I　複数物体系，時間追跡（単振動），動く座標系

【メモ】

・問 1 から問 4 までは複数物体系の基本通り，

$$\begin{cases} \text{外力のない方向の運動量保存則} \\ \text{全体のエネルギー保存則} \end{cases}$$

で処理を行えばよい．

・問 5 以降は，今の設定が複数物体系でも例外的な運動方程式が解けるケース[*1]であることから，運動方程式を解くような誘導となっている．今回は台から見た観測者を利用した（慣性力を考えるタイプの）誘導となっている．他のよくある誘導については【補足】を参照．

【解答】

問 1　重心の定義より，

$$x_{\mathrm{CM}} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{M}{M+m}X_0}\,.$$

問 2　以下位置，および速度について，小球に関する量を小文字，台に関する量を大文字で記す．運動量保存則より，

$$mv + MV = mv_0\,.$$

両辺時間積分をすれば，

$$mx + MX = mv_0 t + \mathrm{const}\,.$$

$t = 0$ で $x = 0$，$X = X_0$ より，

$$mx + MX = mv_0 t + MX_0\,.$$

よって，

$$x_{\mathrm{CM}}(t) = \frac{mx + MX}{m + M} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{M}{M+m}X_0 + \frac{m}{M+m}v_0 t}\,.$$

問 3　2 物体とばねからなる系を考える．系のエネルギー・運動量保存則より，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}MV^2 + \dfrac{1}{2}kd^2 = \dfrac{1}{2}m{v_0}^2\,, \\ mv + MV = mv_0\,. \end{cases}$$

[*1] 連立微分方程式となっているが，上手いこと式変形を行うことで解ける微分方程式へと帰着させることができる．

ばねの縮みが最大のとき，$v=V$ より[*2]，

$$mv+Mv=mv_0\,,\qquad \therefore v=V=\underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{m}{M+m}v_0}\,.$$

問 4　問 3 より，

$$\frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{m}{M+m}v_0\right)^2+\frac{1}{2}k{d_1}^2=\frac{1}{2}m{v_0}^2\,,\qquad \therefore d_1=v_0\sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}\,.$$

問 5　縮み d のとき，台の運動方程式は，

$$MA=+kd\,.$$

問 6 (1)　台とともに動く観測者から観測した小球の運動方程式は，慣性力を考慮して，

$$ma=-kd-mA\,.$$

(2)　2 物体の運動方程式より，

$$ma=-kd-mA=-k\left(1+\frac{m}{M}\right)d\,,\qquad \therefore a=-\frac{M+m}{Mm}kd\,.$$

ここで，時刻 t での小球の位置を x，台の位置を X，ばねの自然長を ℓ とする．このとき，時刻 t でのばねの縮み d は，

$$d=\ell-(X-x)$$

と書け，$t=0$ で $d=0$ より，

$$0=\ell-(X_0-0)\,,\qquad \therefore \ell=X_0$$

と ℓ を求めることができる．また，縮み d の時間微分を考えれば，

$$\ddot{d}=\ddot{x}-\ddot{X}$$

となり，台に対する小球の相対加速度となる（すなわち，$\ddot{d}=a$ である）．よって，d は単振動の微分方程式を満たすことがわかる．その角振動数は運動方程式より，

$$\omega=\sqrt{\frac{M+m}{Mm}k}\,.$$

[*2] 2 物体の相対的な位置が極小値を取るので，相対速度は 0 となる．

問 7　運動方程式より，

$$X_0 - (X - x) = C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\,.$$

初期条件 $x(0) = 0$，$X(0) = X_0$，$v(0) = v_0$，$V(0) = 0$ より，

$$X_0 - (X - x) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) = d_1 \sin(\omega t)\,.$$

また，問 2 より，

$$mx + MX = mv_0 t + MX_0\,.$$

2 式を X について解いて，

$$X = \underline{X_0 + \frac{m}{M+m}\left\{v_0 t - d_1 \sin(\omega t)\right\}}\,.$$

【補足 1】運動量保存則についての確認

時刻 t における両物体の運動方程式は，ばねの自然長を ℓ とすれば，

$$\begin{cases} M\dfrac{dV}{dt} = +k\left\{\ell - (X - x)\right\}\,, \\ m\dfrac{dv}{dt} = -k\left\{\ell - (X - x)\right\}\,. \end{cases}$$

2 式和を取って[*3]，

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(mv + MV) = 0 \\ &\quad \therefore mv + MV = mv(0) + MV(0)\,. \end{aligned}$$

【補足 2】重心運動エネルギーと相対運動エネルギー

重心速度を v_{CM}，小球に対する台の相対速度を v_{re} と記すと，それぞれ，

$$v_{\mathrm{CM}} = \frac{mv + MV}{m + M}\,,\quad v_{\mathrm{re}} = v - V\,.$$

このとき，2 物体の運動エネルギーの和は，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}(M+m){v_{\mathrm{CM}}}^2 + \frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}{v_{\mathrm{re}}}^2$$

と書ける[*4].

[*3] 質量が一定なことを暗に利用している.

[*4] 相対運動エネルギーの質量の部分 $\mu = \dfrac{Mm}{M+m}$ を換算質量と呼ぶ.

右辺に v_{CM}，v_{re} を入れてみると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(M+m){v_{\mathrm{CM}}}^2+\frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}{v_{\mathrm{re}}}^2 &= \frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{mv+MV}{m+M}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}(v-V)^2 \\ &= \frac{M^2V^2+2MmVv+m^2v^2+Mm\left(v^2+V^2-2Vv\right)}{2(M+m)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{m^2+Mm}{M+m}v^2+\frac{1}{2}\frac{M^2+Mm}{M+m}V^2 \\ &= \frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2\end{aligned}$$

と確認できる．

【補足 3】よくある誘導その①（重心運動と相対運動）

【補足 1】より，時刻 t における両物体の運動方程式は，

$$\begin{cases} M\dfrac{dV}{dt}=+k\left\{\ell-(X-x)\right\}\,, \\ m\dfrac{dv}{dt}=-k\left\{\ell-(X-x)\right\}\,. \end{cases}$$

2 式の和を取った式*5を t で 2 回積分すれば*6，

$$mx+MX=mv(0)t+MV(0)t+mx(0)+MX(0)\,.$$

続いて，両方の式を各物体の質量で割ってから差を取って*7，

$$\frac{d}{dt}(v-V)=-k\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\left\{\ell-(X-x)\right\}=-\frac{M+m}{Mm}k(x-X+\ell)\,.$$

よって，$x-X+\ell$ は単振動の微分方程式を満たし，角振動数を $\omega=\sqrt{\dfrac{M+m}{Mm}k}$ と置けばその解は，

$$x-X+\ell=\frac{v(0)-V(0)}{\omega}\sin(\omega t)+\left\{x(0)-X(0)+\ell\right\}\cos(\omega t)$$

と表される．あとは重心の運動方程式の結果と合わせることで，x，X が求まる．

【補足 4】よくある誘導その②（重心系を利用）

ここでは，重心とともに動く観測者から観測した両物体の運動方程式を考える．**【補足 1】**より，重心は等速で運動をする．そのため，重心とともに動く観測者から観測した両物体の運動方程式を考える際，慣性力を考える必要はない（重心に対する相対加速度も各物体の加速度と等しい）．

*5 重心の運動方程式．

*6 **【補足 1】**の運動量保存則をもう一度 t で積分するだけ．

*7 言うまでもないが，左辺は相対加速度を表す．

重心から観測した各物体の運動を論じる際，ばねの長さが変わることによってばね定数が変化すること に注意する必要がある．ばねのばね定数は長さを $\dfrac{1}{n}$ 倍したときに n 倍となるので[*8]，重心でばねを分割したとき，小球側のばね定数を k_1，台側のばね定数を k_2 とするとそれぞれ[*9]，

$$k_1 = \frac{k}{M/(m+M)}\,, \quad k_2 = \frac{k}{m/(m+M)}\,.$$

以上より，重心に対する各物体の位置をそれぞれ $x' = x - x_{\mathrm{CM}}$，$X' = X - x_{\mathrm{CM}}$ としたとき，各物体の運動方程式は，

$$\begin{cases} M\ddot{X}' = -\dfrac{M+m}{m}kX'\,, \\ m\ddot{x}' = -\dfrac{M+m}{M}kx'\,, \end{cases}$$

となり，この式から共に各振動数は等しく $\omega = \sqrt{\dfrac{M+m}{Mm}k}$ とわかる．この式を与えられた初期条件の下で解き，重心の運動と合わせることで，x，X が求まる．

[*8] ばねの伸縮を x とすると，そのときはたらく弾性力は

$$f = kx = nk\left(\frac{1}{n}x\right)$$

より，ばねを $\dfrac{1}{n}$ 倍の長さにしたとき，その部分の伸びは $\dfrac{1}{n}$ 倍となり，同時にばね定数は n 倍されることが確認できる．

[*9] 重心の位置はそれぞれの質量の位置の逆比で内分された位置なので，ばねが自然なとき重心から小球までの長さは $\dfrac{M}{M+m}\ell$ である．

II 荷電粒子の運動

【メモ】

電場，磁場の入っただけの力学.

【解答】

問 1　電位の基準を右側の極板とすれば，力学的エネルギー保存則より[*10]，

$$\frac{1}{2}mv^2 + Ze\cdot 0 = \frac{1}{2}m\cdot 0^2 + Ze\cdot E_{\mathrm{a}}d\,, \qquad \therefore v = \sqrt{\frac{2ZeE_{\mathrm{a}}d}{m}}\,.$$

問 2　クーロン力とローレンツ力がつりあうような向きを考えればよいので（ア）の向き．大きさはつりあいより，

$$0 = ZeE_{\mathrm{s}} - ZevB_{\mathrm{s}}\,, \qquad \therefore B_{\mathrm{s}} = E_{\mathrm{s}}\sqrt{\frac{m}{2ZeE_{\mathrm{a}}d}}\,.$$

問 3　運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{v^2}{r} = ZevB_{\mathrm{d}}\,, \qquad \therefore r = \frac{1}{B_{\mathrm{b}}}\sqrt{\frac{2mE_{\mathrm{a}}d}{Ze}}\,.$$

問 4　電極 a で検出されるためには，軌道半径が

$$\begin{cases} 2r > \ell\,, \\ r < \ell\,, \end{cases} \qquad \therefore \frac{\ell}{2} < r < \ell\,.$$

となればよい．よって，

$$\frac{1}{\ell}\sqrt{\frac{2mE_{\mathrm{a}}d}{Ze}} < B_{\mathrm{d}} < \frac{2}{\ell}\sqrt{\frac{2mE_{\mathrm{a}}d}{Ze}},.$$

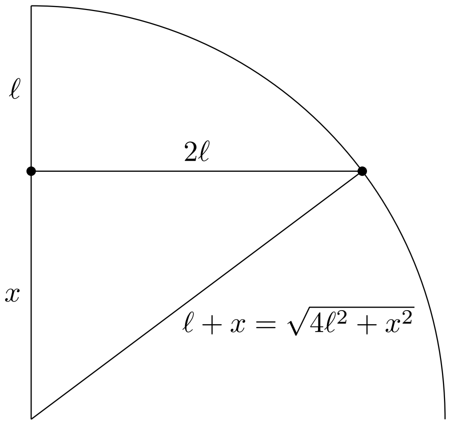
電極 b も同様に考える．下限は ℓ とすぐにわかる．上限は，円軌道の半径を $\ell + x$ と置くと三平方の定理より（図を参照），

$$\ell + x = \sqrt{4\ell^2 + x^2}\,, \qquad \therefore x = \frac{3}{2}\ell\,.$$

よって，軌道半径は $\ell < r < \dfrac{5}{2}\ell$ を満たせばよく，

$$\frac{2}{5\ell}\sqrt{\frac{2mE_{\mathrm{a}}d}{Ze}} < B_{\mathrm{d}} < \frac{1}{\ell}\sqrt{\frac{2mE_{\mathrm{a}}d}{Ze}},.$$

[*10] 一応コメントしておくと，荷電粒子の運動エネルギーと（空間が蓄える）クーロン力の位置エネルギーの和が一定になる.



問 5　$\beta = \dfrac{1}{\ell}\sqrt{\dfrac{mE_{\mathrm{a}}d}{e}}$ とする．$Z = 1, 2$ の半径をそれぞれ r_1，r_2 とすると，

$$r_1 = \frac{1}{B_{\mathrm{d}}}\sqrt{\frac{2mE_{\mathrm{a}}d}{e}}, \quad r_2 = \frac{1}{B_{\mathrm{d}}}\sqrt{\frac{mE_{\mathrm{a}}d}{e}}.$$

$r_1 > r_2$ より，別々の電極で検出するときは，$Z = 1$ の粒子を電極 b で，$Z = 2$ の粒子を電極 a で検出することになる．このときの電流計の読みが，$Z = 1$ が電極 b で検出されて I_{b}，$Z = 2$ が電極 a で検出されて I_{a} である．

続いて，$Z = 1$ の粒子が各電極で検出されるための B_{d} の範囲は，

$$\begin{cases} \mathrm{a}: \sqrt{2}\,\beta < B_{\mathrm{d}} < 2\sqrt{2}\,\beta, \\ \mathrm{b}: \dfrac{2\sqrt{2}}{5}\beta < B_{\mathrm{d}} < \sqrt{2}\,\beta. \end{cases}$$

同様に，$Z = 2$ の粒子が各電極で検出されるための B_{d} の範囲は，

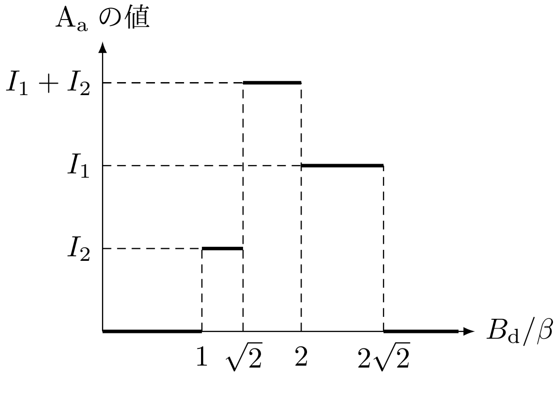
$$\begin{cases} \mathrm{a}: \beta < B_{\mathrm{d}} < 2\beta, \\ \mathrm{b}: \dfrac{2}{5}\beta < B_{\mathrm{d}} < \beta. \end{cases}$$

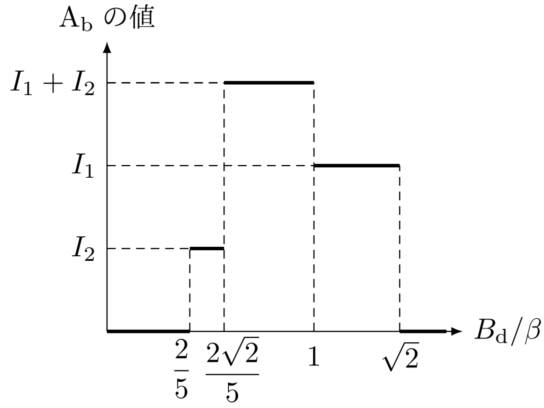
以上から，同時に別々の電極で計測するときは[11]，

$$\begin{cases} \dfrac{2\sqrt{2}}{5}\beta < B_{\mathrm{d}} < \sqrt{2}\,\beta, \\ \beta < B_{\mathrm{d}} < 2\beta, \end{cases} \qquad \therefore \underline{\frac{1}{\ell}\sqrt{\frac{mE_{\mathrm{a}}d}{e}} < B_{\mathrm{d}} < \frac{1}{\ell}\sqrt{\frac{2mE_{\mathrm{a}}d}{e}}}.$$

また，グラフは以下のようになる．

[11] 上が電極 b で $Z = 1$ の条件，下が電極 a で $Z = 2$ の条件．





問 6　I_a，I_b はそれぞれ，

$$I_\mathrm{a}=2eN_2\,,\quad I_\mathrm{b}=eN_1\,.$$

よって，

$$\frac{N_2}{N_1}=\frac{I_\mathrm{a}}{2I_\mathrm{b}}\,.$$

III　気体の状態変化（基本形と断熱）

【メモ】

・p は可動部分のつりあいから，V は図から，状態方程式を用いて T 求めるのが基本．

・$\mathit{\Delta} U$ は公式，W は $P-V$ 図の面積，この 2 つの値を用いて熱力学第 1 法則によって熱量 Q が求まる．

・ゆっくりとした断熱変化ではポアソンの公式が使え，熱力学第 1 法則は W の決定式となる．

・問題で与えてある文字が過剰なため，一部の解答に複数の表現が可能となってしまっている．詳しくは，解答の中の脚注に．

【解答】

問 1　内部気体の状態方程式より，

$$\begin{cases} p_0V_0 = nRT_0\,, \\ p_0V_1 = nR\cdot 2T_0\,, \end{cases} \qquad \therefore V_1 = \underbrace{2V_0}_{(a)}\,.$$

今，比熱比が $\gamma = \dfrac{5}{3}$ より単原子分子理想気体とわかる[*12]．内部エネルギー変化は公式より，

$$\mathit{\Delta} U = \frac{3}{2}nR(2T_0 - T_0) = \frac{3}{2}nRT_0\,.$$

仕事は $p-V$ 図の面積より[*13][*14]，

$$W = p_0\mathit{\Delta} V = \underbrace{p_0V_0}_{(b)} = \underbrace{nRT_0}_{(b)}\,.$$

よって，熱力学第 1 法則より[*15]，

$$Q = \mathit{\Delta} U + W = \underbrace{\frac{5}{2}nRT_0}_{(c)}\,.$$

[*12] 問題文で定積モル比熱を C_V とも与えているので，

$$\mathit{\Delta} U = nC_V\mathit{\Delta} T$$

としても良い．

[*13] ピストンのつりあいより，$p_{内部気体} = p_{大気}$ が成り立つ．

[*14] 以降全てのエネルギーに関する問題で，nRT_0 を p_0V_0 としても文字指定は満たす．

[*15] 定積モル比熱 C_V などを用いた場合，

$$Q = n(C_V + R)T_0 = \left(1 + \frac{C_V}{R}\right)p_0V_0 = nC_pT_0 = \frac{C_p}{R}p_0V_0$$

のような解答が得られる（通常はやらないが，他の文字の組み合わせで表現することも可能である）．設問の並びから想定された解答は nC_pT_0 だと思われるが，複数の解答（この問題ではざっくりと 5 通り（揚げ足を取るようにすれば，文字の組み合わせを気にしなければもっとある））の仕方ができてしまうのは仕事が雑な気がします．

問 2　気体の分子量を M とすると，$h=0$ での気体の密度 ρ_0 は，

$$p_0 = \rho_0 \frac{R}{M} T_0 \,, \qquad \therefore \rho_0 = \frac{p_0 M}{R T_0} \,.$$

高さ h にある大気の密度 ρ は，与えられた式を用いて，

$$\begin{aligned} p_0 \left(1 - \frac{h}{h_0}\right) &= \rho \frac{R}{M} T_0 \left(1 - \frac{h}{3h_0}\right) \\ \rho &= \frac{p_0 M}{R T_0} \frac{1 - h/h_0}{1 - h/3h_0} = \rho_0 \frac{1 - h/h_0}{1 - h/3h_0} \,, \qquad \therefore A = \underbrace{\frac{1}{h_0}}_{\text{(d)}} \,, \quad B = \underbrace{\frac{1}{3h_0}}_{\text{(d)}} \,. \end{aligned}$$

内部気体の密度は，状態方程式より，

$$p_0 = \rho \frac{R}{M} \cdot 2T_0 \,, \qquad \therefore \rho = \frac{1}{2} \rho_0 \,.$$

高さ h_1 での大気の密度を ρ_1 とすると，シリンダーのつりあいより[*16]，

$$\begin{aligned} 0 &= \rho_1 V_1 g - \rho V_1 g \\ \frac{1}{2} \rho_0 &= \rho_0 \frac{1 - h_1/h_0}{1 - h_1/3h_0} \,, \qquad \therefore h_1 = \underbrace{\frac{3}{5} h_0}_{\text{(e)}} \,. \end{aligned}$$

問 3　大気の温度は与えられた式より，

$$T_{大気} = T_0 \left(1 - \frac{3h_0/5}{3}\right) = \frac{4}{5} T_0 \,.$$

よって，内部気体の状態方程式より，

$$p = \frac{nRT_{大気}}{V_1} = \frac{2}{5} \frac{nRT_0}{V_0} = \underbrace{\frac{2}{5} p_0}_{\text{(f)}} \,.$$

$\Delta V = 0$ より仕事 W は 0．内部エネルギーは公式より求まるので，熱力学第 1 法則より[*17]，

$$Q = \Delta U + W = \frac{3}{2} nR \left(\frac{4}{5} T_0 - 2T_0\right) = -\frac{9}{5} nRT_0 \,, \qquad Q_{放出} = -Q = \underbrace{\frac{9}{5} nRT_0}_{\text{(g)}} \,.$$

問 4　高さ h_1 での大気の圧力は与えられた式より，

$$p_{大気} = p_0 \left(1 - \frac{3h_0/5}{h_0}\right) = \frac{2}{5} p_0 \,.$$

ピストンのつりあいより $p = p_{大気}$ ゆえ，

$$\frac{2}{5} p_0 V_2 = nR \cdot \frac{4}{5} T_0 \,, \qquad V_2 = 2V_0 = \underbrace{V_1}_{\text{(h)}} \,.$$

[*16] ピストンなどの気体以外の質量が全て無視できることから，浮力と内部気体の受ける重力がつりあう（気体の質量に比べて無視できるような質量の装置...）．

[*17] 定積モル比熱を C_V で計算した場合，

$$Q_{放出} = -Q = \frac{6}{5} n C_V T_0 \,.$$

問 5　ポアソンの公式より[*18]，

$$p_0{V_3}^{\gamma}=\frac{2}{5}p_0(2V_0)^{\gamma}$$

$$\therefore V_3=2^{1+\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{\gamma}}V_0=2\times1.5\times\frac{1}{2.6}V_0=\underset{(\mathrm{i})}{\underline{\frac{15}{13}V_0}}\quad.$$

問 6　状態方程式より，

$$T_3=\frac{p_0V_3}{nR}=\underset{(\mathrm{j})}{\underline{\frac{15}{13}T_0}}\quad.$$

【補足】問題文で与えられた温度と圧力の式を考えてみる

はじめに，準備として高さ z から $z+\Delta z$ にある静止した空気柱のつりあいを考える．空気の密度を $\rho(z)$ とすれば，

$$0=P(z)S-P(z+\Delta z)S-\rho(z)S\Delta zg\,,\qquad\therefore \Delta P=P(z+\Delta z)-P(z)=-\rho(z)g\Delta z\,.$$

ここで，状態方程式より，気体の分子量を M とすれば $\rho(z)=\dfrac{MP(z)}{RT(z)}$ であるから，

$$\frac{\Delta P}{P}=-\frac{Mg}{R}\frac{\Delta z}{T(z)}\tag{1}$$

を得る．

さて，ここでは空気（理想気体）の塊が重力を受けながらゆっくりと上昇，および下降をするモデルを想定する．なお，このとき空気の塊は断熱変化をするものと考える．

状態方程式より，微小な変化に対しては[*19]，

$$\begin{cases}PV=nRT\,,\\(P+\Delta P)(V+\Delta V)=nR(T+\Delta T)\,,\end{cases}\qquad\therefore\frac{\Delta P}{P}+\frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta T}{T}\,.\tag{2}$$

熱力学第 1 法則・状態方程式より，

$$0=P\Delta V+nC_{\mathrm{V}}\Delta T\,,\qquad\therefore\frac{\Delta V}{V}=-\frac{C_{\mathrm{V}}}{R}\frac{\Delta T}{T}\,.\tag{3}$$

(2)，(3) 式より比熱比 $\gamma=\dfrac{C_{\mathrm{p}}}{C_{\mathrm{V}}}$ を用いて，

$$\frac{\Delta P}{P}=\frac{C_{\mathrm{V}}+R}{R}\frac{\Delta T}{T}=\frac{C_{\mathrm{p}}}{C_{\mathrm{p}}-C_{\mathrm{V}}}\frac{\Delta T}{T}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\Delta T}{T}\,.$$

[*18] 分数で解答しましたが，小数で答えた方が適切です．

[*19] 上下で割り算をして，左辺の Δ の 2 次の項を 0 とすれば得られる．

ここで (1) 式を用いれば，

$$\frac{\Delta T}{\Delta z} = -\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{Mg}{R}$$

となり，$T(z=0)=T_0$ として，

$$T(z) = T_0 - \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{Mg}{R}z = T_0\left(1-\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{Mg}{RT_0}z\right)$$

を得る．比熱比の値 $\gamma=\dfrac{5}{3}$ を用い，$z_0=\dfrac{RT_0}{Mg}$，$h_0=\dfrac{2}{15}z_0$ と置けば，

$$T(z) = T_0\left(1-\frac{5}{2}\frac{Mg}{RT_0}z\right) = T_0\left(1-\frac{5}{2}\frac{z}{z_0}\right) = T_0\left(1-\frac{z}{3h_0}\right) .$$

次に $P(z)$ を求める．(1) 式より，

$$\frac{\Delta P}{P} = -\frac{Mg}{R}\frac{\Delta z}{T_0\left(1-\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\dfrac{Mg}{RT_0}z\right)} = \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{\Delta z}{z-\left(1-\dfrac{1}{\gamma}\right)z_0} .$$

ここで簡単のため $\beta = 1-\dfrac{1}{\gamma}$ と置いて，両辺積分をすれば，

$$\int\frac{dP}{P} = \beta\int\frac{dz}{z-\beta z_0}\,, \qquad \therefore \log|P| = \log|z-\beta z_0|^{\beta} + \mathrm{const}\,.$$

$P(z=0)=P_0$ として，

$$P = P_0\left(1-\frac{z}{\beta z_0}\right)^{\beta} .$$

ここで，z_0 が大体どの程度の値なのかを見積もってみると，空気の分子量を $M = 3\times10^{-2}\,\mathrm{kg}$，気体定数を $R = 1\times10^{1}\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$，重力加速度の大きさを $g = 1\times10^{1}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，地表での温度を $T_0 = 3\times10^{2}\,\mathrm{K}$ とすれば，

$$z_0 = 1\times10^{4}\,\mathrm{m}$$

となり，$10\,\mathrm{km}$ より十分低い地表付近の高度 z では[*20]

$$P(z) \fallingdotseq P_0\left(1-\frac{z}{z_0}\right) = P_0\left(1-\frac{2}{15}\frac{z}{h_0}\right) .$$

となり，少々違う結果となってしまう．筑波のこの問題を作った人は，一体どういうモデルを用いてあの 2 式を求めたのでしょうか（まさかテキトーではないと思うので，純粋に気になります）．

[*20] 実数 α，$|\varepsilon| \ll 1$ の ε に対し成り立つ近似式

$$(1+\varepsilon)^{\alpha} \fallingdotseq 1+\alpha\varepsilon$$

を用いた．