第 1 問（複数物体系の力学，衝突）

【メモ】

・複数物体系の運動の基本は保存則（外力のない方向の運動量成分，力学的エネルギー）の連立.

・衝突は外力のない方向の運動量保存則と問題で与えられた条件を連立して解く.

【解答】

問 1　運動量保存則・弾性衝突より，

$$\begin{cases} mv' + Mu = mv\,, \\ v' - u = -1(v-0)\,, \end{cases} \qquad \therefore v = \frac{m-M}{M+m}v\,,\ \ u = \frac{2m}{M+m}v\,.$$

問 2　系 S に x 方向の外力がはたらかないため，重心速度は一定に保たれる．重心速度は，重心の定義より，

$$V = \frac{Mu + M\cdot 0}{M+M} = \frac{m}{M+m}v\,.$$

問 3　はね返り係数の定義より，

$$v' - V = -e(v-0)\,, \qquad \therefore e = \frac{M}{M+m}\,.$$

問 4　問 1 より，

$$\begin{aligned} -\mathit{\Delta} E = &= \frac{1}{2}mv^2 - \left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{m-M}{M+m}v\right)^2 + M\left(\frac{2m}{M+m}v\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{2}\frac{m}{(M+m)^2}v^2\left\{(M+m)^2 - (m-M)^2 - 2Mm\right\} \\ &= \left(\frac{m}{M+m}\right)Mv^2\,. \end{aligned}$$

問 5　ばねの伸びが最大のとき，2 物体の速度は等しい[*1]．系の運動量保存則，力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} Mw + Mw = M\dfrac{2m}{M+m}v\,, \\ \dfrac{1}{2}Mw^2 + \dfrac{1}{2}Mw^2 + \dfrac{1}{2}k(L-L_0)^2 = \dfrac{1}{2}M\left(\dfrac{2m}{M+m}v\right)^2\,, \end{cases}$$

$$\therefore L = L_0 + \frac{m}{M+m}v\sqrt{\frac{2M}{k}}\,.$$

[*1] ばねの伸びは $(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}) - L_0$ と表され，これが極大値を取るため，2 物体の速度は等しくなる.

第２問（荷電粒子の運動，仕事の計算）

【メモ】

・y 方向は $y = vt$ を満たすように束縛されている．

・問 4 の仕事の計算は，エネルギー収支からでも求まるが定義通り計算するのが楽．

【解答】

問 1　図より，

$$|\vec{v}| = \frac{v}{\cos\theta} .$$

ローレンツ力の x 成分 f_x，および大きさ f は，

$$f_x = qvB \,, \quad f = \sqrt{(qvB)^2 + (qv\tan\theta B)^2} = \frac{qvB}{\cos\theta} .$$

問 2　運動方程式より[*2],

$$\begin{cases} ma_x = qvB \,, \\ m \cdot 0 = N - qv_xB \,, \end{cases} \qquad \therefore a_x = \frac{qvB}{m} \,, \quad N = qv_xB .$$

加速度一定より $x = \dfrac{qvB}{2m}t^2$ と表せる．ここに $y = vt$ を代入して，

$$x = \frac{qvB}{2mv}y^2 .$$

問 3　問 2 より，

$$N = qv_xB = \frac{(qB)^2}{m}vt = \frac{(qB)^2}{m}y \ \ (y \text{ 正方向}) .$$

問 4　仕事の定義より，

$$W = \int_0^{y_1} \frac{(qB)^2}{m} y \, dy = \frac{(qBy_1)^2}{2m} .$$

[*2] y 方向の加速度は $y = vt$ より 0.

第３問（ボーアの原子モデル）

【解答】

問 1　運動方程式（中心成分）は，

$$m\frac{v^2}{r} = k_0\frac{Ze^2}{r^2}\,.$$

問 2　運動方程式・量子条件より，

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{r} = k_0\dfrac{Ze^2}{r^2}\,, \\ mvr = n\dfrac{h}{2\pi}\,, \end{cases}$$

$$\therefore r = \frac{h^2}{4\pi^2 mk_0Ze^2}n^2\,,\quad v = \frac{2\pi k_0Ze^2}{h}n\,.$$

問 3　系の力学的エネルギーは，

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + k_0\frac{Ze(-e)}{r} = -k_0\frac{Ze^2}{2r} = -\frac{2\pi^2{k_0}^2mZ^2e^4}{h^2}\frac{1}{n^2}\,.$$

問 4　量子数 k の軌道から量子数 n の軌道へ遷移するとき，振動数条件より，

$$E_k - E_n = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

のエネルギーを持つ光子が放出される．これを整理すれば，

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right)$$

となり，ここに与えられた数値を代入して，

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\lambda R(1/n^2 - 1/k^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1.1\times 10^7\,/\mathrm{m}\times 164\times 10^{-9}\,\mathrm{m}\times 5/36}} \fallingdotseq 2\,.$$

問 5 (a)　エネルギー等分配則より[*3]，

$$\frac{1}{2}M\overline{V^2} = \frac{3}{2}kT\,.$$

(b)　等方性より，

$$\overline{{V_x}^2} = \frac{1}{3}\overline{V^2}\,.$$

[*3] 分子運動論の帰結の 1 つゆえ覚えなくてよい（ただしこの問題は解けなくなる）．分子運動論は主要な流れがなぞれればそれでよい．

(c)　与式より，

$$\left(1-\frac{\sqrt{\overline{{V_x}^2}}}{c}\right)\lambda_0 \leq \lambda \leq \left(1+\frac{\sqrt{\overline{{V_x}^2}}}{c}\right)\lambda_0\,.$$

ここで，(a)，(b) より，

$$\sqrt{\overline{{V_x}^2}} = \sqrt{\frac{k}{M}T}$$

ゆえ

$$\varDelta\lambda = \underline{\frac{\lambda_0}{c}\sqrt{\frac{k}{M}T}}$$

問 6　与えられた数値を代入して，

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{\varDelta\lambda}{\lambda_0}\right)^2 c^2\frac{M}{k} \\ &= \left(\frac{1\times 10^{-11}\,\mathrm{m}}{164\times 10^{-9}\,\mathrm{m}}\right)^2 \times (3.0\times 10^8\,\mathrm{m/s})^2 \times \frac{6.65\times 10^{-27}\,\mathrm{kg}}{1.38\times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}} \\ &\fallingdotseq \underline{2\times 10^5\,\mathrm{K}}\,. \end{aligned}$$