1 非等速円運動，複数物体系の力学，束縛条件，動く座標系

【メモ】

・問 1 は力積の計算．入試では，「力積」と出てきて初めて力積を考えればよい．力積の計算方法は次の通りに分類される．

$$\begin{cases} f \text{ の関数形が既知} & \rightarrow \quad \text{定義通りの計算（積分，もしくは } f-t \text{ 図の面積評価）} \\ f \text{ の関数形が不明} & \rightarrow \quad \text{運動量収支から逆算} \end{cases}$$

・問 4 は非等速円運動の問題．非等速円運動は，以下の 2 式を連立する[*1][*2]．

$$\begin{cases} \text{運動方程式（中心成分）} & \leftarrow \quad v \text{ を決定した後，拘束力の決定} \\ \text{力学的エネルギー保存則} & \leftarrow \quad v \text{ の決定} \end{cases}$$

・問 5，問 6 は複数物体系の運動．複数物体系の運動は，

$$\begin{cases} \text{外力のない方向の運動量保存則} \\ \text{力学的エネルギー保存則} \\ \text{（束縛条件）} \end{cases}$$

を連立して解くことが基本となる．本問は束縛条件まで考える必要のある問題であり，このタイプは，受験生としては（束縛条件が見抜けないことで）手が付かないことが多く，計算も煩雑になるので，基本的に試験時間内で処理するのは難しい．方針はわかっているとしても，試験場では「捨て問」としてしまうのが賢明である（立式だけして部分点をもらう問題）[*3]．

【解答】

問 1　力学的エネルギー保存則より，台の水平面での速さは，

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh\,, \qquad \therefore v = \sqrt{2gh}\,.$$

よって，運動量変化より，

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \underline{\begin{pmatrix} m\sqrt{2gh} \\ 0 \end{pmatrix}}\,.$$

問 2　運動方程式は，

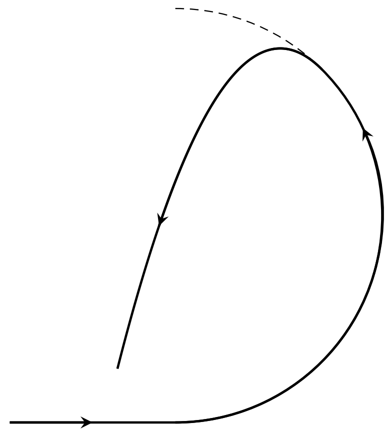
$$\begin{cases} \underline{ma_x = -N\sin\phi}\,, \\ \underline{ma_y = N\cos\phi - mg}\,. \end{cases}$$

[*1] 等速円運動は，運動方程式（中心成分）と必要に応じて各種つりあいを立てる．

[*2] 単振り子やベータトロンなどでは，力学的エネルギー保存則ではなく，それと数学的には同値な接線方向の運動方程式を考える．

[*3] だからこそ解ききったらかっこいい．

問 3　円筒面上の点から離れてからは重力のみを受けて運動するので，放物軌道に移る（以下の図）.



問 4　Q を通過することから，$\phi = \pi$ で $N \geq 0$ を満たす．運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{v^2}{r} = N + mg$$

$$N = m\frac{v^2}{r} - mg \geq 0\,, \qquad \therefore v \geq \sqrt{gr}\,.$$

よって，Q を通過する場合，通過時の最小の速さは $\sqrt{gr}$ であり[*4]，このとき，小球の位置は

$$\begin{cases} y = 2r - \dfrac{1}{2}gt^2\,, \\ x = -\sqrt{gr}\,t\,, \end{cases}$$

と表され，$y = 0$ を解いて，

$$t = \sqrt{\frac{4r}{g}}\,, \qquad \therefore |x| = \left|-\sqrt{gr}\sqrt{\frac{4r}{g}}\right| = \underset{\sim}{2r}\,.$$

問 5　2 物体（と重力場）を合わせて 1 つの系と見る．小球に関する物理量は小文字，台に関する物理量は大文字で記す．x 方向の運動量保存則，力学的エネルギー保存則，および束縛条件はそれぞれ，

$$\begin{cases} mv_x + MV = m\sqrt{2gh}\,, \\ \dfrac{1}{2}m({v_x}^2 + {v_y}^2) + \dfrac{1}{2}MV^2 + mgr(1-\cos\phi) = mgh\,, \\ v_x - V = r\dot{\phi}\cos\phi\,, \\ v_y - 0 = r\dot{\phi}\sin\phi\,. \end{cases}$$

また，台の運動方程式，および台に対する小球の運動方程式（中心成分）は，

$$\begin{cases} MA = N\sin\phi\,, \\ m\dfrac{(v_x - V)^2 + {v_y}^2}{r} = N - mg\cos\phi + mA\sin\phi\,. \end{cases}$$

[*4] 力学的エネルギー保存則より，Q を通過する瞬間の速さは $\sqrt{2g(h-2r)}$ と求まり，これが $\sqrt{gr}$ と等しいときを考えることで，Q を通過するために最小な高さ h が $\dfrac{5}{2}r$ と求めることもできる.

$\phi = \dfrac{\pi}{2}$ では，束縛条件より $v_x = V$ であり，運動量保存則より，

$$v_x = V = \frac{m}{M+m}\sqrt{2gh}\,.$$

よって，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{m}{M+m}\sqrt{2gh}\right)^2 + \frac{1}{2}m{v_y}^2 + mgr = mgh$$

$$\therefore v_y = \sqrt{2mg\left(\frac{M}{M+m}h - r\right)}$$

と求まり，また，台の運動方程式より $A = \dfrac{N}{M}$ である．以上より，台に対する小球の運動方程式（中心成分）から[*5]，

$$N + \frac{m}{M}N = m\frac{{v_y}^2}{r}\,, \qquad \therefore N = \frac{2Mmg}{M+m}\left(\frac{M}{M+m}\frac{h}{r} - \right).$$

問 6　$\theta = \pi$ で $N \geq 0$ を満たせばよい．このとき，束縛条件より $v_y = 0$ であり，運動量保存則，および力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} mv_x + MV = m\sqrt{2gh}\,, \\ \dfrac{1}{2}m({v_x}^2 + {v_y}^2) + \dfrac{1}{2}MV^2 + mgr(1-\cos\phi) = mgh\,, \end{cases}$$

$$\therefore v_x = \frac{M}{M+m}\left[\frac{m}{M}\sqrt{2gh} - \sqrt{\frac{m}{M}2gh - 2\left(1+\frac{m}{M}\right)g\left\{2r - \left(1-\frac{m}{M}\right)h\right\}}\right],$$

と求まり[*6]，相対速度の大きさは，

$$\begin{aligned}(v_x - V)^2 + {v_y}^2 &= \left\{\left(1+\frac{m}{M}\right)v_x - \frac{m}{M}\sqrt{2gh}\right\}^2 \\ &= \frac{m}{M}2gh - 2\left(1+\frac{m}{M}\right)g\left\{2r - \left(1-\frac{m}{M}\right)h\right\}.\end{aligned}$$

よって，台に対する小球の運動方程式（中心成分）より，

$$N = \frac{m}{r}\left[\frac{m}{M}2gh - 2\left(1+\frac{m}{M}\right)g\left\{2r - \left(1-\frac{m}{M}\right)h\right\}\right] - mg \geq 0$$

$$\therefore h \geq \frac{r}{2}\left(5 + 4\frac{m}{M}\right).$$

[*5] 問題文では，「垂直抗力の大きさ」とは言われていないので，

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2gr\left(\dfrac{M}{M+m}\dfrac{h}{r} - 1\right)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

と答えた方が良いかもしれない．問 2 の問題文にある「垂直抗力を N」という文は「垂直抗力の大きさを N」とするのが適切な表現であり，ここで聞いているのは N の値，すなわち垂直抗力の大きさであるとこちらで勝手な解釈をして，あえて大きさを解答に記した．

[*6] $v_x - V < 0$ より，根号の符号がマイナスと定まる（回転角 ϕ は常に増加していることから $\dot{\phi} > 0$ であり，r もまた正であるから）．

2 電磁誘導－ $\boldsymbol{vB\ell}$ 公式，運動の時間追跡

【メモ】

・$vB\ell$ 公式を用いる（回路の一部・全体が磁場中を運動する）電磁誘導の問題.

・回路の状態（回路を流れる電流 I，コンデンサに蓄えられる電荷 Q の）決定は，

$$\begin{cases} \text{キルヒホッフ則} \\ \text{電荷保存則} \\ \text{素子の性質} \end{cases}$$

によって行う.

・電磁誘導の問題は，基本的には以下の流れで構成される.

① 誘導起電力の決定

② 回路の議論

③ 運動の議論

④ エネルギーの議論

なお，今回はエネルギーに関する設問は設けられていない.

【解答】

問 1　$vB\ell$ 公式より，

$$V = vB\ell\,,\ \text{（Q の方が高電位）}.$$

また，キルヒホッフ則より，

$$vB\ell - \frac{q}{C} = 0\,, \qquad \therefore q = CvB\ell\,.$$

問 2　公式より，

$$F = -IB\ell = -\frac{\Delta q}{\Delta t}B\ell = -C\frac{\Delta v}{\Delta t}(B\ell)^2 = -C(B\ell)^2 a\,.$$

問 3　運動方程式より，

$$ma = -kx - C(B\ell)^2 a\,, \qquad \therefore a = \frac{k}{m + C(B\ell)^2}x\,.$$

よって，ばねに押されている区間では振動中心 $x = 0$，角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m + C(B\ell)^2}}$ の単振動を行う．初期条件より，導体棒の位置，および速度は時刻 t の関数として，

$$\begin{cases} x = -d\cos(\omega t)\,, \\ v = d\omega\sin(\omega)\,, \end{cases}$$

と表される．$x=0$ を解いて，

$$t=\underline{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m+C(B\ell)^2}{k}}}\,,\quad v=\underline{d\sqrt{\frac{k}{m+C(B\ell)^2}}}\,.$$

問 4　キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} vB\ell-RI_{\mathrm{R}}=0\,, \\ vB\ell-\dfrac{q}{C}=0\,, \end{cases}\qquad \therefore I_{\mathrm{R}}=\frac{vB\ell}{R}\,,\quad I_{\mathrm{C}}=\frac{\Delta q}{\Delta t}=CB\ell\frac{\Delta v}{\Delta t}=CB\ell a\,.$$

よって，公式より，

$$F=-(I_{\mathrm{R}}+I_{\mathrm{C}})B\ell=\underline{-\frac{(B\ell)^2}{R}v-C(B\ell)^2a}\,.$$

問 5　運動方程式より，

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t}=-\frac{(B\ell)^2}{R}\frac{\Delta x}{\Delta t}-C(B\ell)^2\frac{\Delta v}{\Delta t}$$
$$\{m+C(B\ell)^2\}\Delta v=-\frac{(B\ell)^2}{R}\Delta x\,,\qquad \therefore \alpha=\underline{-\frac{R}{(B\ell)^2}\{m+C(B\ell)^2\}}\,.$$

問 6　問 5 より，

$$x-0=-\frac{R}{(B\ell)^2}\{m+C(B\ell)^2\}\left(0-d\sqrt{\frac{k}{m+C(B\ell)^2}}\right)$$
$$\therefore x=\underline{\frac{Rd}{(B\ell)^2}\sqrt{k\{m+C(B\ell)^2\}}}\,.$$

【補足 1】問 5 の時間追跡

運動方程式より，

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{\alpha}v$$
$$\int_0^t\frac{1}{v}\frac{dv}{dt}\,dt=\int_0^t\frac{1}{\alpha}\,dt$$
$$\log\frac{v(t)}{v(0)}=\frac{1}{\alpha}t$$
$$\therefore v(t)=v(0)e^{\frac{1}{\alpha}t}\,.$$

さらに t で積分して，

$$\int_0^t\frac{dx}{dt}\,dt=\int_0^t v(0)e^{\frac{1}{\alpha}t}\,dt$$
$$\therefore x(t)-x(0)=\alpha v(0)\left(e^{\frac{1}{\alpha}t}-1\right)$$

ここに $x(0) = 0$，$v(0) = d\sqrt{\dfrac{k}{m + C(B\ell)^2}}$ を代入し，$t \to \infty$ とすれば当然同様の結果を得る．なお，空気抵抗型の微分方程式に従う運動ゆえ，エネルギー的な解法は選択できない．

【補足２】ジュール熱の計算

系のエネルギー収支は，運動方程式，およびキルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} mv\dfrac{dv}{dt} = -(I_\mathrm{R} + I_\mathrm{C})B\ell v\,, \\ R{I_\mathrm{R}}^2 = vB\ell I_\mathrm{R}\,, \\ \dfrac{q}{C}I_\mathrm{C} = vB\ell I_\mathrm{C}\,, \end{cases} \qquad \therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right) + R{I_\mathrm{R}}^2 = 0\,.$$

よって，導体棒が止まるまでに抵抗で生じたジュール熱は，

$$J = -\mathit{\Delta}K - \mathit{\Delta}U = \frac{1}{2}(CB\ell)^2v^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kd^2\,.$$

なお，【補足１】から，

$$I(t) = \frac{B\ell}{R}v(0)e^{\frac{1}{\alpha}t}$$

であり，ジュール熱の定義より，

$$J = \int_0^\infty \frac{\{B\ell v(0)\}^2}{R}e^{\frac{2}{\alpha}t}\,dt = -\frac{\alpha}{2}\frac{\{B\ell v(0)\}^2}{R} = \frac{1}{2}kd^2\,.$$

3 微小変化の計算，分子運動論

【メモ】

・熱力学で用いる基本的な公式は，状態方程式[*7]，熱力学第 1 法則[*8]，内部エネルギーの公式，ポアソンの公式[*9]しかない[*10]．論理としては，どれか 3 つを仮定すれば残りの 1 つが導けるようになっている．

・問 1 から問 4 は熱力学の問題．ポアソンの公式の導出と同様の計算手順を辿る．

・問 5 は分子運動論．誘導がなく，自分で全体の議論をしないといけない（これが難しいかもしれない）．分子運動論は，一連の流れを身に付けておけばよい．容器の形状は直方体，球を押さえておく．

【解答】

問 1　状態方程式は，

$$\begin{cases} \underline{pAL = kN_{\mathrm{A}}T}\,, \\ \underline{(p+\Delta p)A(L+\Delta x) = kN_{\mathrm{A}}(T+\Delta T)}\,. \end{cases}$$

問 2　公式より，

$$\Delta U = \underline{C_V \Delta T}\,.$$

また，熱力学第 1 法則より[*11]，

$$\underline{\Delta U + pA\Delta x = 0}\,.$$

問 3　ピストンのつりあいより，

$$\Delta F = pA - (p+\Delta p)A = -\Delta p A\,.$$

ここで問 1（状態方程式），問 2（熱力学第 1 法則）より，

$$\begin{cases} \Delta pAL + pA\Delta x = kN_{\mathrm{A}}\Delta T\,, \\ C_V\Delta T + pA\Delta x = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore \Delta pA = -p\left(1+\frac{kN_{\mathrm{A}}}{C_V}\right)\frac{A}{L}\Delta x\,.$$

---

*7 圧力は可動部分のつりあい，体積は容器の容積，モルウ数が与えられたときに温度を決める式，という認識が基本．

*8 内部エネルギー変化は公式，仕事は $p-V$ 図の面積，熱量は熱力学第 1 法則を介して間接的に計算される．

*9 ゆっくりとした断熱過程において用いる式．ポアソンの公式から圧力または体積が求まり，状態方程式によって温度が求まる．なお，この断熱過程では熱力学第 1 法則が仕事の決定式となる．

*10 熱効率の定義式，比熱の定義式は一旦置いといて．

*11 ピストンのつりあいより圧力は $pA-\Delta F$ であり，この微小変化の間に気体がした仕事は，

$$W = (pA-\Delta F)\Delta V \fallingdotseq pA\Delta V\,.$$

よって，

$$\Delta F = p\left(1+\frac{kN_{\mathrm{A}}}{C_V}\right)\frac{A}{L}\Delta x\,, \qquad \therefore B = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{p\left(1+\frac{kN_{\mathrm{A}}}{C_V}\right)}.$$

問 4　長さの次元を L，質量の次元を M，時間の次元を T とすると，B，および ρ の次元はそれぞれ，

$$[B] = \mathrm{ML^{-1}T^{-2}}\,,\quad [\rho] = \mathrm{ML^{-3}}\,.$$

よって，

$$\alpha = \frac{1}{2}\,,\quad \beta = -\frac{1}{2}\,.$$

問 5　Δt 間に単原子分子がピストンに与える力積は，

$$\sum_{i=1}^{N} 2mv_{i,x}\frac{v_{i,x}}{2L}\Delta t = \frac{m}{L}\sum_{i=1}^{N}(v_{i,x})^2\Delta t = \frac{mN\overline{v_x{}^2}}{L}\Delta t = \frac{mN\overline{v^2}}{3L}\Delta t\,.$$

これが気体の与える力積と同一視して，

$$pAL\Delta t = \frac{mN\overline{v^2}}{3L}\Delta t\,, \qquad \therefore p = \frac{1}{3}\rho\overline{v^2}\,.$$

問 6　問 4 より $s = \sqrt{\dfrac{B}{\rho}}$，問 5 より $\sqrt{\rho} = \sqrt{\dfrac{3p}{\overline{v^2}}}$ ゆえ，

$$s = \sqrt{\frac{B\overline{v^2}}{3p}} = \sqrt{\frac{1}{3}\left(1+\frac{kN_{\mathrm{A}}}{3kN_{\mathrm{A}}/2}\right)\overline{v^2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}\sqrt{\overline{v^2}}\,, \qquad \therefore D = \frac{\sqrt{5}}{3}\,.$$