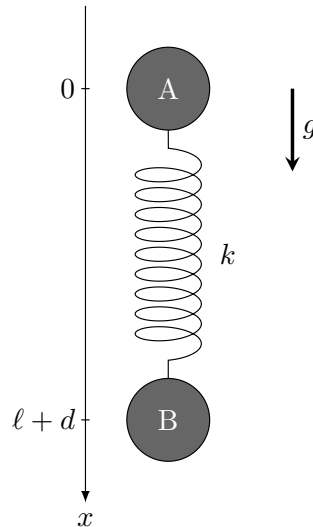


■ Slinky Fall

まず，次の動画の冒頭 10 秒を見てみよう．

→ <https://www.youtube.com/watch?v=uiyMuHuCFo4&t=228s>

スリンキーと呼ばれるばねのおもちゃ（以降，混乱の生じない場面ではばねと呼ぶ）の上端を固定して鉛直方向に吊るし，上端の固定を解き自由な状態にすると，ばねの下端は静止したまま上端だけがギューンと加速した運動を行う様子が観測できる．ここでは，この力学現象の考察を行ってみよう．



スリンキーを，図のように質量が m で等しい 2 つの小物体 A, B をばね（ばね定数 k ，自然長 ℓ ，質量無視）で繋いだモデルで近似する．はじめ，小物体 A, B はばねが自然長から d だけ伸びた状態で静止している．鉛直下向きに x 軸を定め，その原点をはじめ静止している小物体 A の位置に定める．時刻 t における物体 A, B の位置，および加速度はそれぞれ x_A , x_B , $\ddot{x}_A = \frac{d^2x_A}{dt^2}$, $\ddot{x}_B = \frac{d^2x_B}{dt^2}$ と記す*1．重力加速度の大きさを g とする．

まず，始状態におけるばねの伸び d を求めよう．

問 1：図において，小物体 B のつりあいを考えることにより，静止している状態におけるばねの伸び d が $\frac{mg}{k}$ と等しいことを示せ．

続いて，落下後の運動について考える．物体 A, B の位置がそれぞれ x_A , x_B にあるとき，ばねの長さは $x_B - x_A$ と表すことができる．そのため，ばねが自然長よりも伸びている場合，ばねの伸び s は，

$$s = (x_B - x_A) - \ell$$

*1 物理では，適当な物理量 O に対する時刻に関する微分を $\dot{O} = \frac{dO}{dt}$ と略記することが多い．なお，空間座標 x に関する微分は，高校数学でも馴染み深い $O' = \frac{dO}{dx}$ のように略記することが多い．

となり、2物体それぞれがばねから受ける弾性力は、ばねが縮もうとする向きに大きさ ks となる。よって、小物体 A, B の運動方程式は、

$$\begin{cases} m\ddot{x}_A = +k(x_B - x_A - \ell) + mg, \\ m\ddot{x}_B = -k(x_B - x_A - \ell) + mg \end{cases}$$

となる。

問2：ばねが自然長よりも縮んでいると仮定して運動方程式を立てた場合も、上記の運動方程式と全く同じ形となることを確認せよ。

ここからは運動方程式を解くことを考える。この運動方程式は、2つの変数 x_A, x_B についての連立微分方程式であり、変数が入り組んでいることから一見して解くのが困難に見える。だが、今回のような2物体系においては、変数の置き換えによって運動方程式をより単純な微分方程式へと帰着させる方法が知られており、ここでは重心座標と相対座標を用いた書き換えを行うことを考える^{*2}。小物体 A, B の重心座標を X 、相対座標 (A に対する B の相対座標) を R とすると、それぞれ、

$$\begin{cases} X = \frac{mx_A + mx_B}{m + m} = \frac{x_A + x_B}{2}, \\ R = x_B - x_A \end{cases}$$

と定義される。すると、重心加速度 $\ddot{X} = \frac{d^2X}{dt^2}$ 、および相対加速度 $\ddot{R} = \frac{d^2R}{dt^2}$ はそれぞれ、

$$\begin{cases} \ddot{X} = \frac{\ddot{x}_A + \ddot{x}_B}{2}, \\ \ddot{R} = \ddot{x}_B - \ddot{x}_A \end{cases}$$

となる。

問3：運動方程式の変数を X, R で書き直したとき、

$$\begin{cases} \ddot{X} = g, \\ \ddot{R} = -\frac{2k}{m}(R - \ell) \end{cases}$$

となることを示せ。

したがって、重心座標 X は加速度の大きさ g の等加速度運動を行い、相対座標 R は角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ 、振動中心 $R = \ell$ の単振動を行うことがわかる。

では、まずは重心座標 X の運動方程式について考える。

^{*2} 入試物理では、物体 A (または B) とともに動く座標系での物体 B (または A) の運動を考えたり、重心とともに動く座標系での各物体の運動を考える誘導も存在する。

問4：重心座標 X を時刻 t の関数で表すと、

$$X = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{mg}{k} \right) + \frac{1}{2} gt^2$$

となることを示せ.

続いて、相対座標 R の運動方程式について考える.

問5：相対座標 R を時刻 t の関数で表すと、

$$R = \ell + \frac{mg}{k} \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right)$$

となることを示せ.

重心座標 X 、および相対座標 R の結果を用いて、小物体 A、B の位置座標 x_A 、 x_B をそれぞれ時刻 t の関数として表してみよう.

問6：重心座標 X 、および相対座標 R の2式を用いて、 x_A 、 x_B を時刻 t の関数として表せ.

以上の結果を用いて、動画の現象を考察してみよう. 動画を思い出すと、ばねが元の長さに戻るようなごく短い時間、ばねの上端はギョーンと加速し、ばねの下端は静止しているのがあった. そこで、ここでは微小な時間 t の間の小物体 A、B について考えてみよう.

問7：1 よりも小さな $|\theta|$ に対して成り立つ近似式

$$\cos \theta \doteq 1 - \frac{1}{2} \theta^2$$

を用いて、この近似が成り立つような微小な時間 t の間では、小物体 A は加速度 $2g$ の等加速度運動を、小物体 B は位置 $x = \ell + \frac{mg}{k}$ で静止していることを示せ. また、 $m = 2 \times 10^{-2} \text{ kg}$ 、 $k = 0.2 \text{ N/s}$ として、ばねの下端が見かけ上静止している時間 T を見積もってみよ.

問7の計算からわかる通り、近似の精度を $\cos \theta \doteq 1$ まで下げると求めたい解が現れない.

【略解】.....

問1～問6：略 問7：略, $T \doteq 0.3 \text{ s}$

