I. 力学（天体の運動）

〔A〕(1)　公式より，

$$v = \underset{\sim\sim}{r_1\omega}\,.$$

(2)　公式より，

$$a = \underset{\sim\sim}{r_1\omega^2}\,.$$

(3)　運動方程式（中心成分）より，

$$mr_1\omega^2 = F\,, \qquad \therefore T^2 = \frac{4\pi^2}{\omega^2} = \frac{4\pi^2 m r_1}{F}$$

であり，ケプラー第 3 法則より，

$$T^2 = k{r_1}^3\,.$$

以上より，

$$\frac{4\pi^2 m r_1}{F} = k{r_1}^3\,, \qquad \therefore F = \underset{\sim\sim}{\frac{4\pi^2 m}{k{r_1}^2}}\,.$$

〔B〕(1)　運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{{v_0}^2}{r_1} = G\frac{Mm}{{r_1}^2}\,, \qquad \therefore v_0 = \underset{\sim\sim}{\sqrt{\frac{GM}{r_1}}}\,.$$

(2)　運動量保存則，および問題文の条件（相対速度）より，

$$\begin{cases} (m - \mathit{\Delta} m)v_{\mathrm{r}} + \mathit{\Delta} m v_{\mathrm{g}} = m v_0\,, \\ v_{\mathrm{g}} - v_{\mathrm{r}} = -u\,, \end{cases} \qquad \therefore v_{\mathrm{r}} = \underset{\sim\sim}{v_0 + \frac{\mathit{\Delta} m}{m}u}\,.$$

(3)　面積速度保存則より，

$$\frac{1}{2}r_2 v_2 = \frac{1}{2}r_1 v_1\,, \qquad \therefore v_2 = \underset{\sim\sim}{\frac{r_1}{r_2}v_1}\,.$$

(4)　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{r_1}{r_2}v_1\right)^2 - G\frac{Mm}{r_2} = \frac{1}{2}m{v_1}^2 - G\frac{Mm}{r_1}\,, \qquad \therefore v_1 = \underset{\sim\sim}{\sqrt{\frac{2GM}{r_1 + r_2}\frac{r_2}{r_1}}}\,.$$

(5)　$v_0\sqrt{r_1} = \sqrt{GM}$ より，

$$v_1 = v_0\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}}\,, \qquad \therefore \frac{r_1}{r_2} = \underset{\sim\sim}{2\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^2 - 1}\,.$$

(6)　ケプラー第 3 法則より，

$$\frac{T^2}{\left(\dfrac{r_1+r_2}{2}\right)^2}=\frac{\left(2\pi r_1\sqrt{\dfrac{r_1}{GM}}\right)^2}{{r_1}^3}\,,\qquad \therefore T=\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}}$$

であり，小天体の運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{v^2}{r_2}=G\frac{Mm}{{r_2}^2}\,,\qquad \therefore \omega=\frac{v}{r_2}=\frac{1}{r_2}\sqrt{\frac{GM}{r_2}}\,.$$

よって，

$$\theta=\omega\frac{T}{2}=\underline{\pi\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{r_1}{r_2}\right)\right\}^{\frac{3}{2}}}\,.$$

II. 電磁気（中身の見えるコンデンサ）

(1) 充電完了後のキルヒホッフ則より，

$$C = \frac{Q}{V}\,.$$

(2) 公式から $C = \varepsilon_0 \dfrac{L^2}{d}$ であり，キルヒホッフ則より，

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 L^2}\,.$$

(3) 公式より，

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 L^2}\,.$$

(4) 公式より，

$$W = \Delta Q V = \frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 L^2}\,.$$

(5) 回路のエネルギー収支の式より，

$$J = W - U\,.$$

(6) 容量の合成則より[*1]，

$$\frac{1}{C_{\mathrm{tot}}} = \frac{1}{2\varepsilon_0 \dfrac{L^2}{d/2}} + \frac{1}{\varepsilon_0 \dfrac{L^2}{d/2}}\,, \qquad \therefore C_{\mathrm{tot}} = \frac{4}{3}\varepsilon_0 \frac{L^2}{d}\,.$$

(7) 極板表面に帯電する電荷の作る極板間電場 E はガウス則より，

$$E(z) = -\frac{Q}{\varepsilon_0 L^2}\,.$$

なお，誘電体内部は分極電荷によって，

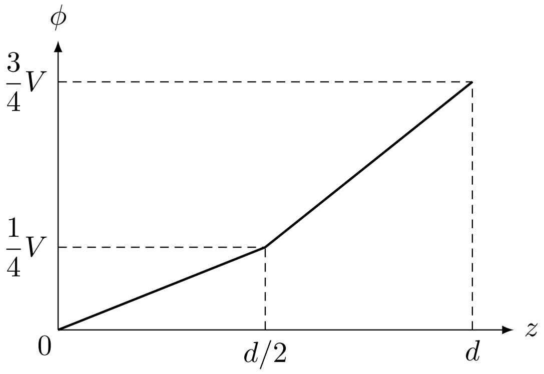
$$E'(z) = \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}E = -\frac{Q}{2\varepsilon_0 L^2}$$

となる．以上より，極板 B を基準とする電位 ϕ は，

$$\phi(z) = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 L^2} z & (0 \leq z \leq d/2)\,, \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0 L^2}\left(z - \dfrac{d}{2}\right) + \dfrac{Q}{4\varepsilon_0 L^2} d & (d/2 < z \leq d)\,. \end{cases}$$

これを図示すれば以下のようになる．

[*1] テイネイなやり方は補足を参照.



(8)　前問より，真空中の電場の強さ E，および誘電体内部の電場の強さ E' は，

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 L^2} = \frac{V}{d}, \quad E' = \frac{Q}{2\varepsilon_0 L^2} = \frac{V}{2d}.$$

III. 波動（正弦波のグラフ，屈折）

〔A〕(1)　図より，

$$\lambda = 12\,\mathrm{m}\,,\quad v = \frac{\lambda}{T} = 120\,\mathrm{m/s} \fallingdotseq 1\times 10^{2}\,\mathrm{m/s}\,.$$

(2)　図より $x = 7\,\mathrm{m}$.

(3)　$\dfrac{1}{120}\,\mathrm{s}$ で $1\,\mathrm{m}$（1 マス）進むので，

$$t = T - \frac{2}{12}T = \frac{5}{6}T = \frac{1}{12}\,\mathrm{s} \fallingdotseq 8\times 10^{-2}\,\mathrm{s}\,.$$

(4)　図より[*2]，

$$y = -0.2\sin\left(20\pi t + \frac{\pi}{6}\right).$$

(5)　図より，

$$\begin{aligned} y &= -0.2\sin\left\{20\pi\left(t - \frac{x}{120}\right) + \frac{\pi}{6}\right\} \\ &= -0.2\sin\left\{20\pi t - \frac{\pi}{6}(x-1)\right\}. \end{aligned}$$

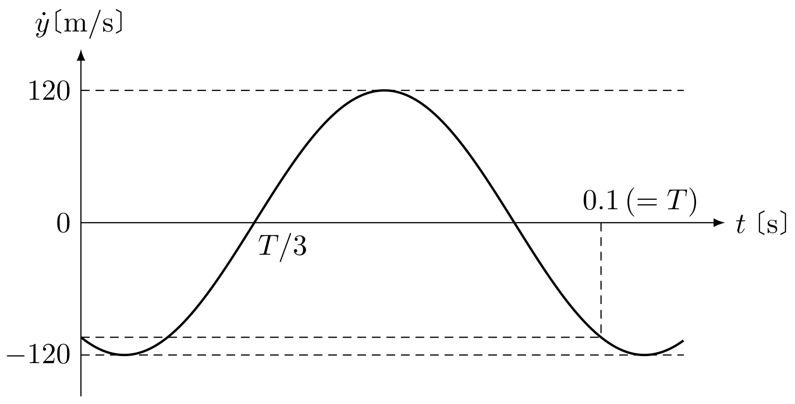
(6)　変位 y の時間微分を考えて[*3]，

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = -4\pi\cos\left\{20\pi t - \frac{\pi}{6}(x-1)\right\}\,.$$

ここに $t = 0$ を代入して，

$$\dot{y}(0) = -4\pi\cos\left\{\frac{\pi}{6}(x-1)\right\}\,.$$

これを図示すれば以下のようになる．

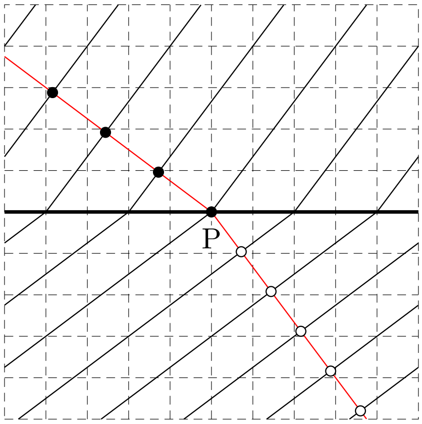


[*2] 次の瞬間下に変位することから，$t = 0$ での速度 $\dot{y}$ が負になるように初期位相を選ぶ．

[*3] 媒質の位置 x は時刻 t に依存しない．

〔B〕(1)　振動数は媒質間で不変ゆえ $\dfrac{f_2}{f_1} = \utilde{1}$.

(2)　以下の図に示した（それぞれ 1 個ずつでよい）.



(3)　図より，1 マスの長さを $\dfrac{d}{2}$ とすると，各媒質での波長 λ_1，λ_2 はそれぞれ，

$$\lambda_1 = \frac{4}{5}d\,, \quad \lambda_2 = \frac{3}{5}d\,.$$

よって，

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{3}{4}\,.$$

(4)　前問より，

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{f\lambda_2}{f\lambda_1} = \frac{3}{4} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}\,, \qquad \therefore \frac{h_2}{h_1} = \frac{9}{\utilde{16}}\,.$$

(5)　媒質 1 に対する媒質 2 の相対屈折率 n は，

$$v_2 = \frac{v_1}{n}\,, \qquad \therefore n = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}}\,.$$

よって，屈折角を t とし，スネル則より t の存在しない条件を考えて，

$$n \sin t = \frac{4}{5}$$
$$\sin t = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{h_2}{h_1}} > 1\,, \qquad \therefore \utilde{\frac{h_2}{h_1} > \frac{25}{16}}\,.$$