I　複数物体系（衝突），時間追跡（等加速度），摩擦

【メモ】

・衝突は，

$$\begin{cases} \text{外力のない方向の運動量保存則} \\ \text{問題文の条件} \end{cases}$$

で処理する．この問題では，前半が弾性衝突，後半がはね返り係数が衝突の条件となっている．

・B と C の運動は等加速度運動となるが，時刻 t が問われているので時間追跡で解く[*1]．

【解答】

問 1　物体 A，B，C から成る系の運動量保存則，エネルギー収支の式より[*2*3]，$v_{\mathrm{B0}} \neq 0$ の下で，

$$\begin{cases} 2mv_{\mathrm{A0}} + mv_{\mathrm{B0}} + m\cdot 0 = 2mv_0\,, \\ \left(\dfrac{1}{2}\cdot 2m{v_{\mathrm{A0}}}^2 - \dfrac{1}{2}\cdot 2m{v_0}^2\right) + \left(\dfrac{1}{2}m{v_{\mathrm{B0}}}^2 - 0\right) + \left(\dfrac{1}{2}m\cdot 0^2 - 0\right) = -\mu mg\cdot 0\,. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_{\mathrm{B0}} = 2(v_0 - v_{\mathrm{A0}})\,, \\ {v_{\mathrm{B0}}}^2 = 2({v_0}^2 - {v_{\mathrm{A0}}}^2) = 2(v_0 + v_{\mathrm{A0}})(v_0 - v_{\mathrm{A0}}) = v_{\mathrm{B0}}(v_0 + v_{\mathrm{A0}})\,. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_{\mathrm{B0}} = 2(v_0 - v_{\mathrm{A0}})\,, \\ v_{\mathrm{B0}} = v_0 + v_{\mathrm{A0}}\,. \end{cases}$$

以上 2 式を解いて，

$$v_{\mathrm{A0}} = \frac{1}{3}v_0\,,\quad v_{\mathrm{B0}} = \frac{4}{3}v_0\,.$$

問 2　運動方程式は，

$$ma_{\mathrm{B}} = -\mu mg\,,\qquad \therefore a_{\mathrm{B}} = -\mu g\,.$$

よって，加速度一定より，

$$v_{\mathrm{B}} = \frac{4}{3}v_0 - \mu gt\,.$$

[*1] 運動量と力積の関係を用いても求まるが，試験場での頭の使い方（閃かないで解く観点）としては時間追跡が良い．

[*2] 問題文では運動量保存則という言葉遣いだったため，説明のために厳密に運動量が保存する C まで含めた系を考えたが，試験場では問題文の指示通り，A と B から成る系の衝突の直前直後で運動量の和，運動エネルギーの和が一定を示す式を立てるのが良いだろう．

[*3] 以下の式変形のようにエネルギーに関する式を運動量保存則を用いて整理することで $e = 1$ のはね返り係数の式と同値な式が得られる．

問 3　B，C の加速度は運動方程式より，

$$\begin{cases} ma_{\mathrm{B}} = -\mu mg\,, \\ ma_{\mathrm{C}} = \mu mg\,, \end{cases} \qquad \therefore a_{\mathrm{B}} = -\mu g\,,\ \ a_{\mathrm{C}} = \mu g\,.$$

よって，C の速度 v_{C} は，

$$v_{\mathrm{C}} = \mu gt\,.$$

$v_{\mathrm{B}} = v_{\mathrm{C}}$ を解いて，

$$t_{\mathrm{BC}} = \frac{2}{3}\frac{v_0}{\mu g}\,,\ \ v_{\mathrm{BC}} = \mu g\frac{2v_0}{3\mu g} = \frac{2}{3}v_0\,.$$

また，このとき，

$$x_{\mathrm{B}} = \frac{4}{3}v_0 t_{\mathrm{BC}} + \frac{1}{2}(-\mu g){t_{\mathrm{BC}}}^2 = \frac{2}{3}\frac{{v_0}^2}{\mu g}\,,$$

$$x_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}\mu g{t_{\mathrm{BC}}}^2 = \frac{2}{9}\frac{{v_0}^2}{\mu g}\,.$$

問 4　物体 B，C のエネルギー収支より，

$$W_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}m\left(\frac{2}{3}v_0\right)^2 - \frac{1}{2}m\left(\frac{4}{3}v_0\right)^2 = -\frac{2}{3}m{v_0}^2\,,$$

$$W_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}m\left(\frac{2}{3}v_0\right)^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = \frac{2}{9}m{v_0}^2\,,$$

$$W_{\mathrm{B}} + W_{\mathrm{C}} = -\frac{4}{9}m{v_0}^2\,.$$

問 5　衝突後の各物体の速度を v，u とする．運動量保存則・はね返り係数の式より，

$$\begin{cases} Mv + Mu = MV\,, \\ v - u = -e(V-0)\,. \end{cases} \qquad \therefore v = \frac{1-e}{2}V\,,\ \ u = \frac{1+e}{2}V\,.$$

よって，系のエネルギーの変化量は，

$$\frac{1}{2}M\left(\frac{1-e}{2}V\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{1+e}{2}V\right)^2 - \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MV\left\{\left(\frac{1-e}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+e}{2}\right)^2 - 1\right\}$$
$$= -\frac{1}{4}(1-e^2)MV^2\,.$$

問 6 (1)　はね返り係数の式より，

$$\frac{1}{3}v_0 - \frac{2}{3}v_0 = -e_{\mathrm{BC}}(v_0 - 0)\,, \qquad \therefore e_{\mathrm{BC}} = \frac{1}{3}\,.$$

(2)　問 4，問 5(a) より，

$$-\frac{1}{2}\cdot 2m{v_0}^2\left(1-\frac{1}{9}\right)=\underset{\sim\sim\sim}{-\frac{4}{9}m{v_0}^2}=\underset{\sim\sim\sim}{W_{\mathrm{B}}+W_{\mathrm{C}}}\,.$$

【補足 1】問 3 を運動量と力積の関係で論じる

2 物体の速度が等しくなったときの速度は，運動量保存則より，

$$(m+m)v_{\mathrm{BC}}=m\frac{4}{3}v_0\,,\qquad v_{\mathrm{BC}}=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{2}{3}mv_0}\,.$$

物体 B にはたらく水平方向の力は動摩擦力だけで，物体 B がこの間に受ける力積は，

$$I_{\mathrm{B}}=-\mu g t_{\mathrm{BC}}\,.$$

運動量と力積の関係から，

$$\frac{2}{3}mv_0-\frac{4}{3}mv_0=-\mu g t_{\mathrm{BC}}\,,\qquad \therefore t_{\mathrm{BC}}=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{2}{3}\frac{v_0}{\mu g}}\,.$$

【補足 2】補足 1 の補足

物体間の相互作用を f とし，f が一定の場合を考える．2 物体の運動方程式より[*4]，

$$\begin{cases}\dfrac{\Delta p_1}{\Delta t}=+f\,,\\ \dfrac{\Delta p_2}{\Delta t}=-f\,,\end{cases}\iff\begin{cases}\Delta p_1=+f\Delta t\,,\\ \Delta p_1+\Delta p_2=0\,,\end{cases}$$

となり，この関係式を用いた．

今，2 物体の系に外力がなく相互作用力の詳細が分かっていてかつ大きさが一定ゆえ力積が計算しやすい，2 物体の速度が一致したとき，など様々な条件が重なったことによりこのような楽（？）な解法がある．試験場では最初に提示した解答の方が（頭を使わないで解けるので）良い．

【補足 3】C が B 上をすべった距離いろいろ（エネルギー収支，時間追跡，$v-t$ 図の面積）

エネルギー収支を利用した求め方で計算してみる．両物体の初期位置からの変位をそれぞれ Δx_{B}，Δx_{C} とする．両物体のエネルギー収支より，

$$\begin{cases}\Delta K_{\mathrm{B}}=-\mu mg\Delta x_{\mathrm{B}}\,,\\ \Delta K_{\mathrm{C}}=+\mu mg\Delta x_{\mathrm{C}}\,.\end{cases}$$

[*4] 上の式は分母を払い，下の式は 2 式和を取った．

C が B 上をすべった距離を L とすると，$L=\mathit{\Delta} x_{\mathrm{B}}-\mathit{\Delta} x_{\mathrm{C}}$ より，2 式和を取って，

$$\begin{aligned}
\mathit{\Delta} K_{\mathrm{B}}+\mathit{\Delta} K_{\mathrm{C}} &= -\mu mg(\mathit{\Delta} x_{\mathrm{B}}-\mathit{\Delta} x_{\mathrm{C}}) \\
-\frac{4}{9}m{v_0}^2 &= -\mu gL \\
\therefore L &= \frac{4}{9}\frac{{v_0}^2}{\mu g}\,.
\end{aligned}$$

時間追跡の結果を利用して求めてみる．加速度一定より，初期位置をそれぞれ 0 ととれば，

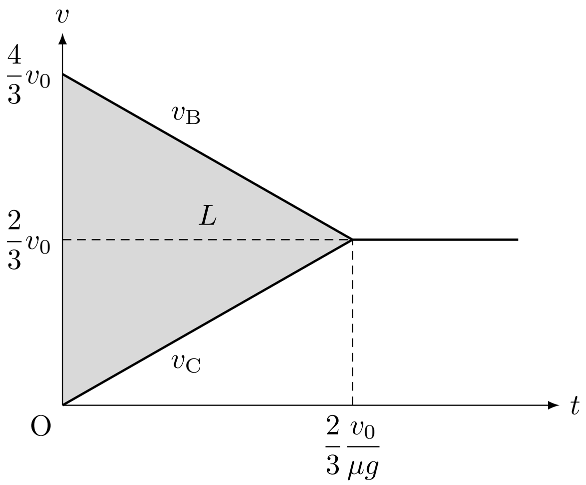
$$\begin{cases} x_{\mathrm{B}}=\dfrac{4}{3}v_0t-\dfrac{1}{2}\mu gt^2\,, \\ x_{\mathrm{C}}=\dfrac{1}{2}\mu gt^2\,. \end{cases}$$

ここに，$t=\dfrac{2v_0}{3\mu g}$ を代入して，

$$L=x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{C}}=\frac{4}{3}v_0\frac{2v_0}{3\mu g}-\frac{1}{2}\mu g\left(\frac{2v_0}{3\mu g}\right)^2\times 2=\frac{4}{9}\frac{{v_0}^2}{\mu g}\,.$$

加速度一定の運動の変位は $v-t$ 図を利用すると楽なことが多い．$v-t$ 図の面積より，

$$L=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}v_0\times\frac{2v_0}{3\mu g}=\frac{4}{9}\frac{{v_0}^2}{\mu g}\,.$$



Ⅱ　回路の一部が動く電磁誘導

【メモ】

・回路の一部が動く電磁誘導は，誘導起電力の決定では $vB\ell$ の公式が基本となる．

・電磁誘導の問題は，

① 誘導起電力の決定

② 回路の議論

③ 運動の議論

④ エネルギーの議論

のような作りが定石となっている．

【解答】

問 1　誘導起電力の大きさは，公式より，

$$V = \underbrace{v_0 B w}_{\text{(a)}} \,.$$

回路図を考えれば，電流の向きは $\underline{y\text{ 負方向}}$ である．大きさはキルヒホッフ則より，

$$v_0 B w - 2RI = 0\,, \qquad \therefore I = \underbrace{\frac{v_0 B w}{2R}}_{\text{(b)}} \,.$$

導体棒のつりあいより，

$$0 = F_{\mathrm{ex}} - IBw\,, \qquad \therefore F_{\mathrm{ex}} = \underbrace{\frac{v_0 B^2 w^2}{2R}}_{\text{(c)}} \,.$$

消費電力[*5]は公式より，

$$P = RI^2 = \underbrace{\frac{(v_0 B w)^2}{4R}}_{\text{(d)}} \,.$$

問 2　導体棒に沿って x 軸を定め，その原点を円弧の部分の円の中心とする．導体棒の中点の位置は，

$$x = \frac{r + (r+w)}{2} = \frac{2r+w}{2}\,.$$

角速度は[*6]，

$$\omega = \frac{v_0}{r+w}\,.$$

[*5] 抵抗で単位時間に生じるジュール熱．

[*6] ω（オメガ）と w（ダブリュ）に注意．

よって，生じる誘導起電力は中点での速さを用いて，

$$V = \frac{2r+w}{2}\omega Bw = \underline{\frac{w(2r+w)}{2(r+w)}v_0 B}\,.$$

問 3　運動方程式は，

$$\underline{ma = i_2 Bw}_{\text{(a)}}\,.$$

キルヒホッフ則より[7][8]，

$$\begin{cases} 0 = v_0 Bw - Ri_1 - R(i_1+i_2)\,, \\ 0 = v_2 Bw - Ri_2 - R(i_1+i_2)\,, \end{cases} \qquad \therefore i_2 = \underline{\frac{Bw}{3R}(2v_2 - v_0)}_{\text{(b)}}\,.$$

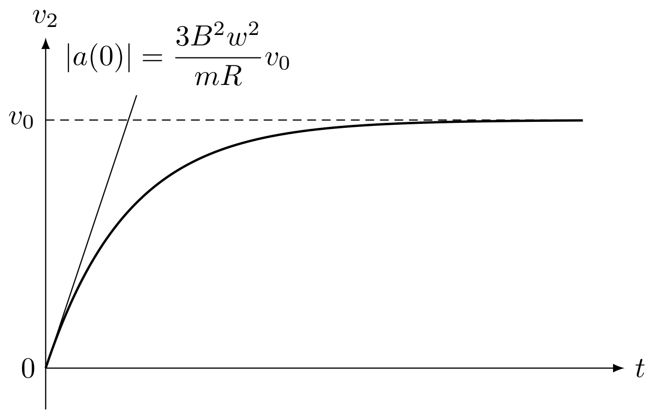
運動方程式にキルヒホッフ則の結果を代入し，$t=0$ で $v_2=0$ より，

$$a(0) = \frac{(Bw)^2}{3mR}(0-v_0) = \underline{-\frac{B^2w^2}{3mR}v_0}_{\text{(c)}}\,.$$

任意の時刻での加速度 a は導体棒 2 の速度 v が $v=-v_2$ と与えられることから，

$$\frac{dv}{dt} = i_2 Bw = -\frac{2(Bw)^2}{3mR}\left(v + \frac{1}{2}v_0\right)\,.$$

はじめ $v=0$ であり，$v > -\frac{1}{2}v_0$ の範囲で常に $\frac{dv}{dt} < 0$ より，$x<0$ 方向へ加速していき，$v = -\frac{1}{2}v_0$ となった瞬間に加速されなくなり，以降等速度運動となる．よって，運動の方向は $\underline{x\ \text{負方向}}_{\text{(d)}}$ であり，十分時間が経過したときの A_2 の速さは $v_2 = \underline{\frac{1}{2}v_0}_{\text{(d)}}$ である．また，速さのグラフは以下のようになる[9][10]．



[7] 導体棒 1 に y 軸正方向に流れる電流を i_1 とおき，導体棒 2 本から成る閉回路と，外側の閉回路を考えた．
[8] v_2 は速さであり，導体棒の運動は左向きである．
[9] 時刻 $t=0$ での傾きが (c) の加速度となる．
[10] 今回は補足でも微分方程式解きません（さすがに一旦もういいかな？）．解かずにはいられない人は各自で．

【補足 1】問 1 におけるエネルギー収支

加速度は 0 だが，一旦説明のために $\dfrac{dv}{dt}$ とする．運動方程式・キルヒホッフ則はそれぞれ，

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = F_{\mathrm{ex}} - IBw\,, \\ 2RI = v_0Bw\,. \end{cases}$$

運動方程式を v 倍，キルヒホッフ則を I 倍して和を取れば[*11]，

$$\frac{dK}{dt} + 2RI^2 = F_{\mathrm{ex}}v\,.$$

ここで，K は導体棒の運動エネルギーを表す．導体棒 A_1 の速度は一定値 v_0 のため，運動エネルギーも一定値である．よって，単位時間当たりのエネルギー収支を表す式は，

$$2RI^2 = F_{\mathrm{ex}}v_0$$

となる．実際それぞれの項を計算してみても，

$$2RI^2 = 2R\left(\frac{v_0Bw^2}{2R}\right)^2 = \frac{(v_0Bw)^2}{2R}\,,\quad F_{\mathrm{ex}}v_0 = \frac{v_0B^2w^2}{2R}v_0 = \frac{(v_0Bw)^2}{2R}\,,$$

と確認できる．

【補足 2】問 2 の誘導起電力の計算その 1（わざわざ積分してみる）

導体棒に沿って x 軸を定め，その原点を円弧の円の中心とする．位置 x から $x + \Delta x$ の微小区間に生じる誘導起電力 ΔV は，

$$\Delta V = x\omega B\Delta x = x\frac{v_0}{r+w}B\Delta x\,.$$

これを $x = r$ から $x = r + w$ まで足し合わせれば，

$$\begin{aligned} V = \sum \Delta V &= \sum x\omega B\Delta x \\ &= \int_r^{r+w} x\frac{v_0}{r+w}B\,dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{v_0}{r+w}B\left\{(r+w)^2 - r^2\right\} \\ &= \frac{w(2r+w)}{2(r+w)}v_0B\,. \end{aligned}$$

[*11] この説明も少しくどいが，運動エネルギーの項は，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}m\cdot 2v\frac{dv}{dt} = mv\frac{dv}{dt}$$

と確認できる．

【補足 3】問 2 の誘導起電力の計算その 2（ファラデイ則）

導体棒によって閉じた回路をループとして考える．磁束の正の向きは B と同じ向きに定める[*12]．A_1 が円弧部分に入ってから角度 $\theta = \omega t$ にあるとき，ループを貫く磁束 $\varPhi$ は，

$$\begin{aligned}\varPhi &= (\text{円弧の部分}) + (\text{長方形部分}) \\ &= \frac{1}{2}B(r+w)^2\theta - \frac{1}{2}Br^2\theta + \mathrm{const} \\ &= \frac{1}{2}B\omega(2rw + w^2)t + \mathrm{const}\,.\end{aligned}$$

よって，ループ 1 周に生じる誘導起電力は，

$$\mathcal{E} = -\frac{d\varPhi}{dt} = \frac{1}{2}B\omega(2rw + w^2) = \frac{w(2r+w)}{2(r+w)}v_0 B\,.$$

【補足 4】問 3 におけるエネルギー収支

導体棒の速度をそれぞれ v_1，v_2 とし[*13]，A_1 の加速度は 0 だが，説明のために $\dfrac{dv_1}{dt}$ とする．また，電流の正の向きは反時計回りに定める[*14]．運動方程式・キルヒホッフ則はそれぞれ，

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_1}{dt} = F_{\mathrm{ex}} + i_1 Bw\,, \\ m\dfrac{dv_2}{dt} = +i_2 Bw\,, \\ v_1 Bw + Ri_1 + R(i_1 + i_2) = 0\,, \\ v_2 Bw + Ri_2 + R(i_1 + i_2) = 0\,, \end{cases}$$

運動方程式をそれぞれ v_1，v_2 倍し，キルヒホッフ則を i_1，i_2 倍すると，

$$\underbrace{\frac{dK_1}{dt}}_{\substack{\mathrm{A}_1\text{の運動エネルギーの}\\\text{時間変化率}}} + \underbrace{\frac{dK_2}{dt}}_{\substack{\mathrm{A}_2\text{の運動エネルギーの}\\\text{時間変化率}}} + \underbrace{R{i_1}^2 + R{i_2}^2 + R(i_1+i_2)^2}_{\substack{\text{回路で単位時間に}\\\text{生じるジュール熱}}} = \underbrace{F_{\mathrm{ex}}v_1}_{\text{外力の仕事率}}$$

と単位時間でのエネルギー収支を表す式を得る．$v_1 = -v_0$ で一定より[*15]，

$$\frac{dK_2}{dt} + R{i_1}^2 + R{i_2}^2 + R(i_1+i_2)^2 = F_{\mathrm{ex}}v_1$$

と書ける．ことばにして言えば，外力のする仕事の一部が磁場を介してもう一方の導体棒の運動エネルギーと回路で消費されるジュール熱へと変換されている．

[*12] すごく今更だけど，磁束 $\varPhi$ はスカラー量（向きを持たない量）です．磁束密度 B はベクトル量で，それを面積倍した磁束 $\varPhi$ はスカラー量というのは違和感があるかもしれないですけど，圧力（向きを持たない量）と力（向きを持つ量）みたいな関係だと思ってください．詳しいことは大学生になればわかります．ただ，磁束は圧力と違って正負どちらも取り得るので，正の量はどういうときか定めているわけです．

[*13] それぞれ速度であることに注意.

[*14] 問題とは逆向きであることに注意.

[*15] 運動方程式から $F_{\mathrm{ex}} = -i_1 Bw$ である.

【補足 **5**】問 **2** をもう少し（力のモーメントの仕事率を話したい）

角速度一定より，力のモーメントがつりあっている．外力は棒の中心に加えていると仮定して，

$$0 = F_{\mathrm{ex}} \cdot \frac{2r+w}{2} - IBw \cdot \frac{2r+w}{2}\,, \qquad F_{\mathrm{ex}} = IBw = \frac{w^2(2r+w)}{2(r+w)} v_0 B^2\,.$$

系のエネルギー収支は，外力の力のモーメントを N_{ex} とすると，

$$2RI^2 = F_{\mathrm{ex}} \frac{1}{2}(2r+w)\omega = N_{\mathrm{ex}}\omega$$

と書くこともできる．

一般に，速度 v で運動している物体に力 F を加えているときの力 F の仕事率 P は $P = Fv$ と書けるのに対し，角速度 ω で運動する物体に力のモーメントの N を加えているときの力のモーメント N の仕事率 P は $P = N\omega$ と書ける．なお，覚えるべき公式ではなく，少し考えれば分かることである（そもそも知らなくても困らない）．

Ⅲ 凹面鏡の写像公式の導出

【メモ】

・幾何光学で用いる物理法則は屈折の法則のみ[*16]．あとは図形の考察を行う．図形の考察は，

- 角と角 → 平行線，または三角形の内角・外角
- 辺と辺 → 相似を利用
- 角と辺 → 三角比を利用[*17]

【解答】

語群の解答 ① 反射 ② 焦点 ③ 平行 ④ 実像 ⑤ 倒立 ⑥ 虚像 ⑦ 拡大

穴埋めの解答

三角形の外角に注目して[*18]，

$$\begin{cases} \alpha+\varepsilon=\gamma\,, \\ \gamma+\varepsilon=\beta\,, \end{cases} \qquad \therefore \alpha+\beta=\underset{\text{ア}}{\underline{2\gamma}}\,.$$

図より，$\overline{\mathrm{OH}}$ が各辺に比べて十分短いことからその寄与を無視して，

$$\tan\alpha \fallingdotseq \frac{h}{a}\,,\quad \tan\beta \fallingdotseq \frac{h}{b}\,,\quad \tan\gamma \fallingdotseq \frac{h}{R}\,.$$

各正接に対し近軸近似を行って，

$$\alpha \fallingdotseq \underset{\text{イ}}{\underline{\frac{h}{a}}}\,,\quad \beta \fallingdotseq \underset{\text{ウ}}{\underline{\frac{h}{b}}}\,,\quad \gamma \fallingdotseq \underset{\text{エ}}{\underline{\frac{h}{R}}}\,.$$

これらを角度の関係に代入して，

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\underset{\text{オ}}{\underline{\frac{2}{R}}}\,.$$

実像[*19]ゆえ，得られた写像公式から $b>0$ を考えて，

$$a>\underset{\text{カ}}{\underline{\frac{R}{2}}}\,.$$

[*16] 今回問われた反射の法則は，物理法則と呼ばなくてもいいでしょう．

[*17] 正弦定理，余弦定理に注意．

[*18] 3 つの角度に注目したとき，平行線でないのは明らか．

[*19] 実際に光が集まってできる像（スクリーンをおけばそこに像が生じる）．

ここで，$a \to \infty$ の極限[*20]の下で $b \to \dfrac{R}{2}$ となることから，この点が焦点とわかる[*21]．また，$a \to \dfrac{R}{2}$ の極限[*22]の下で $b \to \infty$ となることから，焦点を通過した光線が鏡で反射された後に光軸と平行に進むというよく知られた事実も確認できる．

さて，$\triangle \mathrm{A'AD} \sim \triangle \underline{\mathrm{QOD}}_{\text{キ}}$ より[*23]，

$$\overline{\mathrm{AA'}} : \overline{\mathrm{OQ}} = \overline{\mathrm{AD}} : \underline{\overline{\mathrm{OD}}}_{\text{ク}}$$

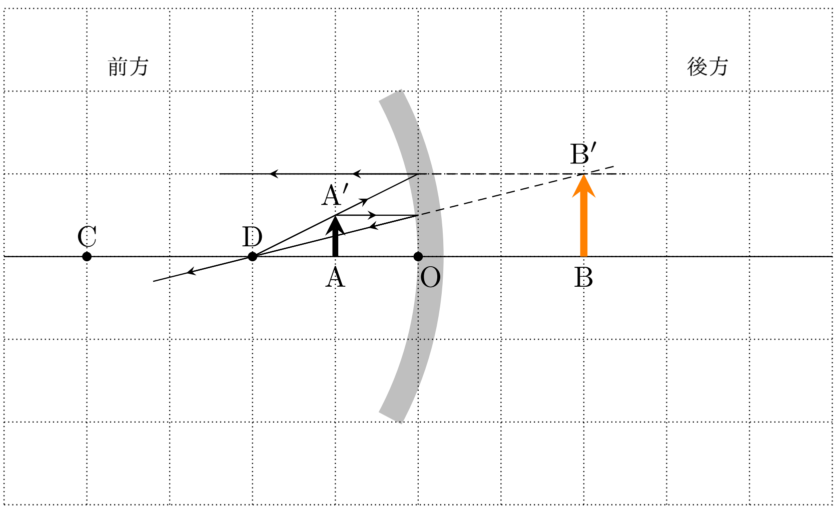
であり，図より $\overline{\mathrm{BB'}} = \overline{\mathrm{OQ}}$ であるから，

$$\frac{\overline{\mathrm{BB'}}}{\overline{\mathrm{AA'}}} = \frac{\overline{\mathrm{OD}}}{\overline{\mathrm{AD}}} = \frac{\dfrac{R}{2}}{a - \dfrac{R}{2}} = \frac{\dfrac{ab}{a+b}}{a - \dfrac{ab}{a+b}} = \underline{\frac{b}{a}}_{\text{ケ}} .$$

次に，$a < \dfrac{R}{2}$ の場合を考える．写像公式より，

$$\frac{1}{R/4} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R}, \qquad \therefore b = -\frac{R}{2} .$$

よって，凹面鏡後方 $\dfrac{R}{2}$ の位置に虚像が生じる．その大きさは $\dfrac{|b|}{a} = 2$ より，2 倍に拡大された虚像[*24]が生じる[*25]．



[*20] 光軸に平行な光線と同一視できる．

[*21] 光軸に平行な光は鏡で反射された後に焦点を通過する．

[*22] 焦点を通る光線．

[*23] $\sim$ は相似を表す．

[*24] 虚像には実際に光が集まっているわけではない．

[*25] 物体から光軸に平行に出た光線は凹面鏡で反射された後に焦点を通過する．物体から焦点を通るように出た光は凹面鏡で反射された後に光軸と平行に進む．このそれぞれの光線を凹面鏡後方まで延長させたときの交点（これがちょうどレンズ後方 $R/2$ の位置）に虚像が生じる．なお，実際に光線が交わっているわけではないため虚像となる．

【補足 1】$\overline{\mathrm{OH}}$ の寄与について

図より，

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{CH}} &= \overline{\mathrm{CO}} - \overline{\mathrm{OH}} \\ R\cos\gamma &= R - \overline{\mathrm{OH}}\,.\end{aligned}$$

ここで，1 次までの近似であれば，$\cos\gamma \fallingdotseq 1$ より，

$$\overline{\mathrm{OH}} \fallingdotseq 0\,.$$

【補足 2】倍率を 2 通りで表して写像公式を得る

今回の誘導では，レンズ（設問は凹面鏡だが）の内部構造を見る（というよりは詳細に見る？）ようにして，角と辺を結び付け，近軸近似によって写像公式を得たが，より一般に，レンズの写像公式は倍率を 2 通りで表すことでも求められると知っておくと良い．ここでは，倍率を 2 通りで表すことで写像公式を求めてみる．

$\triangle\mathrm{A'AC} \sim \triangle\mathrm{B'BC}$ より，

$$\frac{\overline{\mathrm{BB'}}}{\overline{\mathrm{AA'}}} = \frac{R-b}{R-a}\,.$$

$\triangle\mathrm{BB'D} \sim \triangle\mathrm{HPD}$ より[*26]，

$$\frac{\overline{\mathrm{BB'}}}{\overline{\mathrm{AA'}}} = \frac{b-\dfrac{R}{2}}{\dfrac{R}{2}}\,.$$

以上 2 式より，

$$\frac{R-b}{a-R} = \frac{b-\dfrac{R}{2}}{\dfrac{R}{2}}\,, \qquad \therefore\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{R}{2}\,.$$

[*26] 問題の図 2 には H が入っていないが，P から光軸に垂直に下した位置にある（問題の図 1 参照）．また，$\overline{\mathrm{OH}}$ の寄与については無視できることを用いている．