I. 力学（剛体のつりあい）

(1) 以降，静止摩擦力の大きさを R，垂直抗力の大きさを N とする．力のつりあいより，

$$R = F\,, \quad N = mg\,.$$

物体が角度 θ だけ回転している状態における，物体の回転軸周りの力のモーメント M は[*1]，正方形の対角線の長さを $2r$ とすれば，

$$M = \sqrt{2}\,rF\cos\theta + \sqrt{2}\,rF\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}rmg\sin\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}rmg\cos\theta$$

であり，図のように反時計回りで回る場合，$M \geq 0$ である（等号成立時はつりあいを保ちながらの回転）．よって，F は

$$\sqrt{2}\,rF(\cos\theta + \sin\theta) + \frac{1}{\sqrt{2}}rmg(\sin\theta - \cos\theta) \geq 0\,, \qquad \therefore F \geq \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\frac{mg}{2}$$

を満たし，その最小値は[*2]

$$\min\{F\} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}mg}\,.$$

(2) 前問より，

$$F = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\frac{mg}{2}}\,.$$

(3) 回転軸を原点とし，正方形の中心の位置ベクトルを $\vec{r}$ とすると，力の作用点の位置は $2\vec{r}$ であり，

$$2\vec{r} = \begin{pmatrix} 2r\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) \\ 2r\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$$

となる．また，微小変化の下では，

$$2\varDelta\vec{r} = 2r\varDelta\theta \begin{pmatrix} -\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) \\ \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$$

と表される．ここで，$\vec{F} = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix}$ より，微小変位の下での微小な仕事 $\varDelta W$ は[*3]，

$$\varDelta W = \vec{F}\cdot 2\varDelta\vec{r} = 2rF\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\varDelta\theta\,.$$

---

*1 細かく言えば力のモーメントの z 成分．こちらについては【補足２】を参照．

*2 疑わしい人は，微分するなどして計算すればよい．

*3 この微小量での計算は，以下の式ような置換積分に相当する．

$$W = \int_{\vec{r}_{\mathrm{ini}}}^{\vec{r}_{\mathrm{fin}}} \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int_{\theta_{\mathrm{ini}}}^{\theta_{\mathrm{fin}}} \vec{f}\cdot\frac{d\vec{r}}{d\theta}\,d\theta\,.$$

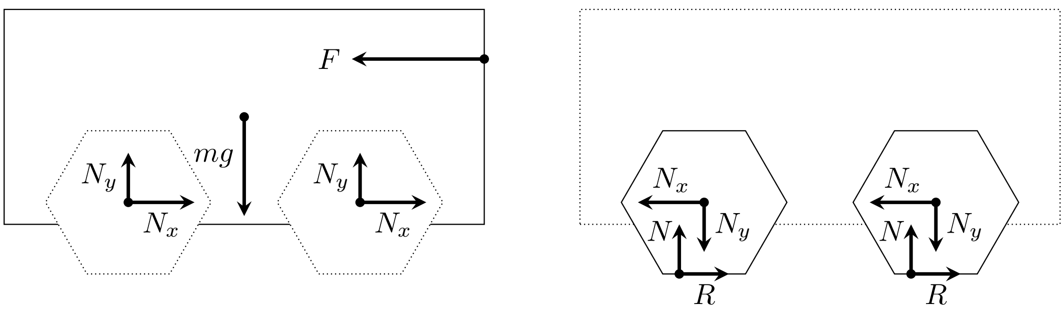
よって，力のモーメントのつりあいを保ちながらの回転における仕事は，

$$\begin{aligned}W &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2r\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\frac{mg}{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} mg\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\,d\theta \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)mgr\end{aligned}$$

であり，これを単位距離当たりに換算すれば，

$$\frac{W}{|\Delta x|} = \frac{(1 - 1/\sqrt{2})mgr}{\sqrt{2}\,r} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{\sqrt{2}-1}{2}mg}\,.$$

(4)　物体，および車輪にはたらく力は以下のようになっている．



すると，力のつりあいより各車輪の中心にはたらく抗力 $\vec{f}$ は，

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -F \\ -mg \end{pmatrix}$$

と求まる[*4][*5]．正 n 角形が回転する際の接地点（回転軸と呼ぶ）を原点とすると，多角形の中心を表す位置ベクトル $\vec{r}$ は，

$$\vec{r} = r\begin{pmatrix} -\sin\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right) \\ \cos\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$$

[*4] 車などを想定すると車輪は 4 個付いているが，問題文では個数を言及していないためここでは 2 個とした．

[*5] 車輪の大きさと形が等しいものとし，車輪が同時に回転し始めることから車輪の回転軸周りの力のモーメントは等しく，そこから，各車輪の中心にはたらく抗力の各成分も等しいと結論付けた．式で示すと以下のようになる（左側の抗力には添え字の L を，右側には R を付し，抗力の垂直成分には N を，水平成分には R を用いた)．

$$(\vec{M})_z = \left\{ r\begin{pmatrix} -\sin\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right) \\ \cos\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -N_{\mathrm{L}} \\ -R_{\mathrm{L}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_z = \left\{ r\begin{pmatrix} -\sin\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right) \\ \cos\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -N_{\mathrm{R}} \\ -R_{\mathrm{R}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_z ,$$

$$\therefore N_{\mathrm{L}} = N_{\mathrm{R}}\,,\quad R_{\mathrm{L}} = R_{\mathrm{R}}\,.$$

となり，物体の回転軸まわりの力のモーメントは，

$$M = rF\cos\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right) + rmg\sin\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right).$$

よって，$\theta = 0$ において反時計回りで回転する条件を考えて，

$$rF\cos\left(-\frac{\pi}{n}\right) + rmg\sin\left(-\frac{\pi}{n}\right) \geq 0\,, \qquad \therefore F \geq \underset{\sim\sim\sim}{mg\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}\,(= F_n)\,.$$

(5) 中心の微小変位 Δr は，

$$\Delta\vec{r} = r\Delta\theta\begin{pmatrix} -\cos\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right) \\ -\sin\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$$

であり，この間の微小仕事は，

$$\Delta W = \vec{f}\cdot\Delta\vec{r} = rF_n\cos\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right)\Delta\theta$$

であり，$\dfrac{1}{n}$ 回転する間にする仕事は[*6]，

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\frac{\pi}{n}} mg\tan\left(\frac{\pi}{n} - \theta\right)\cos\left(\theta - \frac{\pi}{n}\right)d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{n}} mgr\sin\left(\frac{\pi}{n} - \theta\right)d\theta \\ &= \left\{1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}mgr\,. \end{aligned}$$

よって，単位距離当たりに換算して，

$$\frac{W}{|\Delta x|} = \frac{\{1 - \cos(\pi/n)\}mgr}{2r\sin(\pi/n)} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1 - \cos(\pi/n)}{\sin(\pi/n)}\frac{mg}{2}}\,.$$

(6) 前問の結果に $n \to \infty$ の極限を取って，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W}{|\Delta x|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1 - \cos(\pi/n)}{\sin(\pi/n)}\frac{mg}{2} = \frac{mg}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\pi/2)}{1 + \cos(\pi/n)} = \underset{\sim}{0}\,.$$

(7) 力のつりあいより，

$$R = \frac{1}{2}F\,, \quad N = \frac{1}{2}mg\,.$$

(4) と同様に，物体の回転軸周りの力のモーメント M のつりあいから，

$$M = rF\cos\left(-\frac{\pi}{n}\right) + rmg\sin\left(-\frac{\pi}{n}\right) = 0\,, \qquad \therefore F = mg\tan\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

以上より，滑らない条件を考えて，

$$R < \mu N = \frac{1}{2}\mu mg\,, \qquad \therefore \mu > \underset{\sim\sim\sim}{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}\,(= \min\{\mu\})\,.$$

[*6] 角度 $\dfrac{2\pi}{n}$ のうち，$\dfrac{\pi}{n}$ まで回転させれば以降は自然と転がる．これは F 符号からもわかる．

(8)　斜面が角度 θ だけ傾いている状態における力のつりあい，および回転軸周りの力のモーメントは[*7]，

$$\begin{cases} 0 = R - \dfrac{1}{2}mg\sin\theta\,, \\ 0 = N - \dfrac{1}{2}mg\cos\theta\,, \\ M = \dfrac{1}{2}mgr\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{n}\right). \end{cases}$$

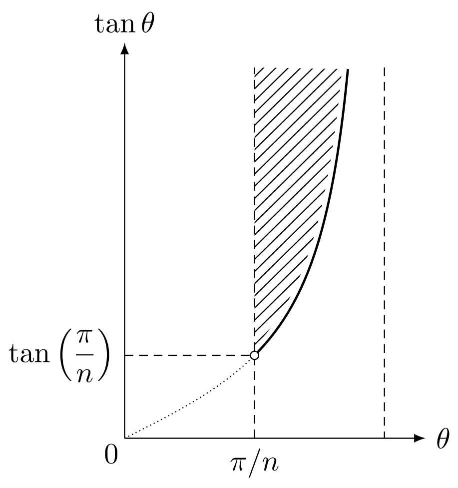
まず，滑らない条件は，

$$R < \mu N\,, \qquad \therefore \tan\theta < \mu\,.$$

続いて，回転するかつ斜面の傾斜による角度の制限を同時に満たす角度 θ の条件は，

$$\begin{cases} M = \dfrac{1}{2}mgr\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{n}\right) > 0\,, \\ 0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}\,, \end{cases} \qquad \therefore \frac{\pi}{n} < \theta < \frac{\pi}{2}\,.$$

以上より，$\dfrac{\pi}{n} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲では回転をはじめ，この範囲で滑らない状況を考えればよい．これはグラフの斜線の領域を指す．



したがって，

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\mu > \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}\,.$$

(9)　以上より，$\tan\theta < \mu$ を満たす角度を $\theta_{\rm c}$ としたとき，$\theta_{\rm c} > \dfrac{\pi}{n}$ の場合を考える．$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{n}$ の範囲では，滑りが生じないかつ回り出さず静止したままである．$\dfrac{\pi}{n} < \theta < \theta_{\rm c}$ のとき，滑らず回り出し運動を始める．$\theta_{\rm c} \leq \theta$ では滑りも生じる．

---

*7 力のモーメントをベクトルの外積から計算する方法は【補足２】を参照．

【補足１】正多角形の辺と角度

ここでは，半径 r の円に内接する正 n 角形の辺の長さと角度について計算する．

まず，正 n 角形の中心を頂点とし正 n 角形の一辺を底辺とした二等辺三角形を考える．この三角形の頂角は 2π を n 等分したうちの 1 つなので，その角度の大きさは $\dfrac{2\pi}{n}$ となる．したがって，二等辺三角形の底角の大きさ ϕ は，三角形の内角の和が π なことから，

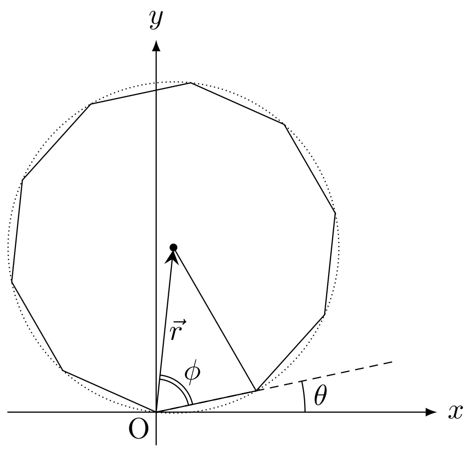
$$\phi = \left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right)\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

と求まり，正 n 角形の各頂点 1 つ当たりの角度は $\pi\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)$ となる．

なお，以下の図のように，正 n 角形の 1 つの頂点原点に定め，辺を x 軸から角度 θ だけ回転した状態にある正 n 角形のの中心座標の位置ベクトル $\vec{r}$ は，

$$\vec{r} = r\begin{pmatrix} -\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{n}\right) \\ \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$$

と表すことができる．



また，上記の二等辺三角形に注目することで正 n 角形の 1 辺の長さ s は，

$$s = 2r\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = 2r\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

と求まる．ここで，正多 n 角形の周の長さは ns で与えられることから，$n \to \infty$ の極限を考えてみると，

$$\lim_{n\to\infty} ns = \lim_{n\to\infty} 2\pi r\frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} = 2\pi r$$

となり，円の円周と一致することも確認できる．

【補足２】力のモーメントを外積を用いて計算[*8]

ある回転軸まわりの力のモーメント $\vec{N}$ は，位置ベクトル $\vec{r}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と力 $\vec{f}=\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$ の外積として，以下のように定義される．

$$\vec{N} \overset{\text{def}}{=} \vec{r}\times\vec{f}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} yf_z-zf_y \\ zf_x-xf_z \\ xf_y-yf_x \end{pmatrix}.$$

斜面の傾斜角を θ，正 n 角形の斜面に対する回転角を Θ とする．正 n 角形の回転軸を原点としたとき，その中心座標は

$$\vec{r}=r\begin{pmatrix} -\sin\left(\Theta+\theta-\dfrac{\pi}{n}\right) \\ \cos\left(\Theta+\theta-\dfrac{\pi}{n}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表される．外力 $\vec{F}$ は，回転軸から中心を通った反対側の頂点に

$$\vec{F}=\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

の外力を加える．すると，回転軸周りの力のモーメントの z 軸成分は，

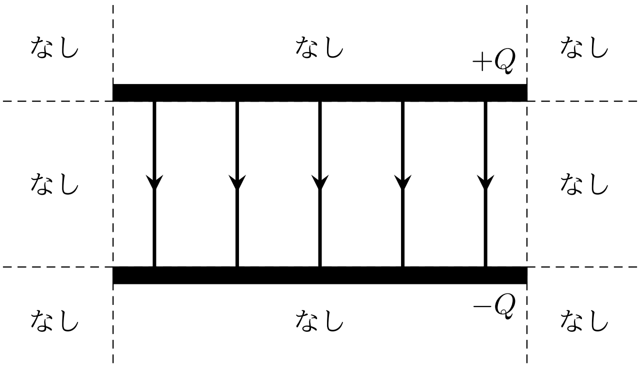
$$\begin{aligned}(\vec{M})_z &= \left\{ r\begin{pmatrix} -\sin\left(\Theta+\theta-\dfrac{\pi}{n}\right) \\ \cos\left(\Theta+\theta-\dfrac{\pi}{n}\right) \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix}\right\}_z \\ &\quad+\left\{ 2r\begin{pmatrix} -\sin\left(\Theta+\theta-\dfrac{\pi}{n}\right) \\ \cos\left(\Theta+\theta-\dfrac{\pi}{n}\right) \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix}\right\}_z \\ &= mgr\sin\left(\Theta+\theta-\frac{\pi}{n}\right)-2F_yr\sin\left(\Theta+\theta-\frac{\pi}{n}\right)-2F_xr\cos\left(\Theta+\theta-\frac{\pi}{n}\right).\end{aligned}$$

ここで，$\Theta=0$，$F_y=0$ とすれば (2)，(4) を，$\Theta=\theta=0$，$F_y=0$ とすれば (7) を，$\Theta=0$，$F_x=F_y=0$ とすれば (8) を再現する．

[*8] 2 次元ベクトルに対してはベクトルの外積が定義されないことに注意．

Ⅱ. 電磁気（電場・磁場の基礎知識，荷電粒子の運動）

〔A〕(1)　電気力線は以下のようになる.



(2)　ガウスの法則より，

$$E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 a^2} \times 2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 a^2}\,.$$

(3)　ガウスの法則より，

$$E' = \frac{Q}{2\varepsilon_0 a^2}\,.$$

(4)　上側の極板表面に帯電する電荷の作る電場と下側の極板表面に帯電する電荷の作電場とで相殺するため.

(5)　公式より，

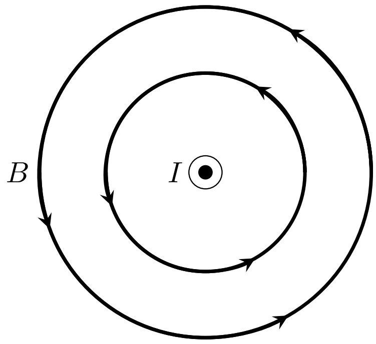
$$\Delta U = \Delta\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 a^2/b}\right) = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 a^2}b\,.$$

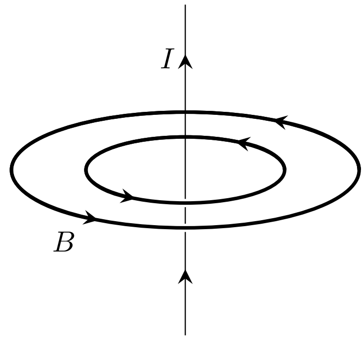
〔B〕(1)　公式より，

$$H = \frac{I}{2\pi r}\,.$$

(2)　磁場の様子は以下のようになる[*9].

[*9] 解答用紙がなくどのような作図かわからないため 2 通り描いておきました.





(3) 引かれ合うことから，I と I' は 同じ向き であり，力の大きさは公式から，

$$f = I'B\ell = \frac{\mu_0 II'\ell}{2\pi r}\,.$$

〔C〕(1) 公式より，

$$f = qvB\,, \quad \frac{\vec{f}}{f} = \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

(2) ローレンツ力と重力，静電気力がつり合えばよく，

$$\begin{cases} 0 = -qV_yB\,, \\ 0 = qV_xB - qE - mg\,, \end{cases} \qquad \therefore \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (qE+mg)/qB \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(3) 運動方程式は，

$$\begin{cases} ma_x = -qv_yB\,, \\ ma_y = qv_xB - qE - mg\,. \end{cases}$$

(4) $v'_x = v_x - V_x$，$v'_y = v_y$ とすると，$a'_x = a_x$，$a'_y = a_y$ に注意して，

$$\begin{cases} ma'_x = -qv'_yB\,, \\ ma'_y = qv'_xB\,. \end{cases}$$

【補足】微分方程式を解いて円運動/サイクロイド運動を示す方法

運動方程式より，

$$\begin{cases} m\dfrac{dv'_x}{dt} = -qv'_yB\,, \\ m\dfrac{dv'_y}{dt} = qv'_xB \end{cases}$$

であり，y' 成分を t で積分すると，

$$m(v'_y - 0) = q(x' - x'_0)B\,, \qquad \therefore v'_y = \frac{qB}{m}(x' - x'_0)\,.$$

これを x' 成分の式に代入すれば，

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 (x' - x'_0)$$

となり，単振動の式を得る．あとは初期条件をもとに時刻 t の関数として求めればよい（求めたい人は各自で，わからなければ僕まで）．

III. 波動（幾何光学，干渉）

(1)　スネル則より[*10]，

$$1\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=n\sin\left(\theta_0-\theta\right)\,,\qquad \therefore n=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{\cos\theta}{\sin\left(\theta_0-\theta\right)}}\,.$$

(2)　屈折角を ϕ としスネル則を立て，屈折角の存在しない条件を考えて，

$$n\sin\theta_0=\sin\phi>1\,,\qquad \therefore \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sin\theta_0>\frac{1}{n}}\,.$$

(3)　前問までの計算より，

$$\sin\theta_0>\frac{\sin\left(\theta_0-\theta\right)}{\cos\theta}\,,\qquad \therefore \cos\theta_0\sin\theta>0\,.$$

ここで，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\theta_0<\dfrac{\pi}{2}$ より，左辺は常に正の量であり θ に依らず全反射することがわかる．

(4)　問題中の図より，

$$2n\sqrt{h^2+\frac{\ell^2}{4}}-\ell=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\ell\left\{n\sqrt{1+\left(\frac{2h}{\ell}\right)^2}-1\right\}}\,.$$

(5)　同様に図より，

$$\begin{aligned}\sqrt{D^2+(a-h)^2}-\sqrt{D^2+(h+a)^2}&=D\left\{\sqrt{1+\left(\frac{a-h}{D}\right)^2}-\sqrt{1+\left(\frac{a+h}{D}\right)^2}\right\}\\&\fallingdotseq D\left[\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{a-h}{D}\right)^2\right\}-\left\{1+\left(\frac{a-h}{D}\right)^2\right\}\right]\\&=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{-\frac{2ah}{D}}\,.\end{aligned}$$

(6)　問題文の条件（光路差がゼロ）より，

$$\ell\left\{n\sqrt{1+\left(\frac{2h}{\ell}\right)^2}-1\right\}-\frac{2ah}{D}=0\,,\qquad \therefore a=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{D\ell}{2h}\left\{n\sqrt{1+\left(\frac{2h}{\ell}\right)^2}-1\right\}}\,.$$

(7)　明線条件は，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left[\ell\left\{n\sqrt{1+\left(\frac{2h}{\ell}\right)^2}-1\right\}-\frac{2y_m h}{D}\right]=2m\pi\,.$$

[*10] $\triangle \mathrm{OP_1P_2}$ の内角に注目．

よって，明線間隔 $|y_{m+1}-y_m|$ は，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(-\frac{2y_{m+1}h}{D}+\frac{2y_m h}{D}\right)=2\pi\,,\qquad \therefore |y_{m+1}-y_m|=\frac{D\lambda}{\underset{\sim\sim}{2h}}\,.$$

(8)　明線条件は，

$$\frac{2\pi}{\lambda/n}d\sin\theta_0-\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta=2m\pi\,.$$

$\theta=0$ を考えて，

$$d=\frac{\lambda}{\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{n\sin\theta_0}}m\,.$$