# I. 力学（円運動，中心力）

〔A〕(1)　力学的エネルギー保存則より，最高点における運動エネルギーが正となる条件を考えて，

$$\frac{1}{2}mv^2+mga=\frac{1}{2}m{v_0}^2-mga$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m{v_0}^2-2mg\geq 0\,,\qquad \therefore v_0\geq 2\sqrt{ga}\,.$$

(2)　運動方程式（中心），および力学的エネルギー保存則より[*1]，

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{a}=T+mg\,, \\ \dfrac{1}{2}mv^2+mga=\dfrac{1}{2}m{v_0}^2-mga\,, \end{cases}$$

$$\therefore T=m\frac{{v_0}^2}{a}-5mg\geq 0\,,\qquad \therefore v_0\geq\sqrt{5ga}\,.$$

〔B〕(1)　物体 A の運動方程式（中心），および物体 B の運動方程式より，

$$\begin{cases} m\dfrac{{v_1}^2}{a_1}=T\,, \\ M\cdot 0=T-Mg\,, \end{cases}\qquad \therefore T=Mg\,,\quad v_1=\sqrt{\frac{M}{m}a_1g}\,.$$

(2)　前問に示した．

(3)　物体 A の運動方程式（中心，接線）より，

$$\begin{cases} m\dfrac{{v_1}^2}{a_1}=T\,, \\ m\dfrac{dv_1}{dt}=0\,. \end{cases}$$

よって，加速度は中心成分（内向き）のみであり (お)．

(4)　速度は接線成分のみゆえ，(う)．

(5)　面積速度保存則より，

$$\frac{1}{2}a_2v_2=\frac{1}{2}a_1v_1\,,\qquad \therefore v_2=\underbrace{\frac{a_1}{a_2}v_1}_{ア}\,.$$

よって，運動方程式より，

$$\begin{cases} m\dfrac{{v_2'}^2}{a_1}=T\,, \\ M\cdot 0=T-Mg\,, \end{cases}\qquad \therefore v_2'=\sqrt{\frac{M}{m}a_2g}=\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\,v_1$$

であり，

$$\frac{v_2'}{v_2}=\underbrace{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{3}{2}}}_{イ}\,.$$

[*1] 最高点における運動エネルギーが正となる条件も考える必要があるが，これは $T\geq 0$ に含まれている．

また，運動方程式より，

$$
\begin{cases}
m\dfrac{{v_2}^2}{a_2} = T\,, \\
M\cdot 0 = T - F - Mg\,,
\end{cases}
$$

$$
\therefore T = m\frac{(a_1v_1/a_2)^2}{a_2} = \underbrace{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 Mg}_{\text{ウ}}\ , \quad F = \underbrace{Mg\left\{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 - 1\right\}}_{\text{エ}}\ .
$$

続いて，O から物体 A に向かい糸に沿って定めた座標軸として $r$ を取り原点を O に定める（物体 A の位置は $r$）．束縛条件より，

$$
(r-0)+(0-z) = \mathrm{const}\,, \qquad z = r + \mathrm{const}\,.
$$

よって，位置エネルギーの変化量は，

$$
U_2 - U_1 = Mg(z_2 - z_1) = \underbrace{Mg(a_2 - a_1)}_{\text{オ}}\ .
$$

また，張力の大きさを $T$ としたとき，各物体の運動エネルギーの時間変化率はそれぞれ[*2]，

$$
\begin{cases}
\dfrac{dK_\mathrm{A}}{dt} = -T\dot{r}\,, \\
\dfrac{dK_\mathrm{B}}{dt} = T\dot{z} - Mg\dot{z}\,,
\end{cases}
\qquad \therefore \frac{dK_\mathrm{A}}{dt} + \frac{dK_\mathrm{B}}{dt} = T(\dot{z} - \dot{r}) - Mg\dot{z} = -Mg\dot{z}
$$

となり，以下のように位置エネルギーの減少分は運動エネルギーの減少分と $\underbrace{\text{等しい}}_{\text{カ}}$ とわかる（→ b）．なお，計算からわかるように，束縛条件によって張力は物体 A，B を合わせた系には $\underbrace{\text{仕事をしない}}_{\text{キ}}$（→ $f$）．

$$
\underbrace{\Delta K_\mathrm{A} + \Delta K_\mathrm{B}}_{\Delta K_\mathrm{tot}} + \Delta U = \underbrace{0}_{\text{キ}}\ , \qquad \therefore -\Delta U = \underbrace{\Delta K_\mathrm{tot}}_{\text{カ}}\ .
$$

*2 束縛条件より $\dot{z} = \dot{r} = 0$ である．

# II. 熱力学（熱あり過程，断熱過程）

(1) 状態方程式より，

$$T_0 = \underset{\sim\sim}{\frac{p_0 S L_0}{nR}}\,.$$

(2) ピストンのつりあい，および状態方程式より，

$$\begin{cases} 0 = pS - p_0 S - mg\,, \\ p \cdot \dfrac{3}{4} S L_0 = nRT_\mathrm{A}\,, \end{cases} \qquad \therefore T_\mathrm{A} = \frac{3}{4}\left(T_0 + \frac{mgL_0}{nR}\right).$$

(3) ピストンのつりあい，および状態方程式より $T_\mathrm{B} = \dfrac{5}{4}\left(T_0 + \dfrac{mgL_0}{nR}\right)$ であり，公式より，

$$\varDelta U_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \frac{3}{2} nR(T_\mathrm{B} - T_\mathrm{A}) = \frac{3}{4}(nRT_0 + mgL_0)$$

であり，この間気体がした仕事は，

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = p\varDelta V = (p_0 S + mg)\left(\frac{5}{4}SL_0 - \frac{3}{4}SL_0\right) = \frac{1}{2}(nRT_0 + mgL_0)\,.$$

よって，熱力学第 1 法則より，

$$Q_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \varDelta U_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} + W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \frac{5}{4}(nRT_0 + mgL_0)\,.$$

(4) 状態方程式より，

$$\left(p_0 + \frac{mg}{S}\right) \cdot \frac{1}{2} S L_\mathrm{C} = nRT_\mathrm{B}\,, \qquad \therefore L_\mathrm{C} = \frac{5}{2} L_0\,.$$

(5) 状態方程式より，

$$\frac{1}{2}\left(p_0 + \frac{mg}{S}\right) \cdot \alpha S L_0 = nRT_\mathrm{D}\,, \qquad \therefore T_\mathrm{D} = \frac{\alpha}{2}\left(T_0 + \frac{mgL_0}{nR}\right).$$

(6) ポアソンの公式より，

$$\frac{1}{2}\left(p_0 + \frac{mg}{S}\right)(\alpha S L_0)^\gamma = \left(p_0 + \frac{mg}{S}\right)\left(\frac{3}{4}SL_0\right)^\gamma\,, \qquad \therefore \alpha = 3 \cdot 2^{\frac{1}{\gamma} - 2}\,.$$

(7) A → B（定圧）: ア　B → C（等温）: ウ　C → D（定圧）: ア　D → A（断熱）: エ

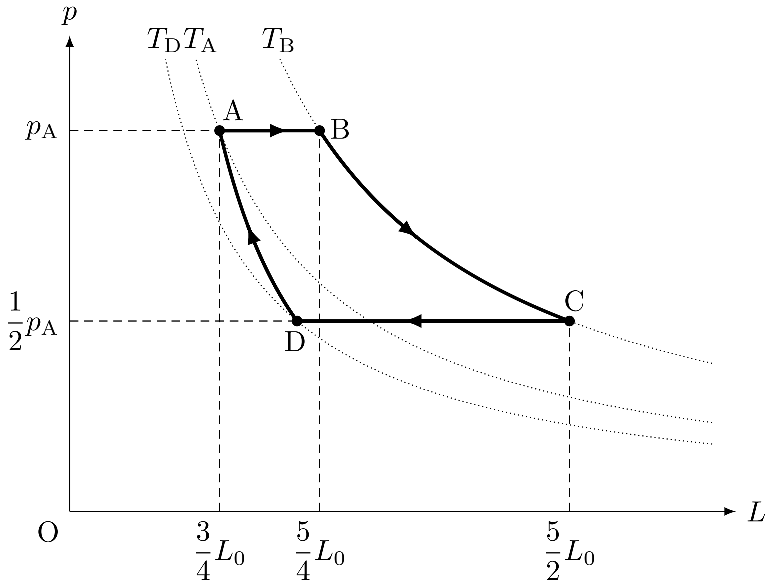
(8) $\gamma = \dfrac{5}{3}$ より，

$$\frac{T_\mathrm{B}}{T_\mathrm{D}} = \frac{10}{3 \cdot 2^{\frac{3}{5}}} > 1\,, \qquad \therefore T_\mathrm{B} > T_\mathrm{D}\,.$$

よって，$T_\mathrm{B}$ が a，$T_\mathrm{D}$ が b．なお，同様にして，

$$\frac{T_\mathrm{A}}{T_\mathrm{D}} = 2^{-\frac{2}{3}} < 1\,, \qquad \therefore T_\mathrm{D} > T_\mathrm{A}\,.$$

(9) これまでの設問の解答をまとめればを以下のようになる．



## III. 電磁気（磁場，静電場中の荷電粒子の運動）

〔A〕(1)　逆向きの電流は 斥力 を及ぼし合う[*3].

(2)　公式より，

$$f = I\frac{\mu_0}{2\pi\ell} \times 1 = \underset{\sim\sim}{\frac{\mu_0 I^2}{2\pi\ell}}\,.$$

(3)　公式より，電流 1，2 の作る磁場 $\vec{H}_1$，$\vec{H}_2$ はそれぞれ，

$$\vec{H}_1 = \frac{I}{2\pi d}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{H}_2 = \frac{I}{2\pi d}\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

ここで，$\cos\theta = \dfrac{\ell}{2d}$ である．よって，

$$H_{\mathrm{P}} = \frac{I}{2\pi d}\cos\theta \times 2 = \underset{\sim\sim}{\frac{I\ell}{2\pi d^2}}\,.$$

〔B〕(1)　公式より，

$$\phi_{\mathrm{B}} = \underset{\sim\sim}{\frac{kQ}{2a}}\,.$$

(2)　荷電粒子と電場からなる系のエネルギー収支を考えて[*4][*5]，

$$W = \mathit{\Delta}K + \mathit{\Delta}U = \underset{\sim\sim}{\frac{kQ^2}{2a}}\,.$$

(3)(ア)　荷電粒子と電場からなる系のエネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{2kQ^2}{a} = \frac{1}{2}M{v_0}^2$$

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M{v_0}^2 - \frac{2kQ^2}{a} \geqq 0\,, \qquad \therefore v_0 \geqq \underset{\sim\sim}{\sqrt{\frac{4kQ^2}{Ma}}}\,.$$

（イ）　公式より，各点電荷の作る電場の $x$ 成分は $E_x = \dfrac{kQ}{2a^2}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であり，

$$F = Q\frac{kQ}{2a^2}\frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 = \underset{\sim\sim}{\frac{kQ^2}{\sqrt{2}\,a^2}}\,.$$

（ウ）　力学的エネルギー保存則より，$v_0 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\frac{4kQ^2}{Ma}}$ を代入して，

$$\frac{1}{2}M\cdot 0^2 + \frac{2kQ^2}{\sqrt{a^2+y^2}} = \frac{1}{2}M{v_0}^2 = \frac{1}{2}\frac{kQ^2}{a}\,, \qquad \therefore y = \underset{\sim\sim}{\sqrt{15}\,a}\,.$$

---

[*3] この先の設問の計算でわかる

[*4] この設問と (4) の $v$ の計算の際，仕事を定義通りに計算する方法は【補足】を参照．

[*5] 以降，系は省略し力学的エネルギーと述べる．

(4)(ア)　公式より，

$$F = q\frac{kQ}{(a+b)^2} - q\frac{kQ}{(a-b)^2} = -\frac{4kQqab}{(a^2-b^2)^2}\,, \qquad \therefore |F| = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{4kQqab}{(a^2-b^2)^2}}\,.$$

（イ）　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{2kQq}{a} = q\left(\frac{kQ}{a+b} + \frac{kQ}{a-b}\right)\,, \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{4kQb^2}{ma(a^2-b^2)}}}\,.$$

（ウ）　与えられた近似式より，

$$|F| = \frac{4kQqab}{(a^2-b^2)^2} = \frac{4kQqb}{a^3}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)^{-2} \fallingdotseq \frac{4kQqb}{a^3}\left(1+\frac{2b^2}{a^2}\right) \fallingdotseq \underset{\sim\sim\sim}{\frac{4kQq}{a^3}}b\,.$$

（エ）　運動方程式より，

$$m\ddot{x} = -\frac{4kQq}{a^3}x\,, \qquad \therefore \ddot{x} = -\frac{4kQq}{ma^3}x\,.$$

よって，角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{4kQq}{ma^3}}$ の単振動を行うことがわかり，その周期 $T_x$ は，

$$T_x = \frac{2\pi}{\omega} = \underset{\sim\sim\sim}{\pi\sqrt{\frac{ma^3}{kQq}}}\,.$$

（オ）　$x$ 軸上に比べ $y$ 軸上の等電位線の間隔は広く，荷電粒子の受けるクーロン力が小さくなり，角振動数が小さくなるため．なお，式で見ると以下のようになる．運動方程式より，

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -\frac{2kQq}{a^2+y^2}\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}} \\ &= -\frac{2kQqy}{a^3}\left(1+\frac{y^2}{a^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &\fallingdotseq -\frac{2kQqy}{a^3}\left(1-\frac{3}{2}\frac{y^2}{a^2}\right) \\ \ddot{y} &\fallingdotseq -\frac{2kQq}{ma^3}y\,. \end{aligned}$$

よって，単振動の周期 $T_y$ は，

$$T_y = 2\pi\sqrt{\frac{ma^3}{2kQq}} = \sqrt{2}\,T_x$$

となり，$y$ 方向の単振動の方が周期が長くなることがわかる．なお，これは先に述べたように，クーロン力が小さく単振動の角振動数が小さくなることに起因する．

【補足】仕事を定義通り計算してみる

(2) について，仕事の定義より，

$$W = \int_{\infty}^{a} \frac{-kQ^2}{(x+a)^2}\,dx = \left[\frac{kQ^2}{x+a}\right]_{\infty}^{a} = \frac{kQ^2}{2a}\,.$$

(4) イについても同様に，

$$W = \int_{b}^{0} \left\{\frac{kQq}{(x+a)^2} - \frac{kQq}{(a-x)^2}\right\} dx = \left[-\frac{kQq}{x+a} - \frac{kQq}{a-x}\right]_{b}^{0} = \frac{2kQqb^2}{a(a^2-b^2)}\,.$$

よって，物体のエネルギー収支を考えて，

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{2kQqb^2}{a(a^2-b^2)}\,, \qquad \therefore v = \sqrt{\frac{4kQb^2}{ma(a^2-b^2)}}\,.$$