I. 力学（単振動）

〔A〕(1)　力のつりあいより，

$$0 = -k(x-\ell) + mg\sin(30^\circ)\,, \qquad \therefore x = r\ell + \frac{1}{2}\frac{mg}{k}\,.$$

(2)　公式より，

$$F = k\left(d + \ell + \frac{1}{2}\frac{mg}{k} - \ell\right) = kd + \frac{1}{2}mg\,.$$

(3)　運動方程式は，

$$ma = -k(x-\ell) + \frac{1}{2}mg\,.$$

(4)　運動方程式から角振動数は $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ であり，公式より，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

〔B〕(1)　垂直抗力の大きさは $N = mg$ であり，滑りは x 軸負方向に生じているので，摩擦は滑りを妨げる向き，すなわち x 軸正方向 に生じる．大きさは公式より，

$$R = \mu N = \mu mg\,.$$

(2)　運動方程式は，

$$ma = -k(x-\ell) + \mu mg\,.$$

(3)　運動方程式は，

$$ma = -k(x-\ell) - \mu mg\,.$$

(4)　運動方程式より，

$$ma = -k(x-\ell) + \mu mg$$
$$\therefore a = -\frac{k}{m}\left\{x - \left(\ell + \frac{\mu mg}{k}\right)\right\}\,.$$

よって，振動中心は $x_{\mathrm{c}} = \ell + \dfrac{\mu mg}{k}$ ① ，周期は $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ ③ であり，振幅 A は始状態と振動中心の差を計算して，

$$A = d + \ell - \left(\ell + \frac{\mu mg}{k}\right) = d - \frac{\mu mg}{k}\ \text{②}\,.$$

また，初めて速さが 0 となる位置は振動中心から振幅だけ変位した位置であり，

$$x = \left(\ell + \frac{\mu mg}{k}\right) - \left(d - \frac{\mu mg}{k}\right) = \underbrace{\ell + \frac{2\mu mg}{k} - d}_{④} .$$

そして，x 軸正方向に滑り出してから振動中心は運動方程式より，

$$ma = -k(x-\ell) - \mu mg = -k\left\{x - \left(\ell - \frac{\mu mg}{k}\right)\right\}, \qquad \therefore x = \underbrace{\ell - \frac{\mu mg}{k}}_{⑤} .$$

(5) 前問④より，

$$x = \ell + \frac{2\mu mg}{k} - \frac{10}{3}\frac{\mu mg}{k} = \ell - \frac{4}{3}\frac{\mu mg}{k} .$$

このとき，静止していると仮定すると静止摩擦力の大きさは，

$$R = k\left\{\ell - \left(\ell - \frac{4}{3}\frac{\mu mg}{k}\right)\right\} = \frac{4}{3}\frac{\mu mg}{k} > \mu mg\,(= \mu N)$$

より，最大摩擦を超えていることから 滑りだす ことがわかる．

(6) 始状態の位置 x_0，1 回目の折り返しの位置 x_1 はそれぞれ，

$$\begin{cases} x_0 = \ell + d\,, \\ x_1 = \ell - \dfrac{4}{3}\dfrac{\mu mg}{k} = \ell - \dfrac{2}{5}d. \end{cases}$$

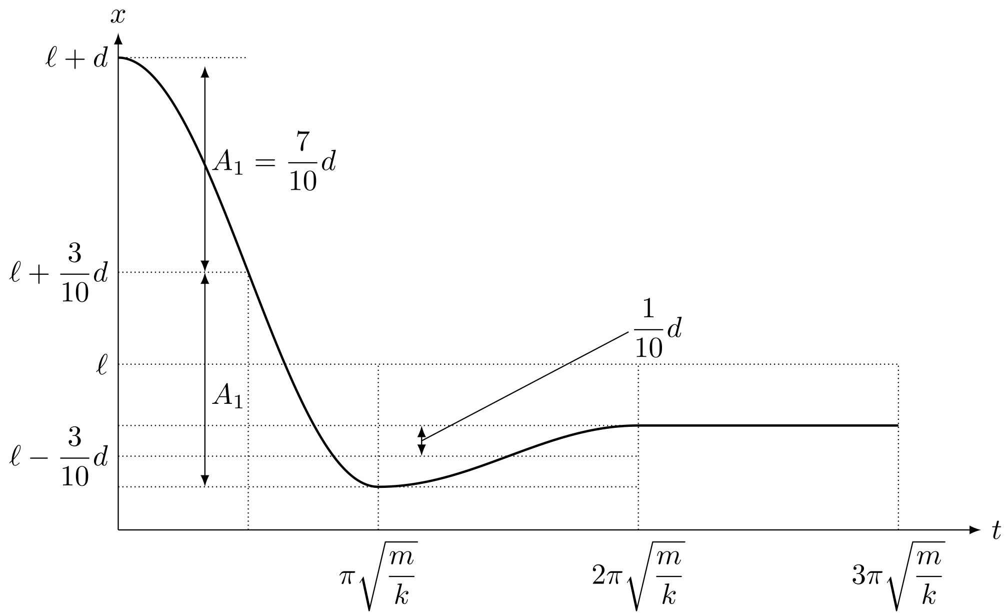
したがって，摩擦のした仕事を計算して，

$$-\Delta E = -\mu mg(x_1 - x_0) = \mu mg\frac{7}{5}d = \frac{21}{50}kd^2 .$$

(7) 折り返した後の運動方程式より振動中心は $x_{\mathrm{c}} = \ell - \dfrac{\mu mg}{k}$ であり，$x_1 = \ell - \dfrac{4}{3}\dfrac{\mu mg}{k}$ であることから折り返し後の単振動の振幅は $\dfrac{1}{3}\dfrac{\mu mg}{k}\left(= \dfrac{1}{10}d\right)$ である．したがって，2 回目の折り返し位置は $x_2 = \ell - \dfrac{2}{3}\dfrac{\mu mg}{k}$ であり，このときの静止摩擦力の大きさは，

$$R = k\left\{\ell - \left(\ell - \frac{4}{3}\frac{\mu mg}{k}\right)\right\} = \frac{1}{3}\frac{\mu mg}{k} < \mu mg$$

となり滑り出さないことがわかる．したがって，1 回目の折り返しまでの単振動の振動中心が $x = \ell + \dfrac{3}{10}d$，振幅が $A_1 = \dfrac{7}{10}d$，1 回目の折り返し後の単振動の振動中心が $x = \ell - \dfrac{3}{10}d$，振幅が $A_2 = \dfrac{1}{10}d$ であり，これを図示すれば以下のようになる．



x
$\ell + d$
$A_1 = \frac{7}{10}d$
$\ell + \frac{3}{10}d$
$\frac{1}{10}d$
ℓ
A_1
$\ell - \frac{3}{10}d$
t
$\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
$2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
$3\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

II. 電磁気（$\boldsymbol{vB\ell}$ 公式の電磁誘導）

〔A〕(1)　定義より，

$$\varPhi = \begin{cases} \underbrace{B_0vbt}_{\text{ア}} & (0 \leq t \leq a/v)\,, \\ \underbrace{B_0ab}_{\text{イ}} & (a/v \leq t \leq 2a/v)\,, \\ \underbrace{B_0b(3a-vt)}_{\text{ウ}} & (2a/v \leq t \leq 3a/v)\,. \end{cases}$$

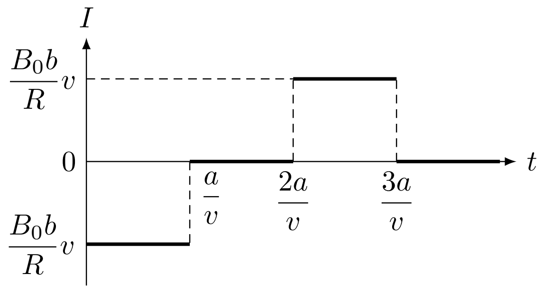
また，生じる誘導起電力はファラデイ則より $\mathcal{E} = -\dfrac{d\varPhi}{dt}$ 電流の最大値は，

$$\max\{I\} = \frac{\max\{|\mathcal{E}|\}}{R} = \underbrace{\frac{B_0b}{R}}v\,.$$

(2)　キルヒホッフ則より，

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\varPhi}{dt} = \begin{cases} -\dfrac{B_0b}{R}v & (0 \leq t \leq a/v)\,, \\ \dfrac{B_0b}{R}v & (2a/v \leq t \leq 3a/v)\,, \\ 0 & (\text{other})\,. \end{cases}$$

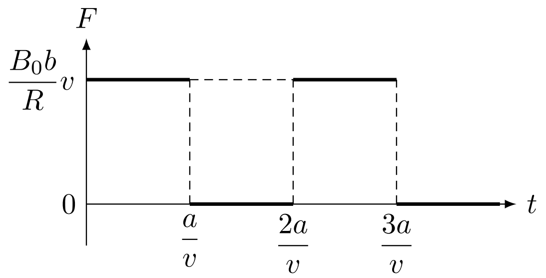
これを図示すれば以下のようになる．



(3)　公式より，

$$F = IBb = \begin{cases} \dfrac{(B_0b)^2}{R}v & (0 \leq t \leq a/v\,,\ 2a/v \leq t \leq 3a/v)\,, \\ 0 & (\text{other})\,. \end{cases}$$

これを図示すれば以下のようになる．



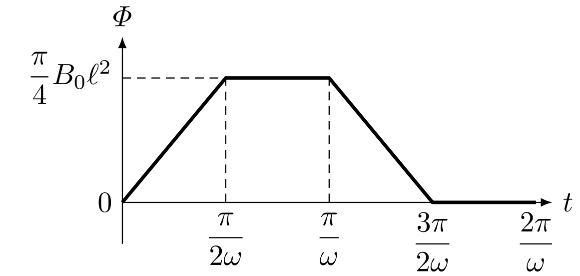
(4) 公式より，

$$J = RI^2 \cdot \frac{2a}{v} = \frac{2aB_0{}^2b^2}{R}v\,.$$

(5) 定義より，

$$\varPhi = \begin{cases} \dfrac{B_0\ell^2}{2}\omega t & (0 \le t \le a/v)\,, \\ \dfrac{\pi B_0\ell^2}{4} & (a/v \le t \le 2a/v)\,, \\ \dfrac{B_0\ell^2}{2}\left(\dfrac{3}{2}\pi - \omega t\right) & (2a/v \le t \le 3a/v)\,. \end{cases}$$

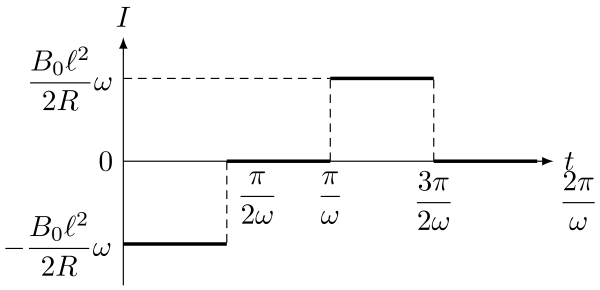
これを図示すれば以下のようになる．



(6) ファラデイ則，およびキルヒホッフ則より，

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\varPhi}{dt} = \begin{cases} -\dfrac{B_0\ell^2}{2R}\omega & \left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2\omega}\right)\,, \\ \dfrac{B_0\ell^2}{2R}\omega & \left(\dfrac{\pi}{\omega} \le t \le \dfrac{3\pi}{2\omega}\right)\,, \\ 0 & (\text{other})\,. \end{cases}$$

これを図示すれば以下のようになる．



(7) 公式より，

$$J = RI^2 \cdot \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi B_0{}^2\ell^4}{4R}\omega\,.$$

(8) 力のモーメントのつりあいより，

$$0 = F\ell - \frac{\ell}{2}\frac{B_0\ell^2\omega}{2R}B_0\ell\,, \qquad \therefore F = \frac{\pi B_0{}^2\ell^3}{4R}\omega\,.$$

(9)　仕事の定義より，

$$W = F \cdot \frac{\pi}{2}\ell = \frac{\pi {B_0}^2 \ell^4}{8R}\omega\,.$$

III. 熱力学（分子運動論）

〔A〕

① はね返り係数 1 より，

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} .$$

②, ③ 衝突 1 回あたり壁，および分子の受ける力積の大きさ i_1 は，

$$i_1 = 2mv_x \, .$$

④ 壁 S との衝突時間間隔は，

$$T = \frac{2L}{v_x} \, .$$

⑤ ④より時間 $\varDelta t$ の間の衝突回数 n は，

$$n = \frac{\varDelta t}{T} = \frac{v_x}{2L}\varDelta t$$

であり，この間に壁が分子から受けた力積の大きさは，

$$i = ni_1 = \frac{v_x}{2L}\varDelta t \times 2mv_x = \frac{m{v_x}^2}{L}\varDelta t \, .$$

よって，壁が分子 1 個から受ける平均の力は，

$$\overline{f} = \frac{i}{\varDelta t} = \frac{m{v_x}^2}{L} \, .$$

⑥ ⑤の平均の力を各分子について和を取れば，

$$\overline{F} = \sum_{k=1}^{N} \overline{f}_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{m({v_x}^2)_k}{L} = \frac{Nm\overline{{v_x}^2}}{L} \, .$$

⑦ ⑥より，気体の圧力は，

$$p = \frac{\overline{F}}{L^2} = \frac{Nm\overline{{v_x}^2}}{L^3} \, .$$

⑧ ⑦に $V = L^3$，$\overline{v^2} = 3\overline{{v_x}^2}$ を代入して，

$$p = \frac{Nm\overline{v^2}}{3V} \, .$$

⑨　状態方程式を書き換えて，

$$pV = \frac{N}{N_\mathrm{A}}RT = \underset{\sim\sim\sim}{NkT}\,.$$

⑩　⑧，⑨より，

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{3}{2}}kT\,.$$

〔B〕

⑪, ⑫　はね返り係数 1 より，

$$v_x'' + u = -1 \cdot (v_x + u)\,, \qquad \therefore 1 = -\frac{v_x'' + u}{\underset{\sim\sim\sim}{v_x + u}}\,.$$

⑬　⑪，⑫より，

$$v_x''^2 = (v_x + 2u)^2 = {v_x}^2 + \underset{\sim\sim\sim}{4v_x u} + 4u^2\,.$$

⑭, ⑮　x 成分のみの衝突ゆえ，

$$v_y''^2 = \underset{\sim\sim}{{v_y}^2}\,, \quad v_z''^2 = \underset{\sim\sim}{{v_z}^2}\,.$$

⑯　⑬〜⑮より，分子 1 個の運動エネルギーの増加量は，

$$\varDelta K_1 = \frac{1}{2}m\left(v_y''^2 + v_y''^2 + v_z''^2\right) - \frac{1}{2}m\left({v_y}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2\right) = \underset{\sim\sim\sim}{2muv_x}\,.$$

⑰　衝突時間間隔は⑤で示した通り，

$$n = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{v_x}{2L}}\varDelta t\,.$$

⑱　⑰，および $\varDelta x = u\varDelta t$ より，$\varDelta t$ 間の運動エネルギーの増加量は，

$$\varDelta K_1 \varDelta t = 2muv_x\frac{v_x}{2L}\varDelta t = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{m{v_x}^2}{L}}\varDelta x\,.$$

⑲　⑱を各分子について和を取れば，

$$\varDelta K_\mathrm{tot} = \sum_{k=1}^{N}\frac{m({v_x}^2)_k}{L}\varDelta x = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{Nm\overline{{v_x}^2}}{L}}\varDelta x\,.$$

⑳　⑦，⑲より，

$$\varDelta K_\mathrm{tot} = pL^2\varDelta x = \underset{\sim\sim\sim}{p\varDelta V}\,.$$

この結果から，外部された仕事の分だけ気体分子の運動エネルギー，すなわち系の内部エネルギーが増加することがわかる*1．なお，分子運動論のモデルで論じることができるのは，今回のように熱の関与しないような状況に限った話である．

*1 理想気体の場合相互作用がないため，運動エネルギーの総和は内部エネルギーと等しい．