2 運動方程式と束縛条件

束縛条件は以下のうち，上記 2 つは確実に抑えたい．

力の図示方法

❶ 糸（張力）

→　糸の長さ物体の位置座標で表し，長さ一定を利用

❷ 面（垂直抗力）

→　物体の位置関係を座標で結び付け，面が変形しないことによる位置関係の制約を立てる

❸ 面（静止摩擦力）

→　面を介する物体間の速度が等しい（加速度も等しい）

なお，これら 3 つの力を拘束力と言い，未知量で置くことが共通する．これら 3 つの力はすべて上限値が存在するが，高校では静止摩擦力のみ上限値の公式を覚える必要がある．

1. 糸による束縛①

物体 A（質量 m）と物体 B（質量 $2m$）を軽く伸び縮みしない糸で繋ぎ，滑車 C（質量 $3m$）にかけた．糸と滑車の間には摩擦はなく，滑車の回転は考えないものとする．鉛直上向きに x 軸を定める．重力加速度の大きさを g とし，以下の設問に答えよ．

I　滑車に鉛直上向きに大きさ $F = F_0$ の力を加えたところ，滑車は静止したままであった．このとき，物体 A，B の運動について考える．

(1)　物体 A，B の加速度を鉛直上向きにそれぞれ a，b，糸の張力の大きさを T とする．物体 A，B の運動方程式をそれぞれ立式せよ．

(2)　糸が伸び縮みしないことから，a，b の間に成り立つ関係式を求めよ．

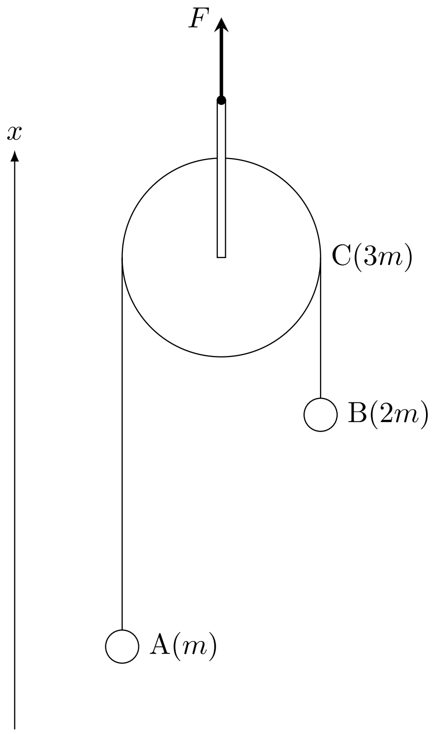
(3)　a，b，T，F_0 を求めよ．

II　滑車に鉛直上向きに大きさ $F = 17mg$ の力を加え，一定の加速度で運動させた．このとき，物体 A，B の運動について考える．

(1)　物体 A，B の加速度を鉛直上向きにそれぞれ α，β，滑車の加速度を鉛直上向きに γ，糸の張力の大きさを S とする．物体 A，B，滑車の運動方程式をそれぞれ立式せよ．

(2)　糸が伸び縮みしないことから，α，β，γ の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3)　α，β，γ，S を求めよ．



【メモ】

張力は未知量なので，運動方程式だけでは式が不足する．そこで，束縛条件（糸の長さが一定の条件）を考える．

【解答】

I (1) 各物体の運動方程式は以下の通りである．

$$\begin{cases} 物体\ \mathrm{A}: \underline{ma = T - mg}\,, \\ 物体\ \mathrm{B}: \underline{2mb = T - 2mg}\,. \end{cases}$$

(2) 滑車の位置を X とする（ただし，今の場合 X は定数）．糸の長さが一定なことより，

$$X - x_{\mathrm{A}} + X - x_{\mathrm{B}} = \mathrm{const}\,, \qquad \therefore\ \underline{a + b = 0}\,.$$

(3) 運動方程式，および束縛条件より，

$$a = \underline{\frac{1}{3}g}\,,\quad b = \underline{-\frac{1}{3}g}\,,\quad T = \underline{\frac{4}{3}mg}\,.$$

また，滑車の運動方程式[*1]より，

$$3m \cdot 0 = F_0 - 2T - 3mg\,, \qquad \therefore\ F_0 = \underline{\frac{17}{3}mg}\,.$$

II (1) 各物体の運動方程式は以下の通りである．

$$\begin{cases} 物体\ \mathrm{A}: \underline{m\alpha = S - mg}\,, \\ 物体\ \mathrm{B}: \underline{2m\beta = S - 2mg}\,, \\ 滑車\ \mathrm{C}: \underline{3m\gamma = 17mg - 2S - 3mg}\,. \end{cases}$$

(2) I(2) 同様にして，

$$\underline{2\gamma - \alpha - \beta = 0}\,.$$

(3) 束縛条件を使い，運動方程式を解いて[*2]，

$$\alpha = \underline{3g}\,,\quad \beta = \underline{g}\,,\quad \gamma = \underline{2g}\,,\quad S = \underline{4mg}\,.$$

[*1] 加速度ゼロのため，力のつりあいの式と呼んでも良い．

[*2] 各運動方程式から加速度を T を含む形で表し，それを束縛条件へ代入することで S から求める，というのが簡単．

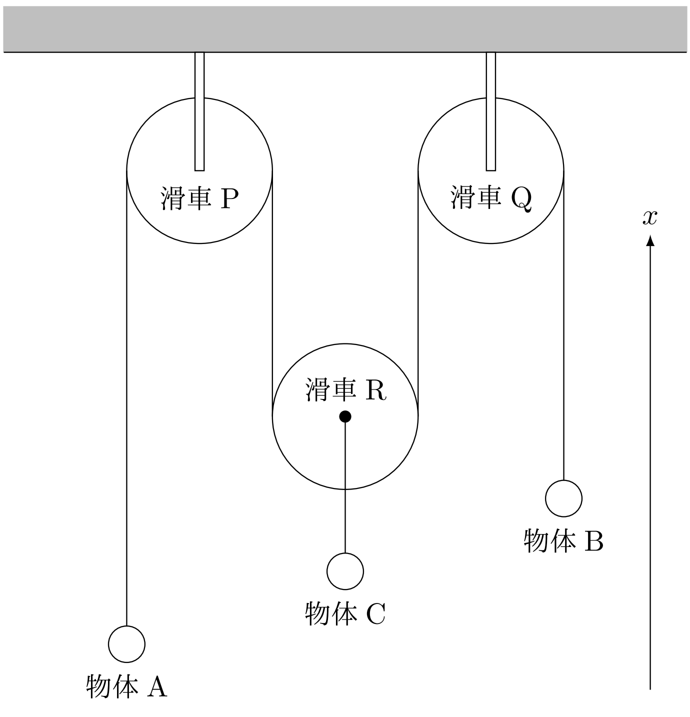
2. 糸による束縛②

物体 A（質量 m）と物体 B（質量 $2m$）を糸で繋ぎ，天井に吊るされた滑車 P，Q にかけた．その間に滑車 R をかけ，滑車 R には物体 C（質量 $3m$）を糸で繋いである．全ての物体が静止している状態から静かに手を放した．全ての滑車と糸は質量が無視でき，糸に関しては伸び縮みせず，糸と滑車の間の摩擦はなく，滑車の回転は考えないものとする．鉛直上向きに x 軸を定める．重力加速度の大きさを g とする．

(1) 物体 A，B，C の加速度をそれぞれ a，b，c，物体 A と物体 B を結ぶ糸の張力の大きさを T，物体 C に繋がる糸の張力の大きさを S とする．物体 A，B，C，滑車 R の運動方程式をそれぞれ立式せよ．

(2) 糸が伸び縮みしないことから，a，b，c の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3) a，b，c，T，S を求めよ．



【メモ】

動滑車固有の特別な考えみたいなものは要らない．今の場合，滑車の運動方程式は質量が 0 で立式する．

【解答】

(1) 各物体の運動方程式は以下の通りである[*3]．

$$\begin{cases} \text{物体 A}: ma = T - mg\,, \\ \text{物体 B}: 2mb = T - 2mg\,, \\ \text{物体 C}: 3mc = S - 3mg\,, \\ \text{滑車 R}: 0 \cdot c = 2T - S\,. \end{cases}$$

(2) 定滑車の位置を x_0 とする．糸の長さが一定なことより物体 A，B，C の位置は，

$$(x_0 - x_\mathrm{A}) + (x_0 - x_\mathrm{B}) + 2(x_0 - x_\mathrm{C}) = \mathrm{const}$$

の関係を満たす．この式の時間 2 階微分（時間変化を 2 回取ること，以後省略）を考えて，

$$a + b + 2c = 0\,.$$

(3) 束縛条件を使い，運動方程式を解いて[*4]

$$a = \frac{7}{17}g\,,\quad b = -\frac{5}{17}g\,,\quad b = -\frac{1}{17}g\,,\quad T = \frac{24}{17}mg\,,\quad S = \frac{48}{17}mg\,.$$

[*3] 物体 C と滑車 R の加速度が等しいというところにも，糸の長さが一定という条件を暗黙裡に使用している．

[*4] 各運動方程式から加速度を T を含む形で表し，それを束縛条件へ代入することで T から求める，とするのが楽．

3. 面による束縛①

図のように，水平な床の上にある三角台（質量 $3m$，斜面の傾斜角 60°）と鉛直な壁に挟まれた球（質量 m）がある．運動はすべて紙面で表される同一鉛直面内で起こるものとし，三角台が倒れることや，球が回転することは考えない．また，一切の摩擦を無視し，重力加速度の大きさを g とする．

水平右向きに x 軸を，鉛直上向きに y 軸を定め，三角台の位置は左下端の x 座標 X で表す．

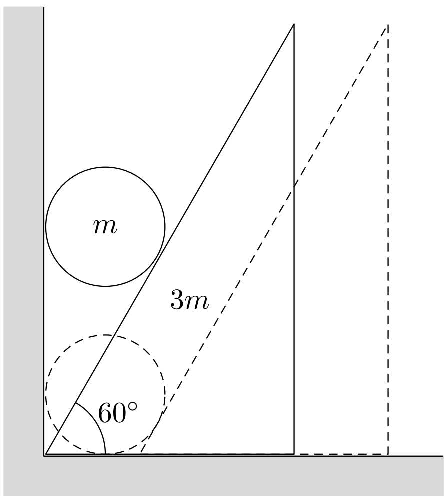
はじめ，三角台に外力を加えて，図の実線の状態に保持しておき，そっと手を放したところ，三角台は右向きに大きさ A の加速度で，小球は下向きに大きさ a の加速度で運動を始めた（実線から破線のような運動）．球と三角台の間に働く垂直抗力を N とする．

(1) 各物体の運動方程式をそれぞれ立式せよ．なお，小球の加速度の符号に注意せよ．

(2) 球が三角台の斜面上をすべるように運動することから，a と A の間に成り立つ関係式を立式せよ．

（ヒント）球の座標は三角台との接している点で考えると分かり易い．

(3) a，A，N を求めよ．



【解答】

(1)　各物体の運動方程式は，

$$\begin{cases} y : \underset{\sim\sim\sim}{m(-a) = \dfrac{1}{2}N - mg}\,, \\ x : \underset{\sim\sim\sim}{3mA = \dfrac{\sqrt{3}}{2}N}\,. \end{cases}$$

(2)　球の接地点を (x, y)，三角台の左下端を $(X, 0)$ とする[*5]．このとき，三角台の面，および壁，床の面が変形せず球が三角台上を滑ることから常に

$$y = \sqrt{3}\,(x - X)$$

の関係を満たす．この両辺の t の 2 階微分を取って，

$$\underset{\sim\sim\sim}{a = \sqrt{3}\,A}\,.$$

(3)　運動方程式，および束縛条件より，

$$a = \underset{\sim}{\frac{1}{2}g}\,,\quad A = \underset{\sim}{\frac{\sqrt{3}}{6}g}\,,\quad N = \underset{\sim}{\sqrt{3}\,mg}\,.$$

[*5] 壁面が変形しないことから球は x 方向に雲小津しないため，x が定数を取ることに注意．

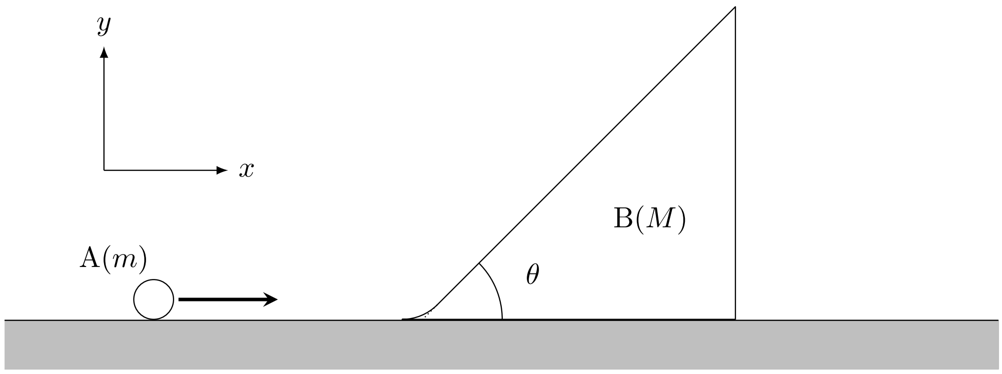
4. 面による束縛②

水平な床の上に物体 A（質量 m）と物体 B（質量 M，傾斜角 θ）を置く．水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．物体 A に x 正方向に初速度を与えたところ，A は B の斜面上を運動した．物体 B と床はなめらかに繋がっており，一切の摩擦は無視する．重力加速度の大きさを g とする．

(1) 三角台と小物体の間にはたらく垂直抗力の大きさを N とする．三角台の x 方向の加速度を A，小物体の x 方向の加速度を a_x，y 方向の加速度を a_y とする．台の x 方向の運動方程式と，小物体の x 方向，および y 方向の運動方程式をそれぞれ立式せよ．

(2) 小物体が三角台の斜面上を運動することから，A，a_x，a_y の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3) A，a_x，a_y，N を求めよ．



【メモ】

三角台が動くため，「小球は三角台の斜面垂直方向に運動しない」といった考えは誤り．イメージで解かないで，面を介したら，運動方程式と束縛条件．

【解答】

(1) 各物体の運動方程式は以下の通りである．

$$\begin{cases} \underset{\sim}{ma_x = -N\sin\theta}\,, \\ \underset{\sim}{ma_y = N\cos\theta - mg}\,, \\ \underset{\sim}{MA = N\sin\theta}\,. \end{cases}$$

(2) 三角台の先端の位置を $(X, 0)$，小物体の位置を (x, y) とすると，これらは常に

$$y = (x - X)\tan\theta$$

の関係を満たす．この式の時間の 2 階微分を考えて，

$$\underset{\sim}{a_y = (a_x - A)\tan\theta}\,.$$

(3) 束縛条件を使い，運動方程式を解いて[*6]，

$$A = \frac{m\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g\,,\quad a_x = -\frac{M\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g\,,$$

$$a_y = -\frac{(M+m)\sin^2\theta}{M + m\sin^2\theta}g\,,\quad N = \frac{Mm\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g\,.$$

[*6] 運動方程式から加速度を N を含む形で表し，それを束縛条件へ代入することで N から求める，というのが楽.