I. 力学（等加速度運動，衝突）

(1) 物体，および重力場からなる系の力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2+0=0+mgh\,,\qquad \therefore v=\underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{2gh}}\,.$$

(2) 物体のエネルギー収支を考えて，

$$\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{C}}}^2-\frac{1}{2}mv^2=-\mu' mgd$$

$$\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{C}}}^2=\frac{1}{2}m\cdot 2gh-\mu' mgd>0\,,\qquad \therefore h>\underset{\sim}{\mu' d}\,(=h_{\min})\,.$$

(3) 前問の物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{D}}}^2-\frac{1}{2}mv^2=-\mu' mgd\,,\qquad \therefore v_{\mathrm{D}}=\underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{g(h-\mu' d)}}\,.$$

(4) 運動量保存則，および問題文の条件（はね返り係数 1）より，

$$\begin{cases} mv+MV=mv_{\mathrm{D}}\,, \\ v-V=-(v_{\mathrm{D}}-0)\,, \end{cases}\qquad \therefore V=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{2m}{M+m}v_{\mathrm{D}}}\,,\quad v=\frac{m-M}{M+m}v_{\mathrm{D}}\,.$$

なお，物体が負方向に進むためには $v<0$，すなわち $\underset{\sim\sim}{m<M}$ を満たす必要がある．

(5) 板とばねからなる系の力学的エネルギー保存則より，

$$0+\frac{1}{2}ks^2=\frac{1}{2}MV^2+0\,,\qquad \therefore s=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{2m}{M+m}v_{\mathrm{D}}\sqrt{\frac{M}{k}}}\,.$$

また，この間単振動の半周期ゆえ，

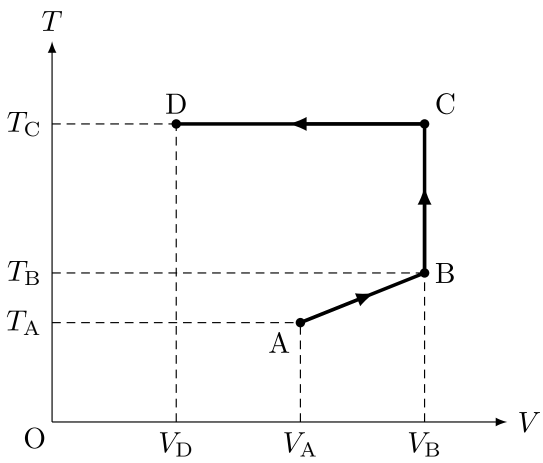
$$t=\frac{2\pi}{\omega}\frac{1}{2}=\underset{\sim\sim}{\pi\sqrt{\frac{M}{k}}}\,.$$

II. 熱力学（$\boldsymbol{P-V}$ 図）

(1)　状態方程式より，

$$T_{\mathrm{A}}=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{p_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{A}}}{nR}},\quad T_{\mathrm{B}}=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{p_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{B}}}{nR}},\quad T_{\mathrm{C}}=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{p_{\mathrm{C}}V_{\mathrm{B}}}{nR}}.$$

(2)　状態方程式より A → B 間は圧力一定であり，これは $T-V$ 図上では比例のグラフとなる．後は $p-V$ 図上変化をもとに作図すれば以下のようになる．



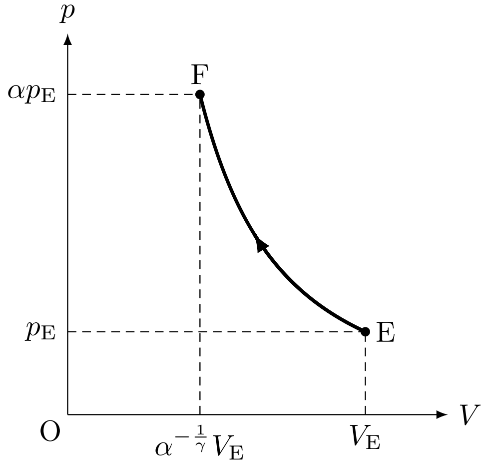
(3)　熱力学第 1 法則より，

$$Q=\Delta U+W=nC_{\mathrm{V}}(T_{\mathrm{B}}-T_{\mathrm{A}})+p_{\mathrm{A}}(V_{\mathrm{B}}-V_{\mathrm{A}})=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{n(C_{\mathrm{V}}+R)(T_{\mathrm{B}}-T_{\mathrm{A}})}.$$

(4)　ポアソンの公式より，

$$pV^{\gamma}=p_{\mathrm{E}}{V_{\mathrm{E}}}^{\gamma},\qquad \therefore p=p_{\mathrm{E}}\left(\frac{V_{\mathrm{E}}}{V}\right)^{\gamma}.$$

これを図示すれば以下の図のようになる．なお，V_{F} は $p_{\mathrm{F}}=\alpha p_{\mathrm{E}}$ より $V_{\mathrm{F}}=\underset{\sim\sim\sim\sim}{\alpha^{-\frac{1}{\gamma}}V_{\mathrm{E}}}$ である．



(5) 状態方程式より，

$$\begin{cases} p_{\mathrm{E}}V_{\mathrm{E}} = nRT_{\mathrm{E}}\,, \\ p_{\mathrm{F}}V_{\mathrm{F}} = nRT_{\mathrm{F}}\,, \end{cases} \qquad \therefore \frac{T_{\mathrm{F}}}{T_{\mathrm{E}}} = \frac{p_{\mathrm{F}}V_{\mathrm{F}}}{p_{\mathrm{E}}V_{\mathrm{E}}} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{\alpha V_{\mathrm{F}}}{V_{\mathrm{E}}}}\,.$$

(6) (4)，(5) より，

$$\frac{T_{\mathrm{F}}}{T_{\mathrm{E}}} = \frac{\alpha \cdot \alpha^{-\frac{1}{\gamma}} V_{\mathrm{E}}}{V_{\mathrm{E}}}\,, \qquad \therefore T_{\mathrm{F}} = \underset{\sim\sim\sim}{\alpha^{1-\frac{1}{\gamma}} T_{\mathrm{E}}}\,.$$

(7) 熱力学第 1 法則より[*1]，

$$W = -\mathit{\Delta} U = -nC_{\mathrm{V}}(T_{\mathrm{F}} - T_{\mathrm{E}}) = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1-\alpha^{1-\frac{1}{\gamma}}}{\gamma - 1} p_{\mathrm{E}}V_{\mathrm{E}}}\,.$$

[*1] 理想気体の比熱比の定義から $\gamma = \dfrac{C_{\mathrm{V}} + R}{C_{\mathrm{V}}}$ であり，この関係から C_{V} を消去する．

Ⅲ. 電磁気（静磁場）

(1)　公式より，

$$H = \underset{\sim\sim}{\frac{I}{2\pi x}}\,.$$

(2)　(a) エ　(b) カ　(c) ア

(3)　回路に流れる電流を i とすると，キルヒホッフ則より $i = \dfrac{V}{R}$ であり，導体棒の受けるアンペール力は公式より，

$$F = iBd = \frac{\mu_0 IVd}{2\pi Rx}\,.$$

(4)　導体棒のつりあいより，

$$0 = \frac{\mu_0 IVd}{2\pi Ra} - Mg\sin\theta\,, \qquad \therefore a = \frac{\mu_0 IVd}{2\pi RMg\sin\theta}\,.$$

(5)　公式より，

$$H = \frac{I}{2\pi x} + \frac{I}{2\pi(\ell - x)} = \frac{I}{2\pi}\frac{\ell}{x(\ell - x)}\,.$$

(6)　導体棒にはたらく斜面上向きの力 F は，

$$F = \frac{V}{R}\mu_0 Hd - Mg\sin\theta = \frac{\mu_0 IVd\ell}{2\pi Rx(\ell - x)} - Mg\sin\theta\,.$$

(7)　$F = 0$ を解いて，

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_0 IVd\ell}{2\pi Rx(\ell - x)} - Mg\sin\theta &= 0 \\
\frac{a\ell}{x(\ell - x)} - 1 &= 0 \\
x^2 - \ell x + a\ell &= 0\,, \qquad \therefore x = \frac{\ell}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4a}{\ell}}\right)\,.
\end{aligned}$$

ここで x の存在条件（根号の中身が 0 以上）を考えて，

$$1 - \frac{4a}{\ell} \geq 0\,, \qquad \therefore \ell \geq 4a\,(= b)$$

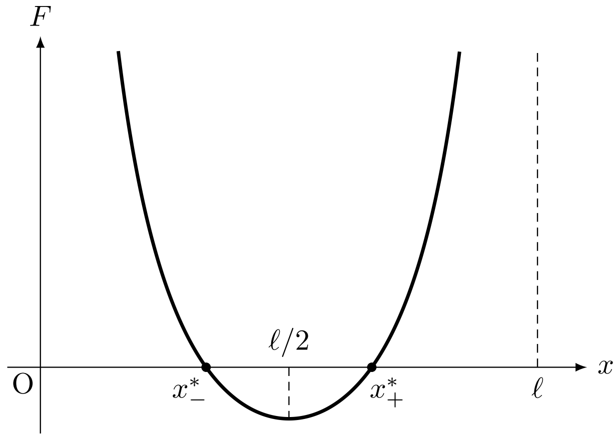
(8)　(7) より，

$$x = \frac{\ell}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4a}{\ell}}\right)\,.$$

(9)　F を a を含む式で表すと，

$$F = Mg\sin\theta\left(\frac{a}{x} + \frac{a}{\ell - x} - 1\right)$$

と表される．$\ell > 4a$ の下では $F = 0$ を満たす x は $x^*_\pm$ の 2 つあり，$x \to 0$ で $F \to \infty$，$x \to \ell$ で $F \to \infty$ より，F の x に対する変化は以下のグラフのようになる．



グラフより x^*_- 近傍での F は x が減少したとき x が増加する向きに，x が増加したとき x が減少する向きに生じ，x^*_+ 近傍での F は x が減少したとき x が減少する向きに，x が増加したとき x が増加する向きに生じる．よって，x^*_- は安定なつりあい，x^*_+ は不安定なつりあいとなる．よって，求める位置 x は，

$$x = x^*_- = \frac{\ell}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4a}{\ell}}\right).$$

【補足】**(9)** の別のアプローチ

$\xi = x - x^*$ とする（x^* は $F = 0$ を満たす x）．ここで，$\left|\dfrac{\xi}{x^*}\right| \ll 1$ となるような範囲を考える．このとき F は，

$$F = Mg\sin\theta\left(\frac{a}{x^*+\xi} + \frac{a}{\ell-(x^*+\xi)} - 1\right).$$

ここで，

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^*+\xi} &= \frac{1}{x^*}\left(1+\frac{\xi}{x^*}\right)^{-1} \\ &\fallingdotseq \frac{1}{x^*}\left(1-\frac{\xi}{x^*}\right), \\ \frac{1}{\ell-(x^*+\xi)} &= \frac{1}{\ell-x^*}\left(1-\frac{\xi}{\ell-x^*}\right)^{-1} \\ &\fallingdotseq \frac{1}{\ell-x^*}\left(1+\frac{\xi}{\ell-x^*}\right)\end{aligned}$$

のように近似できるので，

$$\begin{aligned}F &\fallingdotseq Mg\sin\theta\left(\frac{a}{x^*}+\frac{a}{\ell-x^*}-1\right) + Mg\sin\theta\left\{-\frac{a}{x^{*2}}\xi + \frac{a}{(\ell-x^*)^2}\xi\right\} \\ &\fallingdotseq Mg\sin\theta\left\{-\frac{a}{x^{*2}}\xi + \frac{a}{(\ell-x^*)^2}\xi\right\} \\ &= -\frac{\ell^2-2x^*\ell}{x^{*2}(\ell-x^*)^2}Mga\sin\theta\xi\end{aligned}$$

となり，$\ell^2 - 2x^*\ell > 0$ となれば復元力となる．したがって，

$$\ell^2 - 2x^*\ell > 0, \qquad \therefore x^* < \frac{\ell}{2}$$

を満たす x^* ゆえ，

$$x = x^*_- = \frac{\ell}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{4a}{\ell}}\right).$$