第１問（万有引力）

【メモ】

・等速円運動は，運動方程式の中心成分（不足する場合は各種つりあい）を立てる．

・円以外の軌道は，

$$\begin{cases} \text{面積速度保存則} \\ \text{力学的エネルギー保存則} \end{cases}$$

を連立して解く．本問は，面積速度保存則を要する設問はない．

【解答】

問１　運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{{v_0}^2}{R+h} = G\frac{Mm}{(R+h)^2}\,, \qquad \therefore v_0 = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{GM}{R+h}}}\,.$$

問２　S の周期が T と一致すればよい．よって，

$$\frac{2\pi(R+h)}{v} = T\,, \qquad h = \underset{\sim\sim\sim}{\left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - R}\,.$$

問３　力学的エネルギー保存則より，

$$K_\infty + 0 = \frac{1}{2}m_1{v_1}^2 - G\frac{Mm_1}{R+h} \geq 0\,, \qquad \therefore v_1 \geq= \sqrt{\frac{2GM}{R+h}} = \underset{\sim\sim}{\sqrt{2}\,v_0}\,.$$

問４　運動方程式（中心成分）より $v_2 = v_0$ である．運動量保存則より，

$$4m_1v_0 + m_2(-v_0) = (m_1+m_2)v_0\,, \qquad \therefore \frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{\underset{\sim}{3}}\,.$$

第２問（内部構造の見えるコンデンサ）

【メモ】

・電気回路の状態は,

$$\begin{cases} \text{キルヒホッフ則} \\ \text{電荷保存則} \\ \text{素子の性質} \end{cases}$$

によって一意に定まる.

【解答】

問 1　キルヒホッフ則より,

$$V_0 - \frac{Q}{C} = 0\,, \qquad \therefore Q = \underset{\sim\sim}{CV_0}\,,\ \ U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}C{V_0}^2}\,.$$

問 2　左側のコンデンサの帯電量を Q_1，右側のコンデンサの帯電量を Q_2 と記す．キルヒホッフ則・電荷保存則より,

$$\begin{cases} -\dfrac{Q_1}{C} + \dfrac{Q_2}{C_2} = 0\,, \\ \dfrac{Q_2}{C_2} = \dfrac{3}{4}V_0\,, \\ Q_1 + Q_2 = CV_0\,, \end{cases} \qquad \therefore Q_1 = \frac{3}{4}CV_0\,,\ \ Q_2 = \underset{\sim\sim}{\frac{1}{4}CV_0}\,,\ \ C_2 = \underset{\sim}{\frac{1}{3}C}\,.$$

問 3　公式より,

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2}\frac{(3CV_0/4)^2}{C} + \frac{1}{2}\frac{(CV_0/4)^2}{C/3} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{3}{8}C{V_0}^2}\,.$$

よって，内部エネルギー変化は,

$$\varDelta U = \frac{3}{8}C{V_0}^2 - \frac{1}{2}C{V_0}^2 = -\frac{1}{2}C{V_0}^2$$

であり，$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}C{V_0}^2\text{だけ減少する}}$.

問 4　右側のコンデンサの容量は $\dfrac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}}\dfrac{C}{3}$ となる．キルヒホッフ則・電荷保存則より,

$$\begin{cases} -\dfrac{Q_1}{C} + \dfrac{Q_2}{C/3\varepsilon_\mathrm{r}} = 0\,, \\ Q_1 + Q_2 = CV_0\,, \end{cases} \qquad \therefore Q_1 = \frac{3\varepsilon_\mathrm{r}}{3\varepsilon_\mathrm{r}+1}CV_0\,,\ \ Q_2 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{3\varepsilon_\mathrm{r}+1}CV_0}\,.$$

よって，系のエネルギー収支より,

$$W_\mathrm{ex} = \varDelta U = \frac{1}{2}\frac{3\varepsilon_\mathrm{r}}{3\varepsilon_\mathrm{r}+1}C{V_0}^2 - \frac{3}{8}C{V_0}^2 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{3}{8}\frac{\varepsilon_\mathrm{r}-1}{3\varepsilon_\mathrm{r}+1}C{V_0}^2}\,.$$

第３問（熱力学の基本処理，非平衡過程）

【メモ】

・圧力はピストンのつりあい，体積は状況から判断し，状態方程式から温度を決定するのが基本.

・内部エネルギー変化は公式，仕事は $p-V$ 図の面積評価，熱は熱力学第 1 法則を通して計算する.

【解答】

問 1　ピストンのつりあいより，各状態での圧力は，

$$\begin{cases} P_1S = P_0S\,, \\ P_2S = P_0S + Mg\,, \end{cases} \qquad \therefore P_1 = P_0\,,\quad P_2 = P_0 + \frac{Mg}{S}\,.$$

状態方程式より，

$$\begin{cases} P_0V_0 = nRT_0\,, \\ \left(P_0 + \dfrac{Mg}{S}\right)\dfrac{1}{3}V_0 = nRT_0\,, \end{cases} \qquad \therefore M = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{2P_0S}{g}}\,.$$

問 2　ピシトンのつりあいより，気体の圧力は前述の P_2 と等しい．状態方程式より，

$$\begin{cases} P_0V_0 = nRT_0\,, \\ \left(P_0 + \dfrac{g}{S}\dfrac{2P_0S}{g}\right)2V_0 = nRT_1\,, \end{cases} \qquad \therefore \frac{T_1}{T_0} = \underset{\sim}{6}\,.$$

問 3　公式より，

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR(T_1 - T_0) = \frac{3}{2}nR\frac{5P_0V_0}{nR} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{15}{2}P_0V_0}\,.$$

問 4　この間に気体が外部にした仕事は $P-V$ 図の面積より，

$$W = 3P_0\left(2V_0 - \frac{1}{3}V_0\right) = 5P_0V_0\,.$$

よって，熱力学第 1 法則より，

$$Q = \Delta U + W = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{25}{2}P_0V_0}\,.$$

問 5　この過程で，気体は外部に仕事をせず，外部との熱のやりとりもない．熱力学第 1 法則より，内部エネルギーは変化せず，理想気体の温度は一定と結論付く．

問 6　状態方程式・全体のエネルギー保存則より，

$$\begin{cases} P\cdot 3V_0 = nRT\,, \\ \dfrac{3}{2}nRT = \dfrac{3}{2}nR\dfrac{6P_0V_0}{nR}\,, \end{cases} \qquad \therefore P = \underset{\sim\sim}{2P_0}\,.$$