第 1 問（運動方程式，糸の束縛条件）

【メモ】

・糸を介する運動は，各糸に対して糸の長さ一定の条件（束縛条件）を立てる．

【解答】

問 1　運動方程式より，

$$ma = 2mg - mg\,, \qquad \therefore a = \frac{1}{2}g\,.$$

問 2　運動方程式は[*1]，

$$\begin{cases} ma = S - mg\,, \\ 2m(-a) = S - 2mg\,. \end{cases}$$

問 3　運動方程式より，

$$a = \frac{1}{3}g\,, \quad S = \frac{4}{3}mg\,.$$

加速度一定より，物体 A の位置および速度は，

$$\begin{cases} x_{\mathrm{A}} = \frac{1}{6}gt^2\,, \\ v_{\mathrm{A}} = \frac{1}{3}gt\,, \end{cases}$$

となり，$x_{\mathrm{A}} = h$ を解いて，

$$\frac{1}{6}gt^2 = h\,, \qquad \therefore t = \sqrt{\frac{6h}{g}}\,.$$

v_{A} に代入すれば，

$$\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{A}}}^2 = \frac{1}{3}mgh\,.$$

問 4　運動方程式は，

$$\begin{cases} ma_{\mathrm{A}} = S_1 - mg\,, \\ 2ma_{\mathrm{B}} = S_1 - 2mg\,, \\ 3ma_{\mathrm{C}} = S_2 - 3mg\,. \end{cases}$$

[*1] 糸の長さが一定なことから，

$$(x_{\mathrm{P}} - x_{\mathrm{A}}) + (x_{\mathrm{P}} - x_{\mathrm{B}}) = \mathrm{const}$$

を満たし，両辺の時間微分を考えれば $a_{\mathrm{A}} + a_{\mathrm{B}} = 0$ を得る．

問 5　それぞれの糸の長さが一定ゆえ，

$$\begin{cases} (x_\mathrm{P}-x_\mathrm{C})+(x_\mathrm{P}-x_\mathrm{Q})=\mathrm{const}\,, \\ (x_\mathrm{Q}-x_\mathrm{A})+(x_\mathrm{Q}-x_\mathrm{B})=\mathrm{const}\,, \end{cases}$$

を満たす．x_P のみ定数であることに留意し，時間変化を取れば，

$$\begin{cases} a_\mathrm{C}+a_\mathrm{Q}=0\,, \\ 2a_\mathrm{Q}-a_\mathrm{A}-a_\mathrm{B}=0\,, \end{cases} \qquad \therefore\ \underline{a_\mathrm{A}+a_\mathrm{B}+2a_\mathrm{C}=0}\,.$$

問 6　$S_2=2S_1$ として，運動方程式・束縛条件を解いて，

$$\begin{cases} ma_\mathrm{A}=S_1-mg\,, \\ 2ma_\mathrm{B}=S_1-2mg\,, \\ 3ma_\mathrm{C}=2S_1-3mg\,, \\ a_\mathrm{A}+a_\mathrm{B}+2a_\mathrm{C}=0 \end{cases} \qquad \therefore\ a_\mathrm{C}=\underline{-\frac{1}{17}g}\,,\quad a_\mathrm{A}=\frac{7}{17}g\,,\quad a_\mathrm{B}=-\frac{5}{17}g\,,\quad S_1=\frac{24}{17}mg\,.$$

問 7　問 6 より，

$$\begin{cases} x_\mathrm{A}=\dfrac{1}{2}\dfrac{7}{17}gt^2=-7x_\mathrm{C}\,, \\ x_\mathrm{B}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{5}{17}gt^2=5x_\mathrm{C}\,, \\ x_\mathrm{C}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{17}gt^2\,. \end{cases}$$

よって，重心の定義より，

$$\Delta x_\mathrm{CM}=\frac{m(-7h')+2m\cdot 5h'+3mh'}{m+2m+3m}=\underline{h'}\,.$$

第２問（電気回路）

【メモ】

・電気回路の状態は，

$$\begin{cases} \text{キルヒホッフ則} \\ \text{電荷保存則} \\ \text{素子の性質} \end{cases}$$

によって一意に定まる[*2].

【解答】

問１　キルヒホッフ則より，

$$E - rI - L\frac{dI}{dt} = 0\,.$$

ここにコイルの性質（電流の連続性）より，$I = 0$ である．よって，

$$L\frac{dI}{dt} = E\,, \qquad \therefore V_{a\to b} = -r\cdot 0 = 0\,, \quad V_{b\to c} = -L\frac{dI}{dt} = -E\,.$$

問２　コイルの性質より $L\dfrac{dI}{dt} = 0$ である．キルヒホッフ則より，

$$I = \frac{E}{r}\,.$$

エネルギーは公式より，

$$U_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}L\left(\frac{E}{r}\right)^2\,.$$

問３　キルヒホッフ則より，

$$-\frac{Q}{C} - L\frac{dI}{dt} = 0\,.$$

ここに，$I = +\dfrac{dQ}{dt}$ を代入して，

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{LC}Q\,, \qquad \therefore f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\,.$$

[*2] 電位降下について抵抗，コンデンサ，コイルの各種公式，エネルギーについて抵抗，コンデンサ，コイル，電池，諸性質についてはコンデンサ，コイルを押さえる．例外素子については，問題文でグラフや数式でその性質が与えられる．

問 4　$t=0$ で $I=\dfrac{E}{r}$，$Q=0$ より[*3]

$$Q=\frac{E}{r}\sqrt{LC}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right).$$

よって，キルヒホッフ則より，

$$L\frac{dI}{dt}=-\frac{Q}{C}=-\frac{E}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right), \qquad \therefore \max\left\{L\frac{dI}{dt}\right\}=\underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{E}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}}.$$

問 5　キルヒホッフ則より，

$$E-rI-RI=0, \qquad \therefore I=\frac{E}{R+r}$$

よって，単位時間当たりのジュール熱（消費電力）は，

$$P=RI^2=\underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{RE^2}{(R+r)^2}}.$$

問 6　問 5 より，

$$P=\frac{RE^2}{R^2+2rR+r^2}=\frac{E^2}{R+\dfrac{r^2}{R}+2r}.$$

ここで，相加・相乗平均の関係から，

$$\begin{aligned} R+\frac{r^2}{R} &\geq 2\sqrt{R\frac{r^2}{R}} \\ R+\frac{r^2}{R}+2r &\geq 2r+2r \\ \therefore \frac{1}{R+\dfrac{r^2}{R}+2r} &\leq \frac{1}{4r}. \end{aligned}$$

よって，

$$P=\frac{E^2}{R+\dfrac{r^2}{R}+2r}\leq\frac{E^2}{4r}, \qquad \therefore \max\{P\}=\underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{E^2}{4r}\ \ (R=r)}.$$

[*3]

$$\begin{cases} Q=A\sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{LC}}\right)+B\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{LC}}\right), \\ I=\dfrac{A}{\sqrt{LC}}\cos\left(\dfrac{t}{\sqrt{LC}}\right)-\dfrac{B}{\sqrt{LC}}\sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{LC}}\right), \end{cases}$$

に代入して A，B を決定する．

第３問（固有振動）

【メモ】

・固有振動は図を描いて問題を解く．

・開口端は腹，閉口端は節となる．開口端の場合，開口端補正に留意する．

【解答】

問１　基本振動ゆえ，

$$\frac{\lambda_{\mathrm{str}}}{2} = \ell\,, \qquad \therefore \lambda_{\mathrm{str}} = 2\ell\,.$$

問２　問１より，

$$f = \frac{V}{\lambda_{\mathrm{str}}} = \frac{V}{2\ell}\,.$$

１回目，２回目の共鳴を考えて，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4}\lambda_{\mathrm{gas}} = d_1 + \mathit{\Delta}\ell\,, \\ \dfrac{3}{4}\lambda_{\mathrm{gas}} = d_2 + \mathit{\Delta}\ell\,, \end{cases} \qquad \therefore \lambda_{\mathrm{gas}} = 2(d_2 - d_1)\,, \quad \mathit{\Delta}\ell = \frac{d_2 - 3d_1}{2}\,.$$

ここで，波の基本式より，

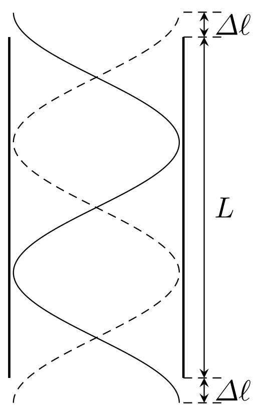
$$c = f\lambda_{\mathrm{gas}} = \frac{d_2 - d_1}{\ell}V\,.$$

問３　３度目の共鳴を考えて，

$$\frac{5}{4}\lambda_{\mathrm{gas}} = d_3 + \mathit{\Delta}\ell\,, \qquad \therefore d_3 = 2d_2 - d_1\,.$$

問４　題意より，図のように共鳴する．よって，

$$\frac{3}{2}\lambda_{\mathrm{gas}} = L + 2\mathit{\Delta}\ell\,, \qquad \therefore L = 2d_2\,.$$



問 5　$f=\dfrac{V}{2\ell}$ より，ℓ を小さくすると f は大きくなる．このとき，音速 c は変化しないので λ_{gas} は小さくなる．したがって，問 4 の次の共鳴を考えて，

$$2\lambda_{\text{gas}}=L+2\Delta\ell\,,\qquad \therefore\lambda_{\text{gas}}=\frac{3}{2}(d_2-d_1)\,.$$

ここで，問 2 より，

$$c=\frac{d_2-d_1}{\ell}V=\frac{3}{2}(d_2-d_1)\frac{V}{2\ell'}\,,\qquad \therefore\ell'=\underset{\sim\sim}{\frac{3}{4}\ell}\,.$$