I. 力学（動く座標系，非等速円運動）

(1)　張力の大きさを T とする．電車固定系における物体のつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = T\sin\theta_1 - ma\,, \\ 0 = T\cos\theta_1 - mg\,, \end{cases} \qquad \therefore \tan\theta_1 = \frac{a}{g}\,.$$

(2)　見かけの重力加速度の大きさは $g' = \sqrt{g^2 + a^2}$ ゆえ[*1]，公式より，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{g^2+a^2}}}\,.$$

(3)　電車固定系における運動方程式の接線成分より，

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\theta + ma\cos\theta = -mg'\sin(\theta - \theta_1)\,.$$

この式の両辺に $v = \ell\dfrac{d\theta}{dt}$ を乗じることで，

$$\begin{aligned} mv\frac{dv}{dt} + mg\ell\frac{d\theta}{dt}\sin(\theta-\theta_1) &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}mv^2 - mg'\ell\cos(\theta-\theta_1)\right\} &= 0 \\ \therefore \frac{1}{2}mv^2 - mg'\ell\cos(\theta-\theta_1) &= \text{const}\,. \end{aligned}$$

さて，始状態において $v=0$，$\theta=0$，終状態において $v=0$ より，

$$0 - mg'\ell\cos(\theta_2-\theta_1) = 0 - mg'\ell\cos(0-\theta_1) = -mg'\cos\theta_1\,, \qquad \therefore \theta_2 = 2\theta_1\,.$$

(4)　$\tan\theta_1 = \dfrac{a}{g}$ より，$0 < \theta_1 < \dfrac{\pi}{2}$ である．したがって，$0 < \theta_2 < \pi$ であり，$\theta = \pi$ まで到達しない．

(5)　電車固定系における運動方程式（接線）は，

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\theta$$

であり，（電車固定系における）力学的エネルギー保存則は，

$$\frac{1}{2}mv^2 - mg\ell\cos\theta = \text{const}\,.$$

以上から，$0 \leq \theta_2 \leq \dfrac{\pi}{2}$ では，運動方程式から $\theta = 0$ が安定なつりあいとわかり，系の力学的エネルギーが保存することから $\theta = 0$ を振動の中心とし $\theta = \pm\theta_2$ の間を往復する周期運動を行うことがわかる．また，$\dfrac{\pi}{2} < \theta_2 < \pi$ では，糸が弛み再びピンと張りを繰り返し，十分時間が経過した後 $|\theta| < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で周期運動を行う．

[*1] 見かけの重力の詳しい説明は次の設問の解答に．

(6) 一定速度になる以前の電車固定系における力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m{v_1}^2 - mg'\ell\cos(\theta_3-\theta_1) = -mg'\ell\cos\theta_1$$
$$\therefore v_1 = \sqrt{2g'\ell\{\cos(\theta_3-\theta_1)-\cos\theta_1\}}$$
$$= \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{2g\ell}{\cos\theta_1}\{\cos(\theta_3-\theta_1)-\cos\theta_1\}}}\,.$$

(7) 力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 - mg\ell\cos\theta = \frac{1}{2}m{v_1}^2 - mg\ell\cos\theta_3 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{mg\ell\left\{\frac{\cos(\theta_3-\theta_1)}{\cos\theta_1}-\cos\theta_3-1\right\}}\,.$$

(8) $\theta=\pi$ での電車固定系における運動方程式（中心），および力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{\ell} = T + mg\,, \\ \dfrac{1}{2}mv^2 + mg\ell = mg\ell\left\{\dfrac{\cos(\theta_3-\theta_1)}{\cos\theta_1}-\cos\theta_3-1\right\}\,, \end{cases}$$
$$\therefore T = mg\left\{\frac{2\cos(\theta_3-\theta_1)}{\cos\theta_1}-2\cos\theta_3-5\right\}\,.$$

よって，糸が弛まない条件 $T>0$ を考えて[*2]，

$$mg\left\{\frac{2\cos(\theta_3-\theta_1)}{\cos\theta_1}-2\cos\theta_3-5\right\}>0$$
$$2\sin\theta_1\sin\theta_3 - 5\cos\theta_1 > 0\,, \qquad \therefore \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\tan\theta_1\sin\theta_3 > \frac{5}{2}}\,.$$

(9) $\tan\theta_1 = \dfrac{a}{g}$ より，

$$a > \frac{5g}{2\sin\theta_3}\,.$$

このとき，a の取り得る範囲は $\theta_3 = \dfrac{\pi}{2}$ のときに下限を取り，

$$\underset{\sim\sim\sim\sim}{a > \frac{5}{2}g}\,.$$

[*2] 運動エネルギーが正の条件もあるが，これは $T>0$ に含まれる．

II. 電磁気（静電場，静磁場，ファラデイ則の電磁誘導）

〔A〕(1)　2つの点電荷から生じる電場の各成分が互いに異符号となり得るのは x 軸上のみである．よって，x 軸上 にある．

(2)　電場の生じる向きから $\ell < x < \ell$ の範囲にのみ存在する．よって，

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(\ell-x)^2}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q}{(\ell+x)^2}=0\,,\qquad \therefore x=(2-\sqrt{3})\ell\,,\quad \therefore \underline{((2-\sqrt{3})\ell,0,0)}\,.$$

(3)　P における電場の x 成分 E_x，および y 成分 E_y はそれぞれ[*3]，

$$E_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\ell^2+p^2}\frac{-\ell}{\sqrt{\ell^2+p^2}}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q}{\ell^2+p^2}\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2+p^2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{\ell^2+p^2}\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2+p^2}}\,,$$

$$E_y=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\ell^2+p^2}\frac{p}{\sqrt{\ell^2+p^2}}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q}{\ell^2+p^2}\frac{p}{\sqrt{\ell^2+p^2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Q}{\ell^2+p^2}\frac{p}{\sqrt{\ell^2+p^2}}\,.$$

よって，題意より，

$$\frac{E_y}{E_x}=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2p}{\ell}\,,\qquad \therefore p=\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}\ell\,.$$

(4)　P の電位 ϕ_{P} は，公式より $p=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ell$ を用いて，

$$\phi_{\mathrm{P}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{\ell^2+(\sqrt{3}\,\ell/2)^2}}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q}{\sqrt{\ell^2+(\sqrt{3}\,\ell/2)^2}}=\underline{\frac{2Q}{\sqrt{7}\,\pi\varepsilon_0\ell}}\,.$$

また，電気力線と等電位線が直交することから等電位線の P における傾き m は[*4]，

$$m=-\frac{1}{\tan(\pi/3)}=-\underline{\frac{1}{\sqrt{3}}}\,.$$

〔B〕(1)　公式より，

$$H=\underline{\frac{I_0}{2\pi r}}\quad \underline{(y\text{ 軸正方向})}\,.$$

(2)　コイルのつりあいより，

$$0=F+\frac{\mu_0I_0I\ell}{2\pi a}-\frac{\mu_0I_0I\ell}{2\pi(a+\ell)}\,,\qquad \therefore F=-\frac{\mu_0I_0I\ell^2}{2\pi a(a+\ell)}\,.$$

よって，大きさ $\underline{\dfrac{\mu_0I_0I\ell^2}{2\pi a(a+\ell)}}$ の力を y 軸負方向 に加えればよい．

[*3] 位置 $\vec{r}_0=(a,b,c)^{\mathrm{T}}$ にある点電荷 Q が位置 $\vec{r}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$ に作る電場 $\vec{E}$ を堅苦しく書けば，

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\\z-c\end{pmatrix}$$

となる．これは，いつも公式で大きさを求め矢印を成分分解していることをいきなり座標表示しているに過ぎない．

[*4] 微分して求めてもよいが，高校範囲外かも？【補足 1】に示した．

(3)　辺 AD，BC の運動に伴う磁束の変化を考えればよいので[*5]

$$\Delta\Phi = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi(a+\ell)}\ell u\Delta t - \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a}\ell u\Delta t = \frac{\mu_0 I_0 u\ell^2}{2\pi a(a+\ell)}\Delta t\,.$$

(4)　(3) より，この瞬間に生じる誘導起電力は，

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\mu_0 I_0 u\ell^2}{2\pi a(a+\ell)}\,.$$

よって，D → C → B → A の向きに大きさ $\dfrac{\mu_0 I_0 u\ell^2}{2\pi a(a+\ell)}$ の起電力が生じる．

(5)　公式より，

$$F = \frac{\mu_0 q u I_0}{2\pi a} \quad (z\ \text{軸負方向})\,.$$

(6)　動く座標系内部の電場の強さを E_1 とすると，(5) より，

$$qE_1 = \frac{\mu_0 q u I_0}{2\pi a}\,, \qquad \therefore\ \phi_{\mathrm{DA_2}} = E_1\ell = \frac{\mu_0 I_0 u\ell}{2\pi a}\,.$$

(7)　同様にして，C に対する B の電位は $\phi_{\mathrm{BC}} = -\dfrac{\mu_0 I_0 u\ell}{2\pi(a+\ell)}$ となるので，

$$\phi_{\mathrm{A_1A_2}} = \phi_{\mathrm{BC}} + \phi_{\mathrm{DA_1}} = \frac{\mu_0 I_0 u\ell^2}{2\pi a(a+\ell)}\,.$$

*5 丁寧なやり方は【補足２】を参照.

【補足１】〔**A**〕**(4)** の接線の傾きをゴリ押しで計算してみる

等電位線の方程式は以下のようになる．

$$\frac{\ell}{\sqrt{(x-\ell)^2+y^2}}+\frac{3\ell}{\sqrt{(x+\ell)^2+y^2}}=\frac{8}{\sqrt{7}}\,.$$

ここで，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\ell)^2+y^2}}\right)=-\frac{x-\ell}{\{(x-\ell)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}}-\frac{y}{\{(x-\ell)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}}\frac{dy}{dx}$$

より，等電位線の方程式の両辺を x で微分すれば，

$$\frac{x-\ell}{\{(x-\ell)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}}+\frac{y}{\{(x-\ell)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}}\frac{dy}{dx}+\frac{3(x+\ell)}{\{(x+\ell)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}}+\frac{3y}{\{(x+\ell)^2+y^2\}^{\frac{3}{2}}}\frac{dy}{dx}=0$$

を得る．$x=0$，$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ell$ における接線の傾きを求めればよいので，

$$\frac{0-\ell}{(\sqrt{7}\,\ell/2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\sqrt{3}\,\ell/2}{(\sqrt{7}\,\ell/2)^{\frac{3}{2}}}\frac{dy}{dx}+\frac{3\ell}{(\sqrt{7}\,\ell/2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3\sqrt{3}\,\ell/2}{(\sqrt{7}\,\ell/2)^{\frac{3}{2}}}\frac{dy}{dx}=0\,,\qquad \therefore\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

【補足２】**(3)** の磁束 $\boldsymbol{\Phi}$ を計算する

A の位置を x とすると，磁束の定義より，

$$\Phi(x)=\int_x^{x+\ell}\frac{\mu_0 I_0}{2\pi x'}\,dx'=\frac{\mu_0 I_0\ell}{2\pi}\log\left(1+\frac{\ell}{x}\right).$$

ここで，$x=ut+a$ より，

$$\Phi(t)=\frac{\mu_0 I_0\ell}{2\pi}\log\left(1+\frac{\ell}{ut+a}\right).$$

$\Phi(t)$ を t で微分すれば，

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{\mu_0 I_0\ell}{2\pi}\log\left(\frac{u}{ut+a+\ell}-\frac{u}{ut+a}\right)=\frac{\mu_0 I_0 u\ell^2}{2\pi(ut+a)(ut+a+\ell)}$$

となり，ここに $t=0$ を代入すれば問題の解答を得る．

なお，Δt で計算する場合は以下のように計算すればよい．

$$\begin{aligned}\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)&=\Delta\left(\frac{\mu_0 I_0\ell}{2\pi}\{\log(ut+a+\ell)-\log(ut+a)\}\right)\\&=\frac{\mu_0 I_0\ell}{2\pi}\left\{\log\left(\frac{u(t+\Delta t)+a+\ell}{ut+a+\ell}\right)-\log\left(\frac{u(t+\Delta t)+a}{ut+a}\right)\right\}\\&=\frac{\mu_0 I_0\ell}{2\pi}\left\{\log\left(1+\frac{u\Delta t}{ut+a+\ell}\right)-\log\left(1+\frac{u\Delta t}{ut+a}\right)\right\}\\&\fallingdotseq\frac{\mu_0 I_0\ell}{2\pi}\left(\frac{u\Delta t}{ut+a+\ell}-\frac{u\Delta t}{ut+a}\right)\\&=\frac{\mu_0 I_0 u\ell^2}{2\pi(ut+a)(ut+a+\ell)}\Delta t\,.\end{aligned}$$

III. 熱力学（熱あり過程）

〔A〕ア：三相，三態　　イ：飽和水蒸気圧　　ウ：$1.8n \times 10^{-4}\,\mathrm{kg}$　　エ：沸点　　オ：蒸発熱

カ：$nC_{\mathrm{w}}(T_{\mathrm{f}} - T_{\mathrm{i}}) + nL$　　キ：$nC_{\mathrm{w}}(T_{\mathrm{f}} - T_{\mathrm{i}}) + nL + P_0 S \ell_{\mathrm{f}}$　　ク：仕事　　ケ[*6]：R

〔B〕(1)　状態 1，および状態 2 における気体の圧力 P_1，P_2 は，それぞれピストンのつりあいより，$P_1 = P_0$，$P_2 = P_0 + \dfrac{Mg}{S}$ である．よって，状態方程式より，

$$\begin{cases} P_0 S \ell_1 = nRT_1\,, \\ (P_0 S + Mg)\ell_1 = nRT_2 \end{cases} \qquad \therefore T_2 = T_1 + \frac{Mg\ell_1}{nR}\,, \quad P_0 = \frac{nRT_1}{S\ell_1}\,.$$

(2)　吸熱量 Q_1 は熱力学第 1 法則より，

$$Q_1 = W_{1\to 2} + \varDelta U_{1\to 2} = 0 + nC_V \varDelta T = n(C_P - R)(T_2 - T_1) = Mg\ell_1\left(\frac{C_P}{R} - 1\right).$$

(3)　状態 3 における気体の圧力 P_3 は，ピストンのつりあいより $P_3 = P_0 + \dfrac{Mg}{S}$ である．よって，状態方程式より，

$$(P_0 S + Mg)\cdot 2\ell_1 = nRT_3\,, \qquad \therefore T_3 = 2T_2 = 2\left(T_1 + \frac{Mg\ell_1}{nR}\right).$$

(4)　$P - V$ 図の面積評価をして（下にある図を参照），

$$W_1 = \left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)\varDelta V = (P_0 S + Mg)\ell_1 = nRT_1 + Mg\ell_1\,.$$

(5)　状態 4 における気体の圧力，体積，温度はそれぞれ $(P_0, 2S\ell_1, 2T_1)$ である[*7]．よって，放熱量 Q_2 は熱力学第 1 法則より，

$$Q_2 = -(W_{4\to 1} + \varDelta U_{4\to 1}) = -\{-\underbrace{P_0 S \ell_1}_{=nRT_1} + n(C_P - R)(T_1 - 2T_1)\} = nC_P T_1\,.$$

(6)　状態 1 から状態 2，状態 3 から状態 4 は体積一定，状態 2 から状態 3，状態 4 から状態 1 は圧力一定であることに注意すれば以下のようになる．

---

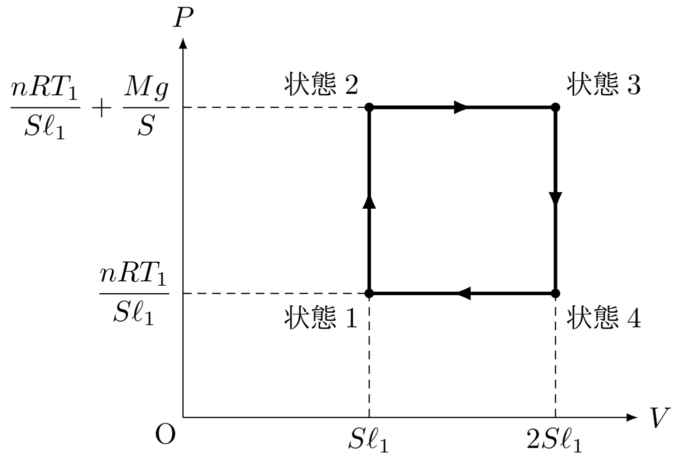
*6 水蒸気を理想気体として扱うという問題文での仮定から，マイヤーの関係式よりでいいだろう．各熱容量を計算するのであれば以下のようになる．

$$C_V = \frac{1}{n}\frac{nC_{\mathrm{w}}(T_{\mathrm{f}} - T_{\mathrm{i}}) + nL}{T_{\mathrm{f}} - T_{\mathrm{i}}}\,,$$

$$C_P = \underbrace{\frac{1}{n}\frac{P_0 S \ell_{\mathrm{f}}}{T_{\mathrm{f}} - 0}}_{\text{水蒸気}} + \underbrace{\frac{1}{n}\frac{nC_{\mathrm{w}}(T_{\mathrm{f}} - T_{\mathrm{i}}) + nL}{T_{\mathrm{f}} - T_{\mathrm{i}}}}_{\text{水}}\,.$$

ここで，状態方程式より $P_0 S \ell_{\mathrm{f}} = nRT_{\mathrm{f}}$ であることを用いればマイヤーの関係式を再現する．

*7 圧力，体積が確定しているので，状態方程式から温度がわかる．



(7)　$P-V$ 図より，

$$W_{\mathrm{cyc}}=\frac{Mg}{S}S\ell_1=Mg\ell_1\,.$$

(8)　$Q_{2\to3}$ は，熱力学第 1 法則より，

$$Q_{2\to3}=W_{2\to3}+\mathit{\Delta}U_{2\to3}=\underbrace{(P_0S+mg)\ell_1}_{=nRT_2}+n(C_P-R)(\underbrace{T_3-T_2}_{=T_2})=nC_PT_2\,.$$

以上より，熱効率の定義より，

$$\begin{aligned}\eta&=\frac{W_{\mathrm{cyc}}}{Q_{1\to2}+Q_{2\to3}}\\&=\frac{Mg\ell_1}{Mg\ell_1\,(C_P/R-1)+nC_P(T_1+Mg\ell_1/nR)}\\&=\frac{Mg\ell_1}{\left(\dfrac{2C_P}{R}-1\right)Mg\ell_1+nC_PT_1}\,.\end{aligned}$$