講義問題

1. 熱気球

図に示されるような容積 V の熱気球を，内部の気体を加熱することにより上昇させる．熱気球の下端部では，空気の自由な出入りがあり，外部と内部の圧力は等しい．また，下端部に取り付けられたゴンドラには熱バーナーが備わっている．これら全体から熱気球内にある空気の質量を除いた残りの部分の質量は，M である．熱気球内の空気の温度は，熱バーナーにより制御できる．また容積 V に比べ，他の部分の体積は十分小さいものとする．空気は，理想気体として取り扱ってよい．重力加速度の大きさを g とする．

最初，熱気球は地上に置かれており，熱バーナーは働いていなかった．地上での大気の絶対温度は T_0，大気圧は p_0，大気の密度は d_0 であった．以下の問いに答えよ．

問 1　空気 1 モルの質量を m_{A} とする．d_0 を，気体定数 R および T_0，p_0，m_{A} を用いて表せ．

問 2　熱気球が地上で受ける浮力の大きさを，d_0，V，M，g，T_0 のうち必要なものを用いて表せ．

熱気球内の空気を熱バーナーで加熱した．熱気球内の空気の温度は上昇し，絶対温度 T_1 になったとき，熱気球は今にも地上を離れようとする状態になった．

問 3　絶対温度 T_1 での熱気球内の空気の密度を，d_0，T_0，T_1 を用いて表せ．さらに，T_1 を，d_0，V，M，g，T_0 のうち必要なものを用いて表せ．

大気の温度や圧力が高度により定まる原因には，いくつかの原因が考えられる．ここでは任意の高度での大気の絶対温度 T および圧力 p が，

$$T = Cp^{\alpha}$$

に従いながら，高度が増すにつれ，それぞれ減少していく場合を考える．ここで C は，地上での大気の絶対温度 T_0，大気圧 p_0 にのみ依存し，

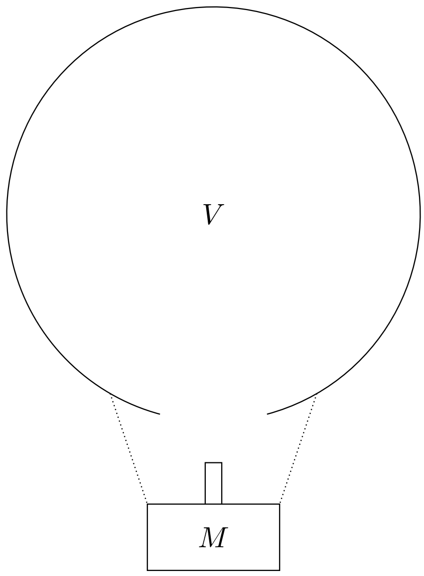
$$C = \frac{T_0}{(p_0)^{\alpha}}$$

と書ける．α は $0 < \alpha \leq 1$ を満たす定数である．

熱気球をひもで地上に固定し，熱気球内の空気の温度を T_2 まで上昇させた．その後，熱気球内の空気の温度を T_2 に保ちつつ地上から解放すると，熱気球は上昇した．最終的に，大気の絶対温度が T^* で与えられる高度で，熱気球にはたらく重力と浮力はつりあった．

問 4　このときの熱気球内の空気の密度を，d_0，T_0，T_2，T^*，α を用いて表せ．

問 5　熱気球にはたらく力のつりあいの式を考えることで，熱気球内の空気の温度 T_2 を，d_0，V，M，g，T_0，T^*，α のうち必要なものを用いて表せ．



《メモ》

2014 年大阪市立より．問題文に一部手を加え，単位の削除，添え字の変更，問 5 の聞き方を少し変更．

2. 熱力学の総点検

図のように，シリンダー，ピストン，筒形容器からなる装置を考える．十分に長いシリンダー（断面積 S）と長さ L の筒形容器（断面積 S）は，水平な床の上に固定されており，コックのついた管でつながれている．シリンダーには水平方向になめらかに動くピストンがあり，シリンダー内の気体と大気を仕切ることができる．シリンダー底面からピストンの内面までの距離 x を用いて，ピストンの位置を表す．また，シリンダーの中にはヒーターがあり，シリンダー内の気体を加熱することができる．筒形容器には温度調節器があり，気体との間で熱を自由にやりとりすることにより容器内の気体の温度を制御することができる．シリンダー，ピストン，筒形容器，コックのついた管は熱を通さない物質でできており，コックのついた管，ヒーターならびに温度調節器の体積と熱容量は無視できる．大気の圧力（大気圧）は P_0 で一定である．以下の問に答えよ．ただし，気体定数を R とする．

最初，ピストンの位置は $x = 0$ で，コックが閉じられており，筒形容器には単原子分子理想気体が閉じ込められていた．コックを開いたところ，筒形容器内の気体が管を通ってシリンダー内に膨張した．しばらくすると，装置内の気体の状態が一様となり，ピストンは位置 $x = L$ で静止した．このときの装置内の気体の温度を T_0 とする．ここで，コックを閉じた．コックを閉じた後の装置内の気体の状態を，状態 A とよぶ．

次に，ピストンの位置を $x = L$ に固定するようピストンに外力を加えたまま，シリンダー内の気体をヒーターでゆっくり加熱したところ，その気体の圧力は $32P_0$ となり，ここで加熱をやめた．このときの装置内の気体の状態を，状態 B とよぶ．

(a) 状態 B におけるシリンダー内の気体の温度を求めよ．

(b) 状態 A から状態 B への過程において，ヒーターがシリンダー内の気体に加えた熱量を求めよ．

続いて，ピストンに加える外力を徐々に弱めながら，シリンダー内の気体の圧力が大気圧と等しくなるまで，シリンダー内の気体を断熱的に膨張させた．この状態を，状態 C とよぶ．状態 B から状態 C への過程において，シリンダー内の気体は $PV^\gamma =$ 一定 の関係式を満たす．ここで P，V はそれぞれ，シリンダー内の気体の圧力，体積であり，$\gamma = \dfrac{5}{3}$ である．

(c) 状態 C におけるピストンの位置 x の値を求めよ．

(d) 状態 B から状態 C への過程において，シリンダー内の気体が外部にした仕事を求めよ．

次に，ピストンが動かないように固定し，さらにコックを開いてしばらくすると，装置内の気体の状態

が一様になった．この状態を，状態 D とよぶ．状態 C から状態 D への過程において，装置内の気体と外部の間で熱のやりとりはなく，また気体は外部に仕事をしないため，装置内の気体の内部エネルギーは変化しない．

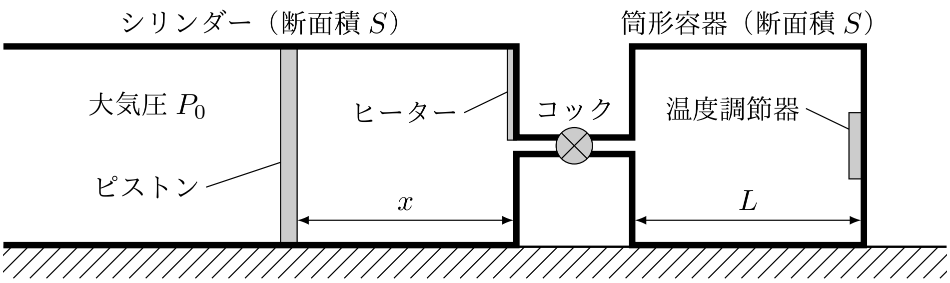
(e) 状態 D における装置内の気体の温度，圧力を求めよ．

(f) 状態 C から状態 D への過程において，筒形容器からシリンダーへ移動した気体のモル数を求めよ．

その後，ピストンの固定をはずし，さらにコックを開いたまま温度調節器を用いて装置内の気体から熱をゆっくり吸収し，装置内の気体の温度を T_0 にしたところ，ピストンの位置が $x = L$ に戻った．ここで，コックを閉じた．このことにより，装置内の気体の状態は元の状態 A に戻った．

(g) 状態 D から元の状態 A に戻る過程において，温度調節器が装置内の気体から吸収した熱量を求めよ．

(h) この装置内の気体の状態が，状態 A から状態 B，C，D を経て状態 A に戻る過程を熱機関のサイクルと考えることができる．この熱機関の効率（熱効率）を求めよ．



《メモ》

2021 年東京工業より．

3. ピストンの単振動

図のように，断面積 S のシリンダーを水平に固定し，質量 M のふたで単原子分子の理想気体を封入する．周りの大気圧 p_0 と絶対温度 T_0 は一定で，ふたは気密性を保ったまま滑らかに動く．

問 1 次の文章を読み，導出過程を示した上で $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{キ}}$ まで空欄に適した式を記せ．単振動の周期を求めるときには，$|x|$ が L に比べて十分に小さいときに成り立つ近似式として $\left(1-\dfrac{x}{L}\right)^{-\alpha} \fallingdotseq 1+\dfrac{\alpha x}{L}$ を使ってよい（α は実数とする）．

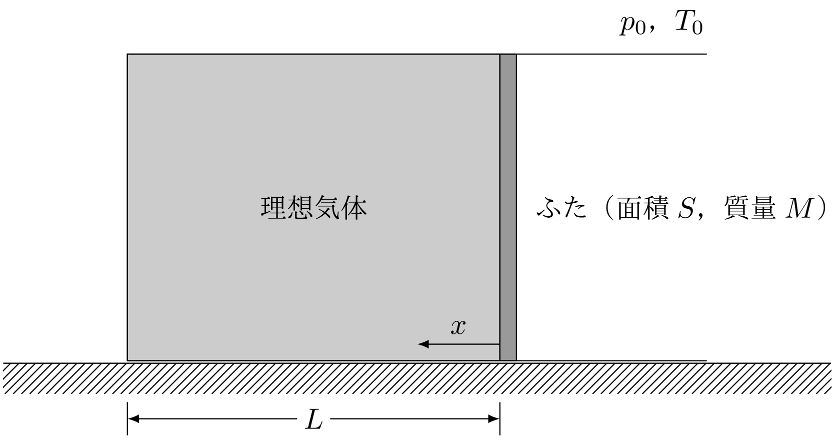
(1) シリンダーおよびふたが熱をよく通す等温過程を考える．ふたははじめ，シリンダーの底からの距離が L のところで静止していた．ふたに手を添えてゆっくりと距離 x だけ左へ移動させたとき（手とふたの間に熱の移動はないとする），理想気体の圧力は $\boxed{\text{ア}}$ となる．この過程で，理想気体が放出した熱量を Q とすると，理想気体がされた仕事は $\boxed{\text{イ}}$ である．

その後，ふたから手を離すと，x の大きさが L に比べて十分に小さい場合にはふたは単振動をした．この単振動の周期は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(2) 次にシリンダーおよびふたが熱を通さない断熱過程を考える．ふたははじめ，シリンダーの底からの距離が L のところで静止していた．理想気体の絶対温度は T_0 であった．単原子分子理想気体の断熱変化では (圧力) $\times$ (体積)$^{\frac{5}{3}}$ が一定であることを使うと，ふたに手を添えてゆっくりとはじめの位置から距離 x だけ左へ移動させたとき，理想気体の圧力は $\boxed{\text{エ}}$，絶対温度は $\boxed{\text{オ}}$ となる．ふたがはじめの位置にあるときの内部エネルギーを U とすると，この過程で理想気体がされた仕事は $\boxed{\text{カ}}$ となる．

その後，ふたから手を離すと，x の大きさが L に比べて十分に小さい場合にはふたは単振動をした．この単振動の周期は $\boxed{\text{キ}}$ である．

問 2 単振動の周期 $\boxed{\text{キ}}$ が $\boxed{\text{ウ}}$ より短い理由を，理想気体の圧力と体積に関するグラフ（$p-V$ 図）を使って簡潔に述べよ．



《メモ》……………………………………………………………………………………………

2017 年山形（理・医）より．

4. 分子運動論

理想気体の圧力について分子運動の考え方を用いて考察しよう．気体は壁面で囲まれた図 1 のような一辺 L の立方体容器の空間をもつ容器に入っている．x 軸と y 軸は水平面内に，z 軸は鉛直上向きにとる．気体は質量 m の分子 N 個からなる．分子と壁との衝突は弾性衝突とし，衝突の前後で分子の速度の壁面に平行な成分は変化しないものとする．分子どうしの衝突は考えない．また，気体の絶対温度 T は場所によらず一定であるものとする．

最初に，重力を無視した場合について考察する．分子の運動は x，y，z の各方向で同等で独立なので，x 方向の運動を考えよう．正の速度成分 v_x をもつ 1 つの分子が x 軸に垂直な壁に衝突してはね返ると，壁は分子から $\boxed{\quad ① \quad}$ の力積を受ける．分子が向かい合う壁との間を往復する周期は $\boxed{\quad ② \quad}$ であるから，1 個の分子が単位時間に壁に与える力積，すなわち平均の力は，$\boxed{\quad ③ \quad}$ である．N 個の分子にわたって $\boxed{\quad ③ \quad}$ の総和をとり，${v_x}^2$ の総和を $N\overline{{v_x}^2}$ と書けば，壁が気体から受ける圧力 P は，L，m，N，$\overline{{v_x}^2}$ を用いて $P = \boxed{\quad ④ \quad}$ と表すことができる．気体分子は特定の方向に偏らず不規則な運動をしているので，$\overline{{v_x}^2} = \dfrac{1}{3}\overline{v^2}$ としてよい．ここで，$\overline{v^2}$ は速度の二乗平均 $(\overline{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2})$ である．また，気体の密度を ρ とすると，ρ と $\overline{v^2}$ を用いて，$P = \boxed{\quad ⑤ \quad}$ と表すことができる．

次に，重力加速度の大きさが g の一様な重力がはたらく場合について，z 軸方向の運動を考察する．この場合，重力がない場合のように一定の速度をもつ分子を追うことができない．そこで，図 2 のように z と $z + h$ の位置に 2 枚の水平な壁を入れ，壁で仕切られた微小な高さ h と底面積 L^2 をもつ直方体の空間内の気体について考える．

図 3 のように，1 つの分子が下の壁に衝突し，速度の z 成分 $v_{z0}\,(>0)$ ではね返った後，t_1 後に速度成分 $v_{z1}\,(>0)$ で上の壁に衝突したとする．この分子はその後，上下の壁の間で往復運動を繰り返す．h が十分に微小であれば，上の壁まで到達できない分子の存在は無視できる．この分子の速度成分の大きさの平均値 v_z は，$v_z = \dfrac{1}{2}(v_{z0} + v_{z1})$ である．v_z を用いれば $t_1 = \boxed{\quad ⑥ \quad}$ と表される．また，v_{z0}，v_{z1} は，v_z，g，h を用いて，$v_{z0} = \boxed{\quad ⑦ \quad}$，$v_{z1} = \boxed{\quad ⑧ \quad}$ と表される．そうすると，この分子が壁から受ける平均の力の大きさは，m，v_z，g，h を用いて，下の壁において $f_0 = \boxed{\quad ⑨ \quad}$，上の壁において $f_1 = \boxed{\quad ⑩ \quad}$ と表される．この空間における気体の密度を ρ と書けば，この空間に含まれる分子数は $\boxed{\quad ⑪ \quad}$ 個である．これらの分子についての ${v_z}^2$ の平均を $\overline{{v_z}^2}$ とする．気体分子の速度分布はどの場所でも特定の方向に偏らないとすれば，速度の二乗平均 $\overline{v^2}$ を使って，$\overline{{v_z}^2} = \dfrac{1}{3}\overline{v^2}$ としてもよい．以上から，下の壁における圧力 P_0 と上の壁における圧力 P_1 を，m，ρ，g，h，$\overline{v^2}$ を用いて表すことができる．結果として，この空間における平均の圧力 $\overline{P} = \dfrac{1}{2}(P_0 + P_1)$ は，$\overline{P} = \boxed{\quad ⑫ \quad}$ と表される．また，P_0 と P_1 の差から，重力を考慮した場合の気体の圧力は鉛直方向の位置に依存することがわかる．

問 1　空欄 $\boxed{\quad ① \quad}$ から $\boxed{\quad ⑫ \quad}$ に適する式を答えよ．

問 2　重力がある場合について，鉛直方向の位置に対する圧力の変化率 $\dfrac{P_1 - P_0}{h}$ を答えよ．

重力がある場合でも，理想気体の状態方程式が容器内の各場所で成り立つと考えてよいので，鉛直方向の位置 z での圧力 $P(z)$ は，$P(z) = n(z)kT$ と表すことができる．ここで，$n(z)$ は位置 z での分子数密度（単位体積あたりの分子数），k はボルツマン定数である．

問 3　重力がある場合について，鉛直方向の位置の微小変化 Δz に対する気体の分子数密度 $n(z)$ の変化を $\Delta n = n(z + \Delta z) - n(z)$ としたとき，その変化率 $\dfrac{\Delta n}{\Delta z}$ を，m，g，k，$n(z)$，T を用いた式で答えよ．

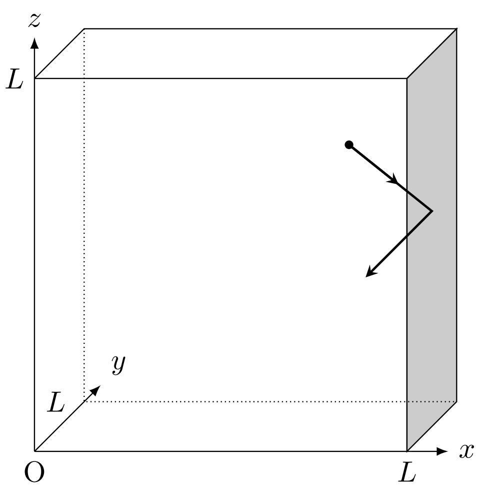


図 1

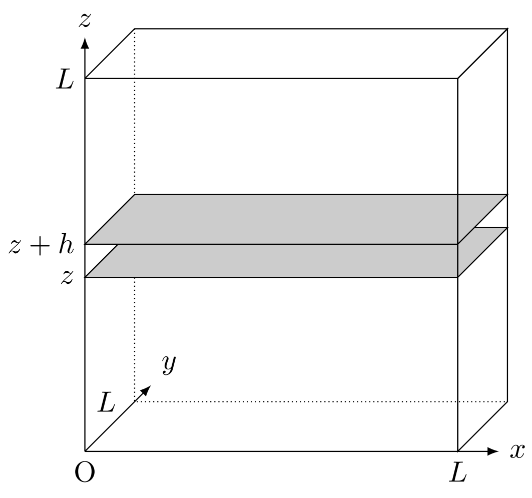


図 2

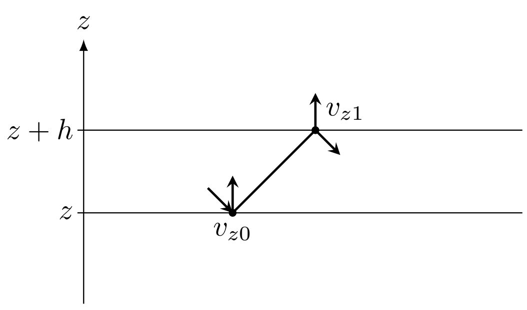


図 3

《メモ》……………………………………………………………………………………………

2021 年岐阜より．問 1 と問 2 をまとめて問 1 にした．また，単位を削除した．

略解

1.

問 1　$d_0 = \dfrac{p_0 m_{\mathrm{A}}}{RT_0}$

問 2　$d_0 V g$

問 3　密度：$\dfrac{T_0}{T_1} d_0$，　温度：$\dfrac{d_0 V}{d_0 V - M} T_0$

問 4　$\left(\dfrac{T^*}{T_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \dfrac{T_0}{T_2} d_0$

問 5　$\dfrac{d_0 V}{d_0 V - \left(\dfrac{T_0}{T^*}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} M} T^*$

2.

(a)　$32T_0$

(b)　$\dfrac{93}{2} P_0 SL$

(c)　$8L$

(d)　$36P_0 SL$

(e)　温度：$\dfrac{9}{2} T_0$，　圧力：P_0

(f)　$\dfrac{7}{9} \dfrac{P_0 SL}{RT_0}$

(g)　$\dfrac{35}{2} P_0 SL$

(h)　$\dfrac{58}{93}$

3.

問 1 (1)　ア：$\dfrac{L}{L-x} p_0$　イ：Q　ウ：$2\pi \sqrt{\dfrac{ML}{p_0 S}}$

(2)　エ：$\left(\dfrac{L}{L-x}\right)^{\frac{5}{3}} p_0$　オ：$\left(\dfrac{L}{L-x}\right)^{\frac{2}{3}} T_0$

カ：$\left\{\left(\dfrac{L}{L-x}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right\} U$

キ：$2\pi \sqrt{\dfrac{3ML}{5p_0 S}}$

問 2　$V = SL$ 近傍では，断熱曲線の方が体積の変化に対する圧力の変化の大きさが大きいため．

4.

問 1　① $2mv_x$　② $\dfrac{2L}{v_x}$　③ $\dfrac{m{v_x}^2}{L}$　④ $\dfrac{Nm\overline{{v_x}^2}}{L^3}$

⑤ $\dfrac{1}{3}\rho\overline{v^2}$　⑥ $\dfrac{h}{v_z}$　⑦ $v_z + \dfrac{gh}{2v_z}$　⑧ $v_z - \dfrac{gh}{2v_z}$

⑨ $\dfrac{m{v_z}^2}{L} + \dfrac{1}{2}mg$　⑩ $\dfrac{m{v_z}^2}{L} - \dfrac{1}{2}mg$

⑪ $\dfrac{L^2 h\rho}{m}$　⑫ $\dfrac{1}{3}\rho\overline{v^2}$

問 2　$-\rho g$

問 3　$-\dfrac{mg}{kT} n(z)$