

問 5　力学的エネルギー・運動量保存則より[*1]，

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m{v_2}^2 + \frac{1}{2}M{V_2}^2 + 0 = \frac{1}{2}m{v_0}^2\,, \\ mv_2 + MV_2 = mv_0\,, \end{cases} \qquad \therefore v_2 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{m-M}{M+m}\sqrt{2gh}}\,,\quad V_2 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{2m}{M+m}\sqrt{2gh}}\,.$$

[*1] 力学的エネルギー保存則は，

$$M{V_2}^2 = m(v_0 + v_2)(v_0 - v_2)$$

と変形できて，ここに運動量保存則から得られる $MV_2 = m(v_0 - v_2)$ を代入すると楽（これははね返り係数が 1 の式と同値）．

問 6　物体が台に対して静止したときの 2 物体の速度を v とする．運動量保存則より，

$$mv + Mv = mv_0\,, \qquad \therefore v = \frac{m}{M+m}v_0\,.$$

各物体の変位をそれぞれ x，X とすれば，エネルギー収支より，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{1}{2}m{v_2}^2 = \mu mgx\,, \\ \dfrac{1}{2}Mv^2 - \dfrac{1}{2}m{V_2}^2 = -\mu mgX \end{cases} \qquad \therefore L = X - x = \underline{\frac{M}{M+m}\frac{h}{\mu}}\,.$$

II 点電荷

【メモ】

・仕事の計算は以下の 3 つに分類される．

$$\begin{cases} \text{定義通り} \begin{cases} F\text{ が一定なら } W = |\vec{F}||\varDelta\vec{r}|\cos\theta \\ F\text{ が非一定なら 1 次元に帰着し } W = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} F\,dx \end{cases} \\ \text{エネルギー収支から逆算} \end{cases}$$

エネルギー収支を用いた仕事の計算は，どこまでを 1 つの系と見なすかが重要．

【解答】

問 1　電場の x 軸成分は相殺し 0．公式より，

$$E_{\mathrm{C}} = \frac{kQ}{a^2+b^2}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \times 2 = \frac{2kQ}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

問 2　$x > a$ では，

$$V(x) = \frac{kQ}{x-a} + \frac{kQ}{x+a} = \frac{2kQx}{x^2-a^2}\,.$$

$-a < x < a$ では，

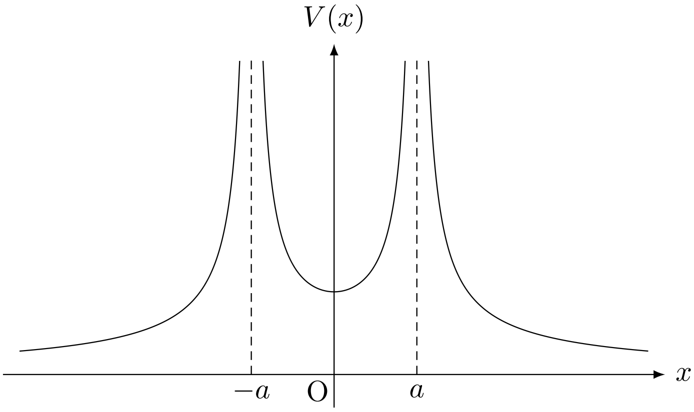
$$V(x) = \frac{kQ}{a-x} + \frac{kQ}{x+a} = -\frac{2kQa}{x^2-a^2}\,.$$

$x < -a$ では，

$$V(x) = \frac{kQ}{a-x} + \frac{kQ}{-a-x} = -\frac{2kQx}{x^2-a^2}\,.$$

よって，

$$V(x) = \begin{cases} \dfrac{2kQ|x|}{x^2-a^2} & (|x| > a)\,, \\ -\dfrac{2kQa}{x^2-a^2} & (|x| < a)\,. \end{cases}$$



問 3　公式より，

$$F = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{2kQb}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}}\,.$$

問 4　系（物体と電場）全体の力学的エネルギー収支より，

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{ex}} &= \left(\frac{1}{2}m\cdot 0^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2\right) + \left\{ q\left(\frac{kQ}{4a/3}+\frac{kQ}{2a/3}\right) - q\left(\frac{2kQ}{\sqrt{a^2+(3a/4)^2}}\right)\right\} \\ &= \frac{13}{20}\frac{kQq}{a}\,. \end{aligned}$$

問 5　系（物体と電場）全体の力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{kQq}{a}\times 2 = \frac{1}{2}m\cdot 0^2 + \frac{kQq}{4a/3} + \frac{kQq}{2a/3}\,, \qquad \therefore v = \sqrt{\frac{kQq}{2ma}}\,.$$

問 6　問 2 の図と同様に考えれば，$x = -\dfrac{a}{6}$ で電位が最小になり，この位置で速さは最大となる．力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{kQq}{5a/6} + \frac{kQq}{5a/6} = \frac{1}{2}m\cdot 0^2 + \frac{kQq}{2a/3} + \frac{kQq}{a}\,, \qquad \therefore v = \sqrt{\frac{kQq}{5ma}}\,.$$

【補足 1】問 5

物体のみを系と見れば，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 &= \int_{-\frac{a}{3}}^{0}\left\{-\frac{kQq}{(x-a)^2}+\frac{kQq}{(x+a)^2}\right\}dx \\ &= \left[\frac{kQq}{x-a} - \frac{kQq}{(x+a)}\right]_{-\frac{a}{3}}^{0} \\ &= \frac{kQq}{4a} \\ \therefore v &= \sqrt{\frac{kQq}{2ma}}\,. \end{aligned}$$

【補足２】問 **6**

位置 x における点電荷の運動エネルギーは，

$$\frac{1}{2}mv^2 = \left(\frac{kQq}{2a/3} + \frac{kQq}{a/3}\right) - \left(\frac{kQq}{x+a} + \frac{kQq}{2a/3 - x}\right)$$

であり，2 つ目の括弧の中身が最小であるときを考えればよい．これを $u(x)$ と記せば，

$$u(x) = \frac{kQq}{x+a} + \frac{kQq}{\dfrac{2a}{3} - x} = \frac{\dfrac{5}{3}a}{-\left(x + \dfrac{a}{6}\right)^2 + \dfrac{25}{36}a^2}$$

となり，$x = -\dfrac{a}{6}$ で最大値をとることがわかる．

III 幾何光学

【メモ】・幾何光学で用いる物理法則は屈折の法則のみ．あとは図形の考察を行う．図形の考察は，

- 角と角　→　平行線，または三角形の内角・外角
- 辺と辺　→　相似を利用
- 角と辺　→　三角比を利用[*2]

によって行う．

【解答】

問 1　スネル則より，

$$n_0 \sin i = n_1 \sin r\,, \qquad \therefore \frac{n_1}{n_0} = \frac{\sin i}{\sin r}\,.$$

問 2　頂点 A とプリズム内を通る光線からなる三角形の内角に注目して，

$$\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - i'\right) = \pi\,, \qquad \therefore i' = \alpha - r\,.$$

問 3　スネル則より，

$$\begin{cases} n_0 \sin i = n_1 \sin r\,, \\ n_0 \sin r' = n_1 \sin i'\,, \end{cases}$$

$i = i_1$ のとき，$r' = i_1$ より，

$$\begin{cases} n_0 \sin i = n_1 \sin r\,, \\ n_0 \sin i_1 = n_1 \sin(\alpha - r)\,, \end{cases} \qquad \therefore \sin(\alpha - r) = \sin r\,, \qquad \therefore r = \frac{\alpha}{2}\,.$$

よって，

$$n_0 \sin i_1 = n_1 \sin \frac{\alpha}{2}\,, \qquad \therefore \frac{n_1}{n_0} = \frac{\sin i_1}{\sin(\alpha/2)}\,.$$

問 4　$n_{\lambda_2} > n_{\lambda_1}$ より，n_{λ_1}，n_{λ_2} の光の面 AB での屈折に対する屈折角をそれぞれ r_1，r_2 とすれば，

$$\frac{\sin i}{\sin r_2} > \frac{\sin i}{\sin r_1}\,, \qquad \therefore r_1 > r_2\,.$$

よって，面 AB の入射後の光線の様子としては，波長 λ_1 の光線が λ_2 の光線よりも上にある状況となる．

[*2] 正弦定理，余弦定理に注意.

続いて，面 AC での屈折に対する入射角をそれぞれ i_1'，i_2'，屈折角をそれぞれ r_1'，r_2' とすれば，

$i_2' > i_1'$ より，

$$\frac{\sin r_2'}{\sin i_2'} > \frac{\sin r_1'}{\sin i_1'} > \frac{\sin r_1'}{\sin i_2'}\,, \qquad \therefore r_2' > r_1'\,.$$

以上より，(b)[*3].

問 5　面 AC におけるスネル則より，

$$n_0 \sin r' = n_1 \sin i'\,, \qquad \therefore \sin r' = \frac{n_1}{n_0}\sin i' > 1$$

ならば屈折角 r' は存在せず，全反射が観測される．よって[*4]，

$$\sin i' > \frac{n_0}{n_1}\,.$$

問 6　$i = i_3$ のとき i' は臨界角となり $r' = \dfrac{\pi}{2}$ である．$n_0 = 1$ より，

$$\begin{cases} 1 \cdot \sin i_3 = n_1 \sin r\,, \\ 1 \cdot \sin \dfrac{\pi}{2} = n_1 \sin i' = n_1 \sin(\alpha - r)\,. \end{cases}$$

ここで，下の面 AC での屈折に関する式より[*5]，

$$n_1(\sin\alpha\cos r - \cos\alpha\sin r) = 1$$

$$n_1\left\{\sin\alpha\sqrt{1 - \left(\frac{\sin i_3}{n_1}\right)^2} - \frac{1}{n_1}\cos\alpha\sin i_3\right\} = 1$$

$$\sin^2 i_3 + 2\cos\alpha\sin i_3 + 1 - {n_1}^2\sin^2\alpha = 0$$

$$\therefore \sin i_3 = -\cos\alpha + \sqrt{({n_1}^2 - 1)}\,\sin\alpha\,.$$

[*3] このような議論をしなくても，$n_{\lambda_2} > n_{\lambda_1}$ より，λ_2 の光の方がよく曲がることから (b) と判断してよい．

[*4] この不等式を入射角 i，頂角 α，屈折率 n_0，n_1 だけで書くと以下のようになる（計算は各自）．

$$\sin i < -\cos\alpha + \sqrt{(n_1/n_0)^2 - 1}\,\sin\alpha\,.$$

また，全反射が観測されるためにはこのような入射角 i が存在する必要があり，そのためには，屈折率を以下の不等式を満たすように選ぶ必要がある（上記不等式において $0 < \sin i < 1$ を考える）．

$$\sin\frac{\alpha}{2} < \frac{n_0}{n_1} < \sin\alpha\,.$$

[*5] $i = 0$ ゆえ，$r = 0$，$i' = \alpha - r = \alpha$ であり，このときに全反射することから，スネル則より，

$$\sin r' = n_1 \sin i' = n_1 \sin\alpha > 1\,.$$

ここで，

$$\sin i_3 = -\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha + {n_1}^2\sin^2\alpha + 1}$$

より，$\sin i_3 > 0$ が確認できる．