第 1 問（万有引力，仕事の計算）

【メモ】

・問 1 は等速円運動ゆえ，運動方程式の中心成分を立てればよい．今回はこれで事足りるが，他方向のつりあいを立てる必要がある場合もある．

・問 2 以降は取り立てて触れる点はない．

【解答】

問 1　運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2}\,, \qquad \therefore v = \sqrt{\frac{GM}{r}}\,.$$

周期 T，角速度 ω はそれぞれ，

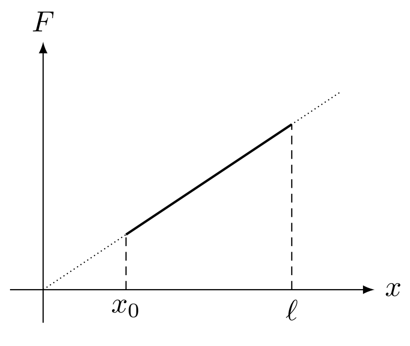
$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}}\,,\quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{GM}{r}}\,.$$

問 2　公式より，

$$F_{\mathrm{G}} = -G\frac{Mm}{(r+x)^2} = -G\frac{Mm}{r^2}\left(1+\frac{x}{r}\right)^{-2} \fallingdotseq -G\frac{Mm}{r^2}\left(1-\frac{2x}{r}\right).$$

問 3　遠心力を考慮して，

$$F = m(r+x)\omega^2 + F_{\mathrm{G}} = m(r+x)\frac{GM}{r^3} - G\frac{Mm}{r^2}\left(1-\frac{2x}{r}\right) \fallingdotseq \frac{3GMm}{r^3}x\,.$$



$F-x$ グラフ

問 4　仕事の定義より，

$$W = \int_{x_0}^{\ell} \frac{3GMm}{r^3}x\,dx = \frac{3GMm}{2r^3}(\ell^2 - {x_0}^2)\,.$$

問 5　回転する座標系で観測した物体のエネルギー収支より[*1][*2]，

$$\frac{1}{2}m{v_x}^2 - 0 = \frac{3GMm}{2r^3}(\ell^2 - {x_0}^2)\,, \qquad \therefore v_x = \sqrt{\frac{3GM}{r^3}(\ell^2 - {x_0}^2)}\,.$$

[*1] 勘違いをされないように：エネルギーを成分で分けているわけではない（エネルギーは成分分解できない）．回転座標系で観測した x 方向の運動方程式の両辺に v_x との積を取り，形式的にエネルギー収支の式を計算しただけである．

[*2] 物体の速さは，$\sqrt{{v_x}^2 + (r+\ell)\omega^2}$.

第２問（電磁誘導ーファラデイ則）

【メモ】

・ファラデイ則でも整合した結果が得られるが，現象としては $vB\ell$ の公式（ローレンツ力に由来する起電力）によって説明される．ファラデイ則では，ループ一周あたりの起電力が求まり，その値は

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

と計算され，起電力の正の向きは，磁束の正の向きに対して右ねじの方向を正と定める．

【解答】

問１　扇形の面積を計算して，

$$\Delta S = \frac{1}{2}r^2\omega \cdot 1 = \underset{\sim\sim}{\frac{1}{2}r^2\omega}\,.$$

問２　ループを扇形に定める（磁束の正の向きは磁束密度と揃える）．ファラデイ則より，

$$|\mathcal{E}| = |-\frac{1}{2}Br^2\omega| = \underset{\sim\sim}{\frac{1}{2}Br^2\omega}\,.$$

このとき，$\mathrm{P_1}$ の方が高電位．

問３　キルヒホッフ則より，導体棒には $I = \dfrac{Br^2\omega}{2R}$ の電流が流れる．よって，導体棒が磁場から受ける力の大きさは $F = \dfrac{B^2r^3\omega}{2R}$ であり，力のモーメントのつりあいより，

$$0 = F_{\mathrm{ex}}\frac{r}{2} - \frac{B^2r^3\omega}{2R}\cdot\frac{r}{2}\,, \qquad \therefore F_{\mathrm{ex}} = \underset{\sim\sim}{\frac{B^2r^3\omega}{2R}}\,.$$

問４　装置２について，電流は $\mathrm{P_2}$ から $\mathrm{O_2}$ に向かって流れる．したがって，導体棒は d 方向に運動する．

問５　キルヒホッフ則より，

$$0 = \frac{1}{2}Br^2\omega - \frac{1}{4}Br^2\omega' - RI\,, \qquad \therefore I = \underset{\sim\sim}{\frac{Br^2}{4R}(2\omega - \omega')}\,.$$

問６　装置２の導体棒が一定の角速度で運動することから，このとき $I = 0$ である．よって，消費電力は 0 であり，

$$\omega_2 = \underset{\sim}{2\omega}\,.$$

【補足１】$vB\ell$ 公式

中点の速さを用いて，

$$V = \frac{1}{2}r\omega Br = \frac{1}{2}Br^2\omega\,.$$

きちんと計算すれば，位置 x から $x+\Delta x\,(\Delta x = r/N)$ の微小区間にある部分に生じる起電力を，$x=0$ から $x=r$ までの総和を計算して，

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=0}^{N-1} x_k\omega B\Delta x \\ &= \int_0^r x\omega B\,dx \\ &= \frac{1}{2}Br^2\omega\,. \end{aligned}$$

第３問（核反応，半減期）

【メモ】

・問 2 は複数物体系の力学と同様の手続きで立式すればよい．原子物理では，運動量の大きさ p を用いて運動エネルギーを $K = \dfrac{p^2}{2m}$ と表したり，逆に $p = \sqrt{2mK}$ と表すように誘導が付く場合もある．これらの表現を暗記する必要はないが，出くわした際に困惑しないようにしておく．

・α 崩壊は原子核からヘリウム原子核が放出されることで，質量数が 4，原子番号が 2 減少する．β 崩壊は原子核から速い電子（と反電子ニュートリノ）が放出される．このとき，1 つの中性子が 1 つの陽子に変わり，原子番号が 1 増加する．

【解答】

問 1　エネルギー保存則より[*3]，

$$M_0c^2 = M_1c^2 + m^2 + K_\mathrm{Y} + K_\alpha\,, \qquad \therefore K_\mathrm{Y} + K_\alpha = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{(M_0 - M_1 - m)c^2}\,.$$

問 2　エネルギー・運動量保存則より，

$$\begin{cases} \sqrt{2M_1K_\mathrm{Y}} + \sqrt{2mK_\alpha} = 0\,, \\ M_0c^2 = M_1c^2 + m^2 + K_\mathrm{Y} + K_\alpha\,, \end{cases} \qquad \therefore K_\alpha = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{M_1}{M_1+m}(M_0 - M_1 - m)c^2}\,.$$

問 3　力学的エネルギー保存則より，

$$k_0\frac{79e\cdot 2e}{r} = K\,, \qquad \therefore r = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{158k_0e^2}{K}}\,.$$

問 4　質量数，陽子数の変化に注目して，

$$\begin{cases} -4n = -12\,, \\ -2n + k = -4 \end{cases} \qquad \therefore n = \underset{\sim}{3}\,,\quad k = \underset{\sim}{2}\,.$$

問 5　 4.5×10^9 年前 のそれぞれの残存粒子数をそれぞれ ${}^{235}U(0)$，${}^{238}U(0)$ とする．そこから t 年後の残存粒子数はそれぞれ，

$$\begin{cases} {}^{235}U(t) = {}^{235}U(0)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/7.5\times 10^8}\,, \\ {}^{238}U(t) = {}^{238}U(0)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/4.5\times 10^9}\,. \end{cases}$$

$t = 4.5\times 10^9$ 年 でその存在比が $1:140$ を満たすので，

$$\frac{{}^{238}U(4.5\times 10^9)}{{}^{235}U(4.5\times 10^9)} = \frac{{}^{238}U(0)}{{}^{235}U(0)}\frac{(1/2)^{4.5\times 10^9/7.5\times 10^8}}{(1/2)^{4.5\times 10^9/4.5\times 10^9}} = \frac{140}{1}\,, \qquad \therefore \frac{{}^{238}U(0)}{{}^{235}U(0)} = \underset{\sim}{\frac{35}{8}}\,.$$

---

*3 これを反応熱と呼ぶ．

問 6　与えられた数値より,

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{1.1 \times 10^{-7}\,\mathrm{kg}}{235^{-3}\,\mathrm{kg/mol}} \times 6.0 \times 10^{23}\,/\mathrm{mol} \times 2.0 \times 10^{8} \times 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J} \\
&= 8.98... \times 10^{8}\,\mathrm{J} \\
&\fallingdotseq 9.0 \times 10^{8}\,\mathrm{J}\,.
\end{aligned}
$$