第 1 問（衝突）

【メモ】

・衝突は外力のない方向の運動量保存則と問題で与えられた条件を連立して解く.

【解答】

問 1　力学的エネルギー保存則より，衝突直前の A の速さは $\sqrt{2g\ell}$ である．運動量保存則・はね返り係数 1 の式より[*1],

$$\begin{cases} mv + Mv_0 = m\sqrt{2g\ell}\,, \\ v - v_0 = -1 \cdot (\sqrt{2g\ell} - 0)\,, \end{cases} \qquad \therefore v_0 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{2m}{M+m}\sqrt{2g\ell}}\,.$$

問 2　B の位置は，Q の座標を $(0, h)$ とすると，

$$\begin{cases} x = v_0 t\,, \\ y = h - \dfrac{1}{2}gt^2\,. \end{cases}$$

$y = 0$ を解いて $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$,

$$d_1 = \underset{\sim\sim\sim}{v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}}\,.$$

問 3　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m \cdot 0^2 + mg\ell(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + 0\,, \qquad \therefore \cos\theta = 1 - \frac{{v_0}^2}{2g\ell}\,.$$

よって，

$$d_2 = \ell\sin\theta = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\ell^2 - \left(\ell - \frac{{v_0}^2}{2g}\right)^2}}\,.$$

問 4　$M = mv_0 = \sqrt{2g\ell}$ より，$d_2/d_1 = 1$ より，

$$\sqrt{2g\ell}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\ell^2 - \left(\ell - \frac{2g\ell}{2g}\right)^2}\,, \qquad \therefore h = \underset{\sim}{\frac{1}{4}\ell}\,.$$

[*1] 1 次元の弾性衝突という条件を，はね返り係数 1 の式と読んだ.

問 5　$\mu = \dfrac{m}{M}\,(0 < \mu \leq 1)$ とする．このとき，

$$\frac{d_2}{d_1} = \sqrt{\frac{2\ell\dfrac{{v_0}^2}{2g} - \left(\dfrac{{v_0}^2}{2g}\right)}{{v_0}^2\dfrac{2h}{g}}} = \sqrt{2 - 4\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^2}.$$

ここで $\dfrac{\mu}{1+\mu}$ は $0 < \mu \leq 1$ では単調増加関数ゆえ，$\dfrac{d_2}{d_1}$ は $0 < \mu \leq 1$ の範囲で単調減少関数である．$\mu \to 0$ で $\dfrac{d_2}{d_1} \to \sqrt{2}$，$\mu \to 1$ で $\dfrac{d_2}{d_1} \to 1$ より，

$$\underline{1 \leq \frac{d_2}{d_1} < \sqrt{2}}.$$

第２問（荷電粒子の運動）

【解答】

問 1 (1) $v\cos\theta$　(2) $\dfrac{mv\sin\theta}{eB}$　(3) $\dfrac{2\pi m}{eB}$

問 2　z 方向の運動方程式より，

$$ma_z = -eE\,, \qquad \therefore a_z = -\frac{eE}{m}\,.$$

よって，

$$z = v\cos\theta t - \frac{eE}{2m}t^2 = 0 \qquad \therefore t = \frac{2mv\cos\theta}{eE}\,.$$

この時刻が円運動の周期 T の n 倍と等しいことから，

$$\frac{2mv\cos\theta}{eE} = \frac{2\pi m}{eB}n\,, \qquad \therefore E = \frac{Bv\cos\theta}{\pi n}\,.$$

問 3　つりあいより，

$$0 = eE' - evB\sin\theta\,, \qquad \therefore E' = vB\sin\theta\,.$$

問 4　荷電粒子の位置は，

$$\begin{cases} y = v\sin\theta t\,, \\ y = v\cos\theta t - \dfrac{eE}{2m}t^2\,, \end{cases} \qquad \therefore z = \frac{1}{\tan\theta}y - \frac{eE}{2mv^2\sin^2\theta}y^2\,.$$

第３問（熱機関）

【メモ】

・（準静的な）断熱過程は，ポアソンの公式から圧力/体積を決定，状態方程式から温度を決定する．また，熱力学第 1 法則は，仕事の決定式となる．

【解答】

問 1

過程	気体の吸収する熱量	気体が外部にする仕事
A → B	正	正
B → C	ゼロ	正
C → D	負	負
D → A	ゼロ	負

問 2　断熱過程において，状態方程式・ポアソンの公式より

$$\begin{cases} pV = RT\,, \\ pV^{\gamma} = p'V'^{\gamma} \end{cases} \qquad TV^{\gamma-1} = T'V'^{\gamma-1}\,.$$

よって，

$$\begin{cases} T_{\mathrm{H}}V_{\mathrm{B}}{}^{\gamma-1} = T_{\mathrm{L}}V_{\mathrm{C}}{}^{\gamma-1}\,, \\ T_{\mathrm{H}}V_{\mathrm{A}}{}^{\gamma-1} = T_{\mathrm{L}}V_{\mathrm{D}}{}^{\gamma-1}\,, \end{cases} \qquad \therefore \frac{V_{\mathrm{C}}}{V_{\mathrm{B}}} = \frac{V_{\mathrm{D}}}{V_{\mathrm{A}}} = \left(\frac{T_{\mathrm{H}}}{T_{\mathrm{L}}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad \frac{V_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{C}}}{V_{\mathrm{B}}V_{\mathrm{D}}} = 1\,.$$

問 3　等温過程ゆえ系の内部エネルギー変化は 0 であり，熱力学第 1 法則から系の吸収する熱量は系が外部した仕事に等しい．

問 4　$p-V$ グラフの面積を計算して，

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\left(\frac{RT_{\mathrm{H}}}{V_{\mathrm{A}}} + \frac{RT_{\mathrm{H}}}{V_{\mathrm{B}}}\right)(V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{A}})\,.$$

よって，熱力学第 1 法則より，

$$Q_{\mathrm{H}} = W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\left(\frac{RT_{\mathrm{H}}}{V_{\mathrm{A}}} + \frac{RT_{\mathrm{H}}}{V_{\mathrm{B}}}\right)(V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{A}})\,.$$

問 5　同様にして，

$$Q_{\mathrm{L}} = |W_{\mathrm{C}\to\mathrm{D}}| = \frac{1}{2}\left(\frac{RT_{\mathrm{L}}}{V_{\mathrm{C}}} + \frac{RT_{\mathrm{L}}}{V_{\mathrm{D}}}\right)(V_{\mathrm{C}} - V_{\mathrm{D}})\,.$$

問 6　熱効率の定義，問 2 の結果より，

$$e = 1 - \frac{Q_{\mathrm{L}}}{Q_{\mathrm{H}}} = 1 - \frac{T_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{H}}} \frac{V_{\mathrm{C}}/V_{\mathrm{D}} - V_{\mathrm{D}}/V_{\mathrm{C}}}{V_{\mathrm{B}}/V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{A}}/V_{\mathrm{B}}} = \underset{\sim\sim\sim\sim}{1 - \frac{T_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{H}}}}\,.$$

問 7　A の体積を $\dfrac{V_{\mathrm{D}}}{V_{\mathrm{A}}}$ 倍すると V_{D}，A の圧力を $\dfrac{p_{\mathrm{D}}}{p_{\mathrm{A}}}$ 倍すると p_{D} になる．したがって，pV 平面上の点 $\mathrm{A}'(V_{\mathrm{D}}, p_{\mathrm{D}})$ は点 D と一致する．また，状態方程式と問 2 の結果 $\dfrac{V_{\mathrm{D}}}{V_{\mathrm{A}}} = \dfrac{V_{\mathrm{C}}}{V_{\mathrm{B}}}$ より，

$$\frac{p_{\mathrm{D}}}{p_{\mathrm{A}}} = \frac{V_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{D}}} \frac{T_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{H}}} = \frac{V_{\mathrm{B}}}{V_{\mathrm{C}}} \frac{T_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{H}}} = \frac{p_{\mathrm{C}}}{p_{\mathrm{B}}}$$

ゆえ，同様の計算により pV 平面上の点 $\mathrm{B}'(V_{\mathrm{C}}, p_{\mathrm{C}})$ は点 C と一致する．

曲線 AB 上の各点を (V, p)，曲線 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ 上の各点を (V', p') とする．このとき，状態方程式を利用して，

$$p'V' = p\frac{p_{\mathrm{D}}}{p_{\mathrm{A}}} V \frac{V_{\mathrm{D}}}{V_{\mathrm{A}}} = RT_{\mathrm{H}} \frac{RT_{\mathrm{L}}}{RT_{\mathrm{H}}} = RT_{\mathrm{L}}$$

を満たすことから，曲線 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ の各点は温度 T_{L} の等温曲線上に並ぶ．

さて，仕事については $p - V$ 図の面積で評価できるので，

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \int_{V_{\mathrm{A}}}^{V_{\mathrm{B}}} \frac{RT_{\mathrm{H}}}{V}\, dV\,,$$
$$W_{\mathrm{A}'\to\mathrm{B}'} = \frac{p_{\mathrm{D}}}{p_{\mathrm{A}}} \frac{V_{\mathrm{D}}}{V_{\mathrm{A}}} W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \frac{T_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{H}}} \int_{V_{\mathrm{A}}}^{V_{\mathrm{B}}} \frac{RT_{\mathrm{H}}}{V}\, dV = \frac{T_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{H}}} W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$$

となり，熱力学第 1 法則より，

$$\frac{Q_{\mathrm{L}}}{Q_{\mathrm{H}}} = \frac{T_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{H}}}\,, \qquad \therefore e = \underset{\sim\sim\sim\sim}{1 - \frac{T_{\mathrm{L}}}{T_{\mathrm{H}}}}\,.$$