物理の
ラビリンス

K.Koremura

目次

1

力学前半

第 1 部力学前半では，1 物体系の力学のうち，運動方程式を直接解くことによる運動の解析，およびエネルギーと仕事の関係を用いた運動の解析を扱う．第 1 章では，第 2 章に向けた基礎的な数学を扱う．なお，数学の制約があるため，加速度が一定の場合に限る．第 2 章では，運動方程式を直接解く練習をする．ここでも同様の理由から等加速度運動のみを扱う（等加速度以外の運動は，第 4 部の力学後半で扱う）．第 3 章では，運動方程式と数学的に等価なエネルギーと仕事の関係（エネルギー収支の式）を用いて運動を解析する．このとき，運動エネルギーは公式そのままなので，仕事の計算を正しく行うことが根本的な問題となる．また，特定の場合（弾性力，および重力）において，仕事の計算をした後にエネルギー収支の式を変形することで得られる式が，物体以外も含めた系のエネルギーの総和（力学的エネルギー）を表していると解釈できることをみる（これにより，エネルギーで議論をする際は「どこまでを 1 つの系と見なすか」が重要になる）．

§1.1 運動学

第 1 章では，位置，速度，加速度を導入し，それらの間の関係（速度，加速度の定義）を扱う．特に，等加速度運動については，位置と速度の公式を覚える．また，$v-t$ グラフの接線の傾きが加速度，面積が変位であることを押さえる．

■簡単なまとめ

以下では，位置を x，速度を v，加速度を a と記し，一般にそれらは時刻 t の関数とする．

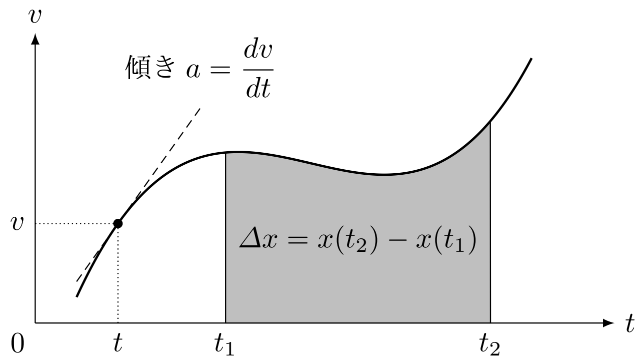
- 速度 v，加速度 a の定義：

$$v(t) = \lim_{\mathit{\Delta} t\to 0}\frac{\mathit{\Delta} x}{\mathit{\Delta} t} = \frac{dx}{dt}\,, \qquad a(t) = \lim_{\mathit{\Delta} t\to 0}\frac{\mathit{\Delta} v}{\mathit{\Delta} t} = \frac{dv}{dt}\,.$$

ここで，$\mathit{\Delta} x = x(t+\mathit{\Delta} t) - x(t)$ である．

- $v-t$ グラフ：

$$\begin{cases} \text{傾き} & \to \quad \text{加速度}\ a\,, \\ \text{面積} & \to \quad \text{変位}\mathit{\Delta} x\,. \end{cases}$$



- 加速度一定の場合の位置 x と速度 v：

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + v(0)t + \dfrac{1}{2}at^2\,, \\ v(t) = v(0) + at\,. \end{cases}$$

$v-t$ グラフを図示して面積評価をすれば $x(t)$ の式が得られる．なお，加速度一定の運動でしか使えないことに注意．

1. 位置→速度→加速度

位置 $x(t)$ に対する速度 $v(t)$，および加速度 $a(t)$ を求めよ[*1]．

(1)　$x(t) = v_0 t$

(2)　$x(t) = \beta t^2$

(3)　$x(t) = \gamma t^3$

【解答】

(1)　位置の時間変化率を考えて[*2]，

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_0(t+\Delta t) - v_0 t}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_0 \Delta t}{\Delta t} \\ &= \underset{\sim}{v_0}\,. \end{aligned}$$

同様の計算手順を踏んで，

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \underset{\sim}{0}\,.$$

以下同様の計算をすればよい．細かい計算手順を見たい場合，授業ノート（たぶんかなり丁寧）か，問題 *11* の解答（そこそこ丁寧）を参考にすると良い．

(2)　$v(t) = \underset{\sim\sim}{2\beta t}\,,\quad a(t) = \underset{\sim\sim}{2\beta}\,.$

(3)　$v(t) = \underset{\sim\sim\sim}{3\gamma t^2}\,,\quad a(t) = \underset{\sim\sim}{6\gamma t}\,.$

[*1] $x(t)$ は，「時刻 t における位置 x」と読む（を意味する）．

[*2] これも以下の微分公式を知っていれば，公式を使うだけ（n は整数）．

$$\frac{d}{dt}(t^n) = n t^{n-1}\,.$$

2. 等加速度運動（数値）

x 軸上を動く物体について，その位置を x，速度を v，加速度を a と記し，それらは全て時刻 t の関数であるとする．加速度は $a = -2\,\mathrm{m/s^2}$ で与えられ[*3]，運動の初期状態（$t = 0\,\mathrm{s}$ での位置 x と速度 v）は，それぞれ $x = 12\,\mathrm{m}$，$v = 4\,\mathrm{m/s}$ とする．$0\,\mathrm{s}$ 以降の運動について考える．

(1)　v，x を，それぞれ時刻 t の関数として表せ．

(2)　物体が x 軸正の方向へ原点から最も遠ざかる時刻を $t = t_1$，そのときの位置を $x = x_1$ とする．t_1，x_1 を求めよ．
（ヒント：物体の運動が折り返すとき，常に $v = 0$ を満たす．）

(3)　物体が初めて $x = 0$ の位置に戻る時刻を $t = t_2$，そのときの速度を $v = v_2$ とする．t_2，v_2 を求めよ．

【メモ】

等加速度運動の公式の確認．

【解答】

(1)　等加速度運動の位置，および速度の公式より，

$$v(t) = v(0) + at = \underline{-2t + 4}\,,$$

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2 = \underline{-t^2 + 4t + 12}\,.$$

(2)　$t = t_1$ において $v = 0$ より，

$$-2t + 4 = 0\,, \qquad \therefore t_1 = \underline{2\,\mathrm{s}}\,,\ \ x_1 = x(2) = \underline{16\,\mathrm{m}}\,.$$

(3)　$t = t_2$ において $x = 0$ より，$t > 0$ を考慮して，

$$-t^2 + 4t + 12 = 0\,, \qquad \therefore t_2 = \underline{6\,\mathrm{s}}\,,\ \ v_2 = v(6) = \underline{-8\,\mathrm{m/s}}\,.$$

[*3] 加速度の単位は $\mathrm{m/s^2}$ と記し，「メートル毎秒毎秒」と読む．速度の単位も，これに倣って読めばよい．

3. 等加速度運動（文字式）

x 軸上を動く物体について，その位置を x，速度を v，加速度を a と記し，それらは全て時刻 t の関数であるとする．加速度は $-a\,(a>0)$ で与えられ，運動の初期状態（$t=0$ での位置 x と速度 v）は，それぞれ $x(0)=x_0\,(>0)$，$v(0)=0$ とする．$t>0$ の運動について考える．

(1)　v，x を，それぞれ時刻 t の関数として表せ．

(2)　物体が再び $x=0$ の位置を通過する時刻を $t=t_1$，そのときの速度を $v=v_1$ とする．t_1，v_1 を求めよ．

【メモ】

等加速度運動の公式の確認．

【解答】

(1)　等加速度運動の位置および速度の公式より[*4]，

$$v(t)=v(0)+at=\underset{\sim\sim\sim}{-at}\,,$$
$$x(t)=x(0)+v(0)t+\frac{1}{2}at^2=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{x_0-\frac{1}{2}at^2}\,.$$

(2)　$t=t_1$ において $x=0$ より，$t>0$ を考慮して，

$$x_0-\frac{1}{2}at^2=0\,,\qquad \therefore t_1=\underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{2x_0}{a}}}\,,\quad v_1=v(t_1)=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{-\sqrt{2ax_0}}\,.$$

*4 1 つ目の等号は公式を，2 つ目の等号は公式に代入をした式を表している．

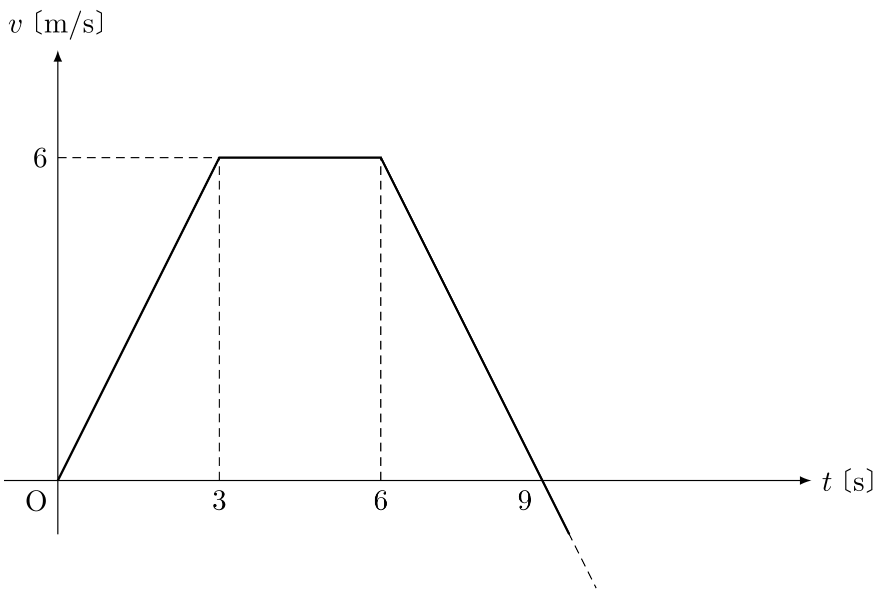
4. $v-t$ グラフ

x 軸上を動く物体について，その位置を x，速度を v，加速度を a と記し，それらは全て時刻 t の関数であるとする．物体の速度 v は図のように与えられる．$t>0$ の運動について考える．

(1)　$t=0\,\mathrm{s}$ から $3\,\mathrm{s}$ の加速度 a_1，$t=3\,\mathrm{s}$ から $6\,\mathrm{s}$ の加速度 a_2，$t=6\,\mathrm{s}$ から $9\,\mathrm{s}$ の加速度 a_3 を，それぞれ求めよ．

(2)　$t=0\,\mathrm{s}$ から $9\,\mathrm{s}$ までの物体の変位 Δx を求めよ．

(3)　物体は，はじめ原点にあった．このとき，物体が再び原点を通過する時刻 t を求めよ．



【メモ】

授業内の問題と全く同じ設定．等加速度運動の公式と $v-t$ グラフの確認．$v-t$ グラフの傾きは加速度を，符号付き面積は変位（位置の変化量）を与える．

【解答】

(1)　加速度の定義[*5]より，

$$a_1 = \frac{6-0}{3-0} = \underset{\sim\sim\sim}{2\,\mathrm{m/s^2}}\,,\quad a_2 = \frac{6-6}{6-3} = \underset{\sim\sim\sim}{0\,\mathrm{m/s^2}}\,,\quad a_3 = \frac{0-6}{9-6} = \underset{\sim\sim\sim}{-2\,\mathrm{m/s^2}}\,.$$

(2)　$v-t$ グラフの（符号付き）面積は，運動の変位を表すため，

$$\Delta x = \frac{1}{2}\times 6\times(9+3) = \underset{\sim\sim}{36\,\mathrm{m}}\,.$$

(3)　再び原点を通過する時刻を $t\,(>9)$ とすると，t 軸下側の三角形の（符号付き）面積（の大きさ）が (2) と一致すればよい．したがって，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\times(t-9)\times 2(t-9) = 36\\ &\{(t-9)-6\}\{(t-9)+6\} = 0\,,\qquad \therefore t = \underset{\sim\sim}{15\,\mathrm{s}}\,(>9)\,.\end{aligned}$$

*5 速度の時間変化率

5. 投射①

地表から高さ h の位置にある小物体を自由落下[*6]させた．小物体に生じる加速度は，鉛直下向きに大きさ g である[*7]．小物体の地面に落下する直前の速さ[*8]を，g，h を用いて表せ．

【解答】

位置や速度の正の向きを鉛直上向きとする．なお，x 軸の原点は地面に取る．このとき，物体の位置 x，速度 v はそれぞれ，

$$\begin{cases} x(t) = h - \dfrac{1}{2}gt^2\,, \\ v(t) = -gt\,. \end{cases}$$

よって，$x = 0$ となる時刻は，

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,, \qquad \therefore |v| = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{2gh}}\,.$$

[*6] 初速度 0 での落下．

[*7] これ（鉛直下向きに大きさ g の加速度）を重力加速度と呼び，g の値は，$g \fallingdotseq 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ である．空気抵抗など気体の影響を受けない落体は鉛直下向きにのみ大きさ g の加速度が生じる（以後常識に）．

[*8] 速さは，速度の大きさ（絶対値を取ったもの）を表す．

***6*. 投射②**

地面から高さ h の位置にある小物体を鉛直上向きに速さ v_0 で投げ上げた．小物体には y 軸負の向きに大きさ g の加速度が生じている．小物体の到達する最高点を H とする．H を，v_0，g，h を用いて表せ．また，小物体の地面に落下する直前の速さ v を，v_0，g，h を用いて表せ．

【解答】

位置や速度の正の向きを鉛直上向きとする．なお，x 軸の原点は地面に取る．このとき，物体の位置 x，速度 v はそれぞれ，

$$\begin{cases} x(t) = h + v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2\,, \\ v(t) = v_0 - gt\,. \end{cases}$$

$v = 0$ となる時刻は $t = \dfrac{v_0}{g}$ ゆえ，最高点 H は

$$H = x\left(\frac{v_0}{g}\right) = h + \frac{{v_0}^2}{2g}\,.$$

また，$x = 0$ となる時刻は，

$$h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 0\,, \qquad \therefore t = \frac{v_0}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{{v_0}^2}}\right)\,.$$

この時刻を速度の式に代入し，

$$v = v_0 - v_0\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{{v_0}^2}}\right) = -\sqrt{{v_0}^2 + 2gh}\,, \qquad \therefore |v| = \sqrt{{v_0}^2 + 2gh},\,.$$

7. 投射の類題

　地表から高さ $2h$ の位置にある物体を A．地表から高さ h の位置にある物体を B とする．A を初速度 v_0 で鉛直下向きに投げ下ろし，それと同時に B を自由落下させたところ，2 つの小球は同時に地表に達した．重力加速度の大きさを g とする．v_0 を α，g，h を用いて表せ．

【解答】

　位置や速度の正の向きを鉛直上向きとする．各物体の位置 y_{A}，y_{B} はそれぞれ，

$$\begin{cases} y_{\mathrm{A}} = 2h - v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2\,, \\ y_{\mathrm{B}} = h - \dfrac{1}{2}gt^2\,. \end{cases}$$

　地表に達する時刻が両物体で等しいことから，

$$2h - v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}gt^2\,, \qquad t = \frac{h}{v_0}\,.$$

この時刻における物体の位置が 0 ゆえ[*9]，

$$y_{\mathrm{A}} = y_{\mathrm{B}} = h\left\{1 - \frac{gh}{2{v_0}^2}\right\} = 0\,, \qquad \therefore v_0 = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{gh}{2}}}\,.$$

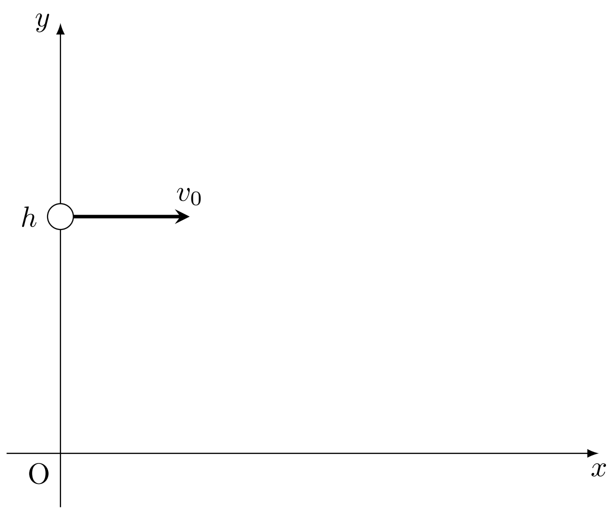
[*9] 一方の位置が 0 となる時刻を求め，その時刻をもう一方の式に入れたときにその位置もまた 0 となる，としても同じことである．

8. 投射③（水平投射）

図のように，水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．小物体を位置 $(x, y) = (0, h)$ から x 正方向に速さ v_0 で打ち出した．小物体には y 軸負の向きに大きさ g の加速度が生じている．以下の設問に答えよ．

(1)　初期条件（$t = 0$ での位置，および速度の値）を考慮して，小物体の x 方向の速度 v_x，y 方向の速度 v_y，位置 x，位置 y をそれぞれ時刻 t の関数として求めよ．

(2)　小物体が落下する時刻 t_1 を求めよ．また，物体の落下した位置 (x, y) を求めよ．



【解答】

(1)　初期条件から，

$$v_x(t) = v_0\,, \qquad v_y(t) = -gt\,, \qquad x(t) = v_0 t\,, \qquad y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

(2)　$y = 0$ を満たす時刻を求めて，

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,, \qquad (x, y) = \left(v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}, 0\right).$$

9. 投射④（斜方投射）

図のように，水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．小物体を原点から速さ v_0，仰角 $\theta\,(0^\circ < \theta < 90^\circ)$ で打ち出した．小物体には y 軸負の向きに大きさ g の加速度が生じている．なお，三角関数についての以下の恒等式を用いても良い．

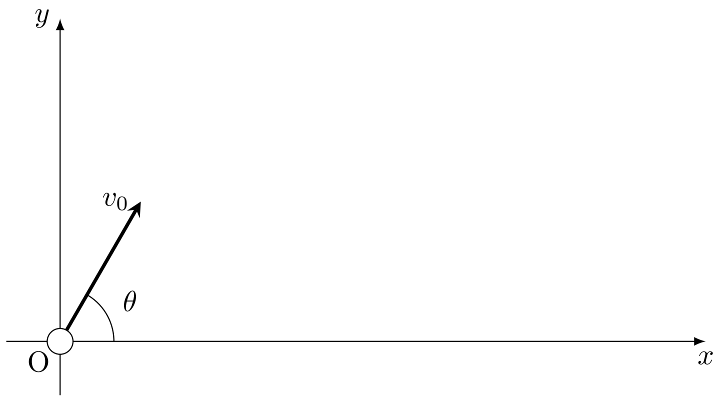
$$\sin{(\alpha+\beta)} = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

(1)　初期条件（$t=0$ での位置，および速度の値）を考慮して，小物体の x 方向の速度 v_x，y 方向の速度 v_y，位置 x，位置 y をそれぞれ時刻 t の関数として求めよ．

(2)　小物体が最高点に到達する時刻 t_1 を求めよ．また，最高点の位置 (x, y) を求めよ．

(3)　小物体が落下する時刻 t_2 を求めよ．また，物体の落下した位置 (x, y) を求めよ．

(4)　小物体の落下距離が最大となる θ を求めよ．



【解答】

(1)　初期条件から，

$$\begin{cases} x(t) = \underset{\sim}{v_0 \cos\theta t}\,, \\ y(t) = \underset{\sim}{v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2}\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x(t) = \underset{\sim}{v_0 \cos\theta}\,, \\ v_y(t) = \underset{\sim}{v_0 \sin\theta - gt}\,. \end{cases}$$

(2)　$v_y = 0$ を満たす時刻を求めて，

$$t = \underset{\sim}{\frac{v_0 \sin\theta}{g}}\,, \qquad (x, y) = \underset{\sim}{\left(\frac{{v_0}^2 \sin\theta\cos\theta}{g}, \frac{{v_0}^2 \sin^2\theta}{2g}\right)}\,.$$

(3)　$y = 0$ を満たす時刻を求めて[*10]，

$$t = \underset{\sim}{\frac{2v_0 \sin\theta}{g}}\,, \qquad (x, y) = \underset{\sim}{\left(\frac{{v_0}^2 \sin 2\theta}{g}, 0\right)}\,.$$

(4)　前問の結果より，$\sin 2\theta$ が最大のとき，すなわち $\sin 2\theta = 1$ のときを考えて，

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= 1 \\ 2\theta &= 90^\circ\,, \qquad \therefore \theta = \underset{\sim}{45^\circ}\,. \end{aligned}$$

[*10] $\alpha = \beta = \theta$ として，三角関数の恒等式（加法定理）を用いた．

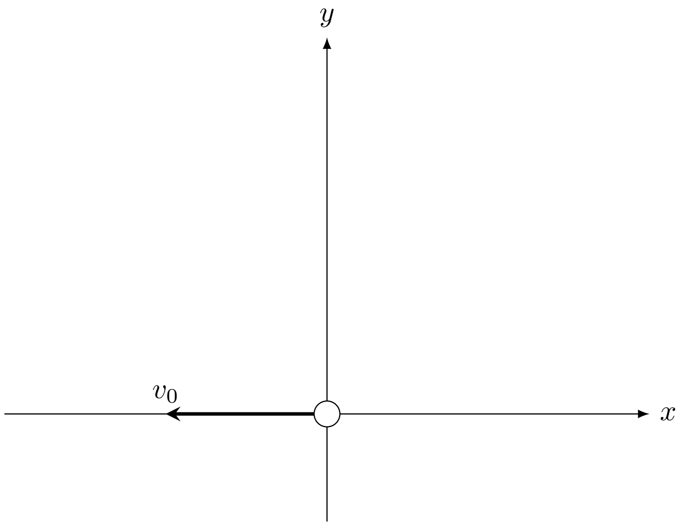
10. 等加速度運動（2 次元）

図のように，水平面上に xy 平面を取り．小物体を原点から x 軸負の方向に速さ v_0 で打ち出した．小物体には，y 軸から**時計回り**に角度 $45°$) の方向に大きさ $\sqrt{2}\,a$ の加速度が生じている．

(1)　初期条件（$t=0$ での位置，および速度の値）を考慮して，小物体の x 方向の速度 v_x，y 方向の速度 v_y，位置 x，位置 y をそれぞれ時刻 t の関数として求めよ．

(2)　x 方向の運動を折り返す時刻 t_1 を求めよ．また，この時刻での v_y，x，y をそれぞれ求めよ．

(3)　小物体が y 軸をまたぐ時刻 t_2 を求めよ．また，この時刻での v_x，v_y，y をそれぞれ求めよ．



【メモ】

成分分解を要する等加速度運動.

【解答】

(1)　初期条件から,

$$v_x(t) = -v_0 + at\,,\quad v_y(t) = at\,,\quad x(t) = -v_0 t + \frac{1}{2}at^2\,,\quad y(t) = \frac{1}{2}at^2\,.$$

(2)　$v_x = 0$ を満たす時刻は $t = \dfrac{v_0}{a}$．よって,

$$v_y = v_0\,,\quad x = -\frac{{v_0}^2}{2a}\,,\quad y = \frac{{v_0}^2}{2a}\,.$$

(3)　$x = 0$ を満たす時刻は $t = \dfrac{2v_0}{a}$．よって,

$$v_x = v_0\,,\quad v_y = 2v_0\,,\quad y = \frac{2{v_0}^2}{a}\,.$$

11. 加速度が時刻 t に比例する運動

x 軸上を動く物体について，その位置を x，速度を v，加速度を a と記し，それらは全て時刻 t の関数であるとする．時刻 t における物体の位置は $x(t) = -\alpha t^3 + \beta t^2$（$\alpha$，$\beta$ は正の定数）で与えられる．$t > 0$ の運動について考える．

(1)　v，a を，それぞれ時刻 t の関数として表せ．

(2)　物体が x 軸正の方向へ原点から最も遠ざかる時刻を $t = t_1$，そのときの位置を $x = x_1$ とする．t_1，x_1 を求めよ．なお，物体の運動が折り返すとき，常に $v = 0$ を満たすことは説明なしに用いてよい．

(3)　物体が初めて $x = 0$ の位置に戻る時刻を $t = t_2$，そのときの速度を $v = v_2$ とする．t_2，v_2 を求めよ．

【メモ】

当然，等加速度運動の公式は使えないのでそこだけ注意．

【解答】

(1)　位置の時間変化率を考えて[*11]，

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\{-\alpha(t+\Delta t)^3 + \beta(t+\Delta t)^2\} - \{-\alpha t^3 + \beta t^2\}}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-3\alpha t^2 \Delta t + 3\alpha t(\Delta t)^2 + \alpha(\Delta t)^3 + 2\beta t \Delta t + \beta(\Delta t)^2}{\Delta t} \\
&= -3\alpha t^2 + 2\beta t\,.
\end{aligned}
$$

同様の計算手順を踏んで，

$$
a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = -6\alpha t + 2\beta\,.
$$

(2)　$v = 0$ を満たす時刻を求めて，

$$
-3\alpha t^2 + 2\beta t = 0\,, \qquad \therefore t_1 = \frac{2}{3}\frac{\beta}{\alpha}\,(>0)\,, \quad x_1 = -\alpha\left(\frac{2}{3}\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 + \beta\left(\frac{2}{3}\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = \frac{4}{27}\frac{\beta^3}{\alpha^2}\,.
$$

(3)　$x = 0$ を満たす時刻を求めて，

$$
-\alpha t^3 + \beta t^2 = 0\,, \qquad \therefore t_2 = \frac{\beta}{\alpha}\,(>0)\,, \quad v_2 = -3\alpha\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + 2\beta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = -\frac{\beta^2}{\alpha}\,.
$$

[*11] 以下の微分公式を知っていれば，公式を使うだけ（n は整数）．

$$
\frac{d}{dt}(t^n) = nt^{n-1}\,.
$$

§1.2 運動の法則と力

第 2 章では，運動方程式を直接解く練習を行う．高校範囲で運動方程式が解けるようなケースは①等加速度運動，②単振動，③速度に比例する空気抵抗型の運動の 3 パターンに分類されるが，数学の授業進度の都合上，この章では①のみを扱う．なお，運動方程式は通常「既知の力から加速度を求め，位置を決定する式」という位置付けだが，力の公式が存在せず，その詳細が不明な力もある（拘束力）．このような場合，必ず運動方程式だけでは式が不足し，拘束力に対応した束縛条件（拘束条件）を考える必要がある．

■簡単なまとめ

- 運動方程式：

$$ma = \text{（受けている力の合計）}$$

　斜めの場合，成分分解して成分ごとに考える．

- 公式のある力：
  - ❶ 地表付近の重力 $f = mg$（g：重力加速度の大きさ）
  - ❷ 弾性力 $|f| = ks$（k：ばね定数，s：ばねの伸縮）
  - ❸ 動摩擦 $f = \mu' N$（μ'：動摩擦係数，N：垂直抗力の大きさ）
- 公式のない力（拘束力）．公式のない力には必ず束縛条件が伴う：
  - ❶ 垂直抗力 N　→　面が変形しない
  - ❷ 張力 T　→　糸の長さが一定
  - ❸ 静止摩擦力 R　→　物体と接面の間の相対速度がゼロ（自明なので覚えなくてよい）

　なお，上記 3 つの全ての力の上限が存在するが，高校では静止摩擦力の上限だけを扱い，滑らない条件として暗記する．

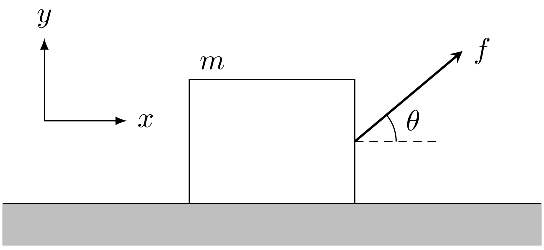
$$\text{滑らない条件：}|R| < \mu N\ (\mu\text{: 静止摩擦係数})$$

- 流体から受ける力：

$$\begin{cases} \text{静止流体の圧力：} P(z) = P(0) + \rho g z\ (z\text{：液面からの深さ}, \rho\text{: 流体の密度}) \\ \text{浮力：（浮力の大きさ）} = \begin{pmatrix} \text{周囲の流体から} \\ \text{受ける力の合計} \end{pmatrix} = \rho\text{(押し退けた液体の体積)}\, g \end{cases}$$

1. 運動方程式①

図のように，水平麦向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．物体（質量 m）に大きさ f の力を x 軸から反時計回りに角度 θ だけ傾けた方向に加えた．物体の水平方向の運動方程式を立式し，物体に生じる加速度 a を求めよ．



【解答】

運動方程式より，

$$ma = f\cos\theta\,, \qquad \therefore a = \frac{f}{m}\cos\theta\,.$$

また，物体が床から受ける垂直抗力の大きさを N とすれば，y 方向の加速度が 0 であることより，

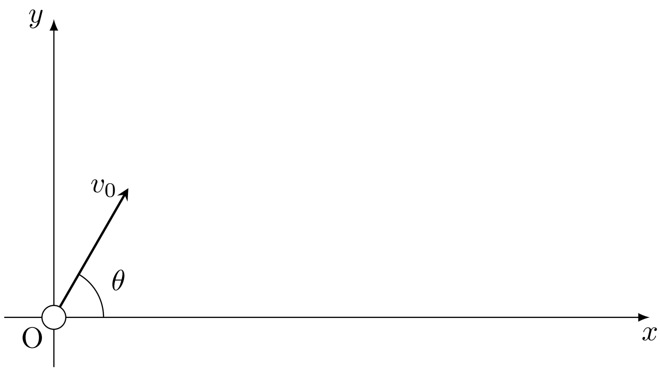
$$m \cdot 0 = N + f\sin\theta - mg\,, \qquad \therefore N = mg - f\sin\theta$$

を得る．

➠https://koremura.net/

2. 地表付近の重力①

図のように，水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．小物体（質量 m）を原点から初速度 v_0 で角度 θ の方向に投射した．小物体の質量を m，x 方向の加速度を a_x，y 方向の加速度を a_y とする．小物体の運動方程式を立式し，a_x，a_y を求めよ．



【解答】

運動方程式より[*12]，

$$\begin{cases} ma_x = 0\,, \\ ma_y = -mg\,, \end{cases} \qquad \therefore a_x = \utilde{0}\,,\quad a_y = \utilde{-g}\,.$$

[*12] 空気の影響を考えなければ，v_0 や θ には依らない．

3. 地表付近の重力②

十分高い位置から，質量 m の物体を静かに放した．重力加速度の大きさを g とする．以下の設問に答えよ．

I　空気抵抗を考えない．鉛直上向きを正とする．

(1)　物体にはたらく力を図示せよ．

(2)　物体の加速度を a とする．運動方程式を解き，a を求めよ．

II　物体の速度 v に比例した空気抵抗を考える．空気抵抗の比例定数を k とし，鉛直下向きを正とする．

(1)　物体にはたらく力を図示せよ．

(2)　物体の加速度を a とする．運動方程式を解き，a を k，v，m，g を用いて表せ．

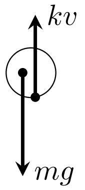
【解答】

I (1)　略（下の図から空気抵抗を除けばよい）．

(2)　運動方程式より，

$$ma = -mg\,, \qquad \therefore a = -g\,.$$

II (1)　空気抵抗は速度（運動方向）と逆向きに生じることに留意する（以下図）．



(2)　運動方程式より，

$$ma = -kv + mg\,, \qquad \therefore a = -\frac{k}{m}\left(v - \frac{mg}{k}\right).$$

4. フック則の利用

質量の無視できるばねの一端を天井に取り付け，他端におもりを取り付けつり下げる．質量 m のおもりを取り付けたとき，ばねの長さは L となり，質量 $3m$ のおもりを取り付けたとき，ばねの長さは $2L$ となった．重力加速度の大きさを g とする．ばねのばね定数 k，自然長 ℓ を，それぞれ m，L，g のうち必要なものを用いて表せ．

【解答】

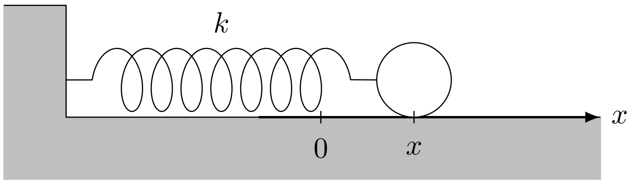
力の正の向きを鉛直上向きとして，つりあいの式より[*13]，

$$\begin{cases} 0 = k(L-\ell) - mg\,, \\ 0 = k(2L-\ell) - 3mg\,, \end{cases} \qquad \therefore k = \frac{2mg}{L}\,, \quad \ell = \frac{L}{2}\,.$$

[*13] 2 式の差を取って k を求め，その値をどちらかの式に代入するのが楽．

5. 一般の位置におけるフック則の符号の確認

ばね（ばね定数 k）の一端を固定された壁に取り付け，他端を小物体につなぐ（図参照）．水平右向きに x 軸を定め，その原点をばねが自然長のときの物体の位置に取る．このとき，位置 x にある小物体がばねから受ける弾性力が，向きを考慮して $f = -kx$ と与えられることを，(i) ばねが伸びているとき，(ii) ばねが縮んでいるとき，と場合分けをして確認せよ．



【解答】

ばねが伸びているとき，$x > 0$ で弾性力の大きさは $k|x|$，向きは x 負の向きゆえ[*14]，

$$f = -k|x| = -kx\,.$$

ばねが縮んでいるとき，$x < 0$ で弾性力の大きさは $k|x|$，向きは x 正の向きゆえ[*15]，

$$f = k|x| = -kx\,.$$

[*14] この符号の「マイナス」が向きを表す．大きさだけであればマイナスは不要．
[*15] 絶対値の中身が負の場合，絶対値を外すとき，-1 をかけてはずすことに注意．

6. 直列ばね

ばね 1（ばね定数 k_1，質量無視）の一端を天井に取り付け，その他端にはばね 2（ばね定数 k_2，質量無視）を接続する．ばね 2 の他端を大きさ f の力をばねが伸びる方向に加えた．重力加速度の大きさを g とする．

(1)　おもりと接続点，それぞれの力のつりあいの式を立式せよ．なお，ばね 1 の伸びを x_1，ばね 2 の伸びを x_2 とする．

(2)　2 つのばねをばね定数 k の 1 つのばねと見なす．おもりの力のつりあいの式を，k を含む式で立式せよ．

(3)　(1)，(2) より，k が k_1，k_2 と以下の関係で結ばれることを示せ．

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

(4)　ばね定数 k_1，$\cdots$，k_n の n 個のばねを直列[*16]に接続する．(1) の結果を利用して，これらのばねを 1 つと見なしたときのばね定数 k が以下の関係式を満たすことを確認せよ．

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}$$

[*16] j 番目のばねは $j-1$ 番目のばねと $j+1$ 番目のばねに接続され，1 番目と n 番目のばねに関してはその他端は何かが接続できるよう自由になっている．

【解答】

(1)　つりあいの式は，力の正の向きを鉛直上向きとして，

$$\begin{cases} \text{接続点}: \underset{\sim\sim\sim}{0 = k_1 x_1 - k_2 x_2}\,, \\ \text{ばね } 2: \underset{\sim\sim\sim}{0 = k_2 x_2 - f}\,. \end{cases}$$

(2)

$$\text{全体}: \underset{\sim\sim\sim}{0 = k(x_1 + x_2) - f}\,.$$

(3)　$x_1 = f/k_1$，$x_2 = f/k_2$ より，

$$\underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}\,.$$

(4)　同様にして，ばね 1 とばね 2 の接続点を接続点 1，ばね 2 とばね 3 の接続点を接続点 2 のように取る（ばね j とばね $j+1$ の接続点は接続点 j）．このとき，それぞれのつりあいの式は

$$\begin{cases} \text{接続点 } 1: 0 = k_1 x_1 - k_2 x_2\,, \\ \text{接続点 } 2: 0 = k_2 x_2 - k_3 x_3\,, \\ \qquad \vdots \\ \text{接続点 } n-1: 0 = k_{n-1} x_{n-1} - k_n x_n\,, \\ \text{ばね } n: 0 = k_n x_n - f\,. \end{cases}$$

これらのばねを 1 つのばねと見なしたばね定数を k とし，全体のばねの伸び x が $x = x_1 + \cdots x_n$ であることを用いれば

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}$$

を得る[*17]．

[*17] 勿論，(3) の結果を繰り返し利用しても同じ結果を得る．

7. 並列ばね

ばね 1（ばね定数 k_1，質量無視）の一端を天井に取り付け，ばね 1 と隣り合うようにばね 2（ばね定数 k_2，質量無視）を取り付ける．両ばねの自然長は等しいものとし，ばねの自由な側には棒が取り付けられ，棒（質量，変形ともに無視）を引くことで両のばねが等しく伸びるようになっている．水平を保ったまま棒に大きさ f を加え，ばねを x だけ伸ばした．重力加速度の大きさを g とする．

(1)　棒の力のつりあいの式を立式せよ．

(2)　2 つのばねをばね定数 k の 1 つのばねと見なす．k が k_1，k_2 と以下の関係で結ばれることを示せ．

$$k = k_1 + k_2$$

(3)　ばね定数 k_1，$\cdots$，k_n の n 個のばねを並列[*18]に接続する．(1) の結果を利用して，これらのばねを 1 つと見なしたときのばね定数 k が以下の関係式を満たすことを確認せよ．

$$k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$$

[*18] ばねの両側の接続点を同一のものに接続できるように並べる．

【解答】

(1)　つりあいの式は，力の正の向きを鉛直上向きとして，

$$\underset{\sim\sim\sim}{0 = k_1 x + k_2 x - f}$$

(2)　全体のつりあいの式は，

$$全体 : 0 = kx - f\,.$$

両式を比較して，

$$\underset{\sim\sim\sim}{k = k_1 + k_2}\,.$$

(3)　同様にして，

$$0 = k_1 x + k_2 x + \cdots + k_n x - f$$

これらのばねを 1 つのばねと見なしたばね定数を k とすれば，

$$k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$$

を得る[*19]．

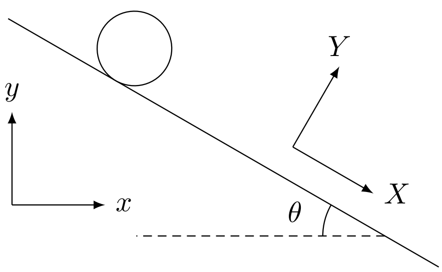
*19 勿論，(2) の結果を繰り返し利用しても同じ結果を得る．

8. 運動方程式④，垂直抗力，成分分解の仕方

滑らかな斜面上（傾斜角 θ）に，小物体（質量 m）を静かに置くと，小物体は斜面上を滑り始めた．重力加速度の大きさを g とする．小物体の加速度を a，小物体が斜面から受ける垂直抗力の大きさを N とする．

(1)　小物体の運動方程式を，斜面に平行下向き（X 方向）と垂直上向き（Y 方向）に分解して立てることにより，a，N を求めよ．

(2)　小物体の運動方程式を，水平右向き（x 方向）と鉛直上向き（y 方向）に分解して立てることにより，a，N を求めよ．



【解答】

(1)　運動方程式より[*20]，

$$\begin{cases} ma = mg\sin\theta\,, \\ m\cdot 0 = N - mg\cos\theta\,, \end{cases} \qquad \therefore a = g\sin\theta\,,\quad N = mg\cos\theta\,.$$

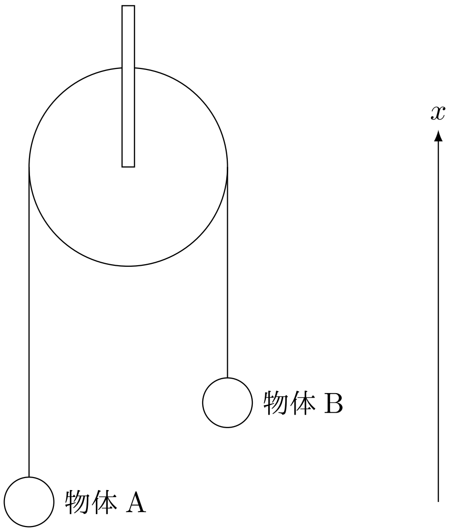
(2)　運動方程式より，

$$\begin{cases} ma\cos\theta = N\sin\theta\,, \\ m(-a\sin\theta) = N\cos\theta - mg\,, \end{cases} \qquad \therefore a = g\sin\theta\,,\quad N = mg\cos\theta\,.$$

*20 面が変形しないことにより，物体の加速度の Y 方向成分は 0 である（詳しくは後述）．

9. 運動方程式⑤，糸の張力

物体 A（質量 m）と物体 B（質量 $2m$）を糸（質量，伸縮無視）で繋ぎ，固定された滑車にかけた．糸と滑車の間には摩擦はなく，滑車の回転は考えないものとする．鉛直上向きに x 軸を定め，重力加速度の大きさを g とする．物体 A の加速度を a，糸の張力の大きさを T とし，運動方程式から a，T を求めよ．



【解答】

運動方程式より[*21]，

$$\begin{cases} ma = T - mg\,, \\ 2m(-a) = T - 2mg\,, \end{cases} \qquad \therefore a = \frac{1}{3}g\,,\quad T = \frac{4}{3}mg\,.$$

*21 糸が伸縮しないことから，B の加速度は A と大きさが等しく逆向きである（詳しくは後述）．

10. 運動方程式と束縛条件①（糸，面）

図のように，質量 m_1，m_2，m_3 の物体 A，B，C を糸（質量と伸縮を無視）で繋いだ．物体 A，B を繋ぐ糸を糸 1，物体 B，C を繋ぐ糸を糸 2 とする．一切の摩擦を無視する．水平右向きに x 軸を定める．

I　物体 C に x 軸正方向に大きさ F の力を加えた．このとき，それぞれの糸がピンと張り，物体 A，B，C は等しい加速度 a で x 軸正方向に動き出した．糸 1 に生じている張力の大きさを T，糸 2 に生じている張力の大きさを S とする．

(1)　各物体にはたらく力を図示し，各物体について運動方程式の x 成分を立式せよ．

(2)　運動方程式を解き，a，T，S をそれぞれ求めよ．

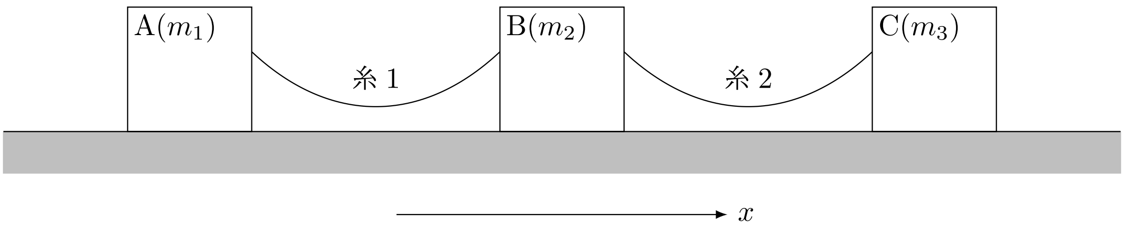
(3)　糸の長さが一定であるという拘束条件を考え，3 物体の加速度が等しいことを確認せよ．

II　物体 A に x 軸正方向に大きさ F の力を加えた．このとき，物体 A が B を押し，物体 B が C を押すことで，物体 A，B，C は等しい加速度 b で x 軸正方向に動き出した．物体 A，B の間で生じている垂直抗力の大きさを N，物体 B，C の間で生じている垂直抗力の大きさを R とする．面の接触には糸は影響しないものとし，弛んだ糸が運動に及ぼす影響はないものとする．

(1)　各物体にはたらく力を図示し，各物体について運動方程式の x 成分を立式せよ．

(2)　運動方程式を解き，b，N，R をそれぞれ求めよ．

(3)　面が変形しないという拘束条件を考え，3 物体の加速度が等しいことを確認せよ．


A(m_1)
B(m_2)
C(m_3)
糸 1
糸 2
x

【メモ】

授業では 2 物体の場合を扱っている（はずである）．張力と垂直抗力は未知量なので，本来であれば運動方程式だけでは式が不足する．そこで，束縛条件（糸の長さが一定の条件，面が変形しない条件）を考える．この問題では，はじめ加速度が等しいことを暗黙裡に用い，最後に確認させる形式とした．後に続く問題では始めから束縛条件を考えるよう設問を作成してある．

【解答】

I (1)　各物体の運動方程式は以下の通りである．

$$\begin{cases} \text{物体 A}: m_1 a = T\,, \\ \text{物体 B}: m_2 a = S - T\,, \\ \text{物体 C}: m_3 a = F - S\,. \end{cases}$$

(2)　運動方程式の 3 式の和を取って，

$$(m_1 + m_2 + m_3)a = F\,, \qquad \therefore a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3}\,.$$

これを運動方程式に代入すれば，

$$T = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3}F\,, \quad S = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3}F\,.$$

(3)　物体 A，B の糸 1 の接触点をそれぞれ x_1，x_2 とすると，糸 1 の長さ ℓ_1 は，

$$x_2 - x_1 = \ell_1$$

と表される．この式の時間の 2 階微分（時間変化を 2 回取ること）を考えて，

$$a_2 - a_1 = 0\,.$$

同様に，物体 B，C の糸の接触点をそれぞれ x_2，x_3 とすると[*22]，糸 2 の長さ ℓ_2 は，

$$x_3 - x_2 = \ell_2$$

と表される．この式の時間の 2 階微分（時間変化を 2 回取ること）を考えて，

$$a_3 - a_2 = 0\,.$$

以上より，

$$a_1 = a_2 = a_3\,.$$

[*22] 実際は物体 B の糸 2 の接触点は，$x_2 +$（物体 B の幅）となるが，物体 B の幅が一定であるため時間変化を取ればその影響は無視できる．

II (1)　各物体の運動方程式は以下の通りである．

$$\begin{cases} \text{物体 A}: \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{m_1 b = F - N}\,, \\ \text{物体 B}: \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{m_2 b = N - R}\,, \\ \text{物体 C}: \underset{\sim\sim\sim}{m_3 b = R}\,. \end{cases}$$

(2)　運動方程式の 3 式の和を取って，

$$(m_1 + m_2 + m_3)a = F\,, \qquad \therefore a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3}\,.$$

これを運動方程式に代入すれば，

$$R = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}F\,, \quad S = \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3}F\,.$$

(3)　物体 A，B の右面の位置をそれぞれ x_1，x_2 とすると，物体 B の幅 d_2 が一定なことから，

$$x_1 + d_2 = x_2$$

を満たす．この式の時間の 2 階微分（時間変化を 2 回取ること）を考えて，

$$a_1 = a_2\,.$$

同様に，物体 C の右面の位置を x_3 とすると，物体 C の幅 d_3 が一定なことから，

$$x_2 + d_3 = x_3$$

を満たし，この式の時間の 2 階微分（時間変化を 2 回取ること）を考えて，

$$a_2 = a_3\,.$$

以上より，

$$a_1 = a_2 = a_3\,.$$

11. 運動方程式と束縛条件②（静止摩擦）

図のように，物体 B（M）の上に物体 A（質量 m）を置いた．物体間の静止摩擦係数を μ とし，物体間摩擦以外の摩擦を無視する．重力加速度の大きさを g とし，水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．

I　物体 B に x 軸正方向の外力 F を加えた場合を考える．このとき，物体間に滑りは生じていないものとし，2 物体の加速度は等しく a，物体間の静止摩擦力の大きさを R とする．

(1)　各物体にはたらく力を図示し，各物体について運動方程式の x 成分を立式せよ．

(2)　運動方程式を解き，a，R をそれぞれ求めよ．

(3)　滑りが生じないための F の範囲を求めよ．

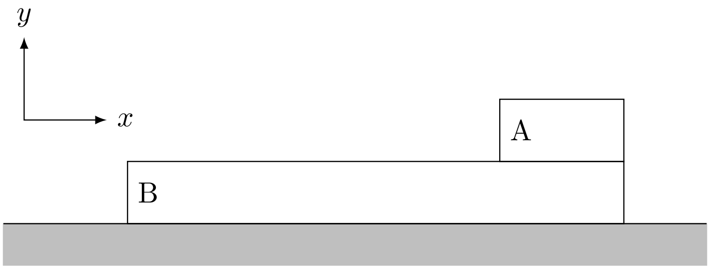
(4)　解答に示した物体間に滑りが生じないことから 2 物体の加速度が等しいことの説明を読み，理解せよ．

II　物体 A に x 軸正方向の外力 F を加えた場合を考える．このとき，物体間に滑りは生じていないものとし，2 物体の加速度は等しく b，物体間の静止摩擦力の大きさを R とする．

(1)　各物体にはたらく力を図示し，各物体について運動方程式の x 成分を立式せよ．

(2)　運動方程式を解き，b，R をそれぞれ求めよ．

(3)　滑りが生じないための F の範囲を求めよ．


y
x
A
B

【メモ】

静止摩擦力は未知量なので，本来であれば運動方程式だけでは式が不足する．そこで，束縛条件（面に滑りが生じていない条件）を考える．この問題では，はじめ加速度が等しいことを暗黙裡に用い，最後に確認させる形式とした．静止摩擦力に関しては，未知量で置くということさえ意識できれば（束縛条件を意識しなくても）よい．

【解答】

I (1)　各物体の運動方程式は以下の通りである．

$$\begin{cases} \text{物体 A}: \underline{ma = R}, \\ \text{物体 B}: \underline{Ma = F - R}. \end{cases}$$

(2)　運動方程式の和を取るなどして，

$$a = \underline{\frac{F}{M+m}}, \quad R = \underline{\frac{m}{M+m}F}.$$

(3)　滑らない条件 $R < \mu N$ を考えて，

$$\frac{m}{M+m}F < \mu mg, \qquad \therefore \underline{F < \mu(M+m)g}.$$

(4)　面に滑りが生じていないということは，2 物体の速度が等しいことを指す．これは物体 A の速度を v，物体 B の速度を V とすると，

$$v = V$$

を満たすということで，この式の時間微分（時間変化を取ること）を考えて，

$$a = A$$

となり，加速度が等しくなることを確認できる．

II (1)　各物体の運動方程式は以下の通りである．

$$\begin{cases} \text{物体 A}: \underline{mb = F - R}, \\ \text{物体 B}: \underline{Mb = R}. \end{cases}$$

(2)　運動方程式の和を取るなどして，

$$a = \underline{\frac{F}{M+m}}, \quad R = \underline{\frac{M}{M+m}F}.$$

(3)　滑らない条件 $R < \mu N$ を考えて，

$$\frac{M}{M+m}F < \mu mg\,, \qquad \therefore\ \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{F < \left(1+\frac{m}{M}\right)\mu mg}\,.$$

12. 摩擦の整理

図のように，物体 A（質量 m）を物体 B（質量 $2m$，幅 ℓ）の端に置く．物体 A と B の間には摩擦が働き，物体 B と床の間の摩擦は無視できる．水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．重力加速度の大きさを g とする．

I　物体 B に x 正方向に大きさ F の力を加えたところ，両物体は一体となって運動をした．物体 A，B 間の静止摩擦係数を $\dfrac{1}{2}$ とする．

(1)　物体 A，B の加速度を a，静止摩擦力の大きさを R とする．物体 A，B の運動方程式を解き，a，R を m，F のうちから必要なものを用いて表せ．

(2)　F をある値 F_{c} より大きくすると，物体 A は物体 B 上をすべり出す．F_{c} を求めよ．

II　物体 B に x 正方向に大きさ $F\,(> F_{\mathrm{c}})$ の力を加えたところ，物体 A は物体 B 上をすべった．物体 A，B 間の動摩擦係数を μ' とする．

(1)　物体 A，B の加速度をそれぞれ a_{A}，a_{B} とする．a_{A}，a_{B} を m，μ'，g，F のうちから必要なものを用いて表せ．

(2)　物体 A の位置 x_{A}，および物体 B の位置 x_{B} をそれぞれ時刻 t の関数として求めよ．

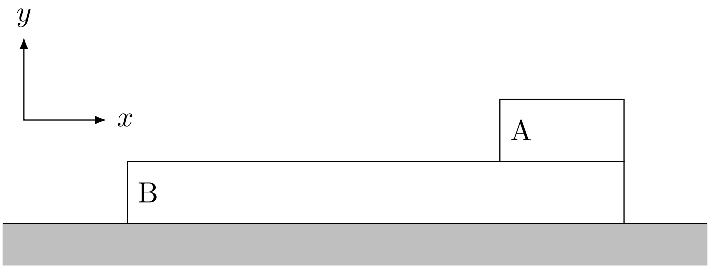
(3)　物体 A が物体 B 上を ℓ だけすべったとき，物体 A は物体 B 上から落下した．このときの時刻 t を求めよ．

III　物体 B に x 正方向に大きさ V の初速度を与えたところ，物体 A は物体 B 上をすべり，物体 B 上のある位置で物体 B に対して静止した．物体 A，B 間の動摩擦係数を μ' とする．

(1)　物体 A，B の加速度をそれぞれ a_{A}，a_{B} とする．a_{A}，a_{B} を m，μ'，g のうちから必要なものを用いて表せ．

(2)　物体 A の速度 v_{A}，および物体 B の速度 v_{B} をそれぞれ時刻 t の関数として求めよ．

(3)　物体 A が物体 B に対して静止した時刻 t を求めよ．


y
x
A
B

【メモ】

摩擦の取り扱いの確認．また，等加速度運動の公式の確認，および相対運動についての言及．

【解答】

I (1)　運動方程式より，

$$\begin{cases} x: ma = R\,, \\ y: m\cdot 0 = N - mg\,, \\ x: 2ma = F - R\,. \end{cases} \qquad \therefore a = \frac{F}{3m}\,,\quad R = \frac{1}{3}F\,,\quad N = mg\,.$$

(2)　$|R| < \mu N$ を満たすとき，物体 A は物体 B 上をすべらず，

$$\frac{1}{3}F < \frac{1}{2}mg\,, \qquad \therefore F_{\mathrm{c}} = \frac{3}{2}mg\,.$$

II (1)　運動方程式より，

$$\begin{cases} x: ma_{\mathrm{A}} = \mu' N\,, \\ y: m\cdot 0 = N - mg\,, \\ x: 2ma_{\mathrm{B}} = F - \mu' N\,. \end{cases} \qquad \therefore a_{\mathrm{A}} = \mu' g\,,\quad a_{\mathrm{B}} = \frac{F}{2m} - \frac{1}{2}\mu' g\,,\quad N = mg\,.$$

(2)　加速度一定より，$x_{\mathrm{A}}(0) = x_{\mathrm{B}}(0) = 0$ と取って[*23]，

$$\begin{cases} x_{\mathrm{A}}(t) = \dfrac{1}{2}\mu' g t^2\,, \\ x_{\mathrm{B}}(t) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{F}{m} - \mu' g\right)t^2\,. \end{cases}$$

$x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} = \ell$ を解いて，

$$\frac{1}{4}\left(\frac{F}{m} - \mu' g\right)t^2 - \frac{1}{2}\mu' g t^2 = \ell\,, \qquad \therefore t = 2\sqrt{\frac{m\ell}{F - 3\mu' mg}}\,.$$

III (1)　運動方程式より，

$$\begin{cases} x: ma_{\mathrm{A}} = \mu' N\,, \\ y: m\cdot 0 = N - mg\,, \\ x: 2ma_{\mathrm{B}} = -\mu' N\,. \end{cases} \qquad \therefore a_{\mathrm{A}} = \mu' g\,,\quad a_{\mathrm{B}} = -\frac{1}{2}\mu' g\,,\quad N = mg\,.$$

[*23] 等加速度運動をする物体の位置 x は以下のように与えられる：

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2\,.$$

(2)　加速度一定より，$x_{\mathrm{A}}(0)=x_{\mathrm{B}}(0)=0$ と取って[*24]，

$$\begin{cases} v_{\mathrm{A}}(t)=\mu' g t\,, \\ v_{\mathrm{B}}(t)=V-\dfrac{1}{2}\mu' g t\,. \end{cases}$$

$v_{\mathrm{B}}-v_{\mathrm{A}}=0$ を解いて，

$$V-\frac{1}{2}\mu' g t-\mu' g t=0\,, \qquad \therefore t=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{2V}{3\mu' g}}\,.$$

なお，それぞれの物体の位置 x は，

$$\begin{cases} x_{\mathrm{A}}(t)=\dfrac{1}{2}\mu' g t^2\,, \\ x_{\mathrm{B}}(t)=Vt-\dfrac{1}{4}\mu' g t^2\,, \end{cases}$$

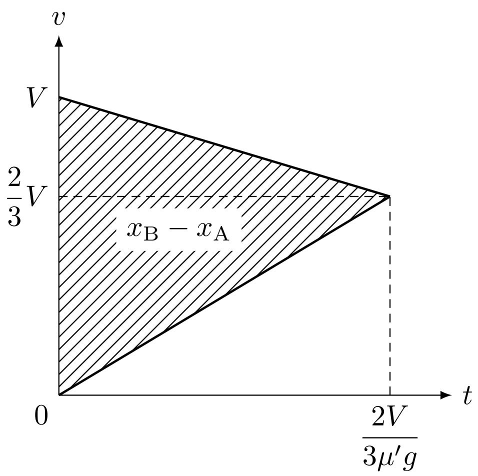
であり，$t=\dfrac{2V}{3\mu' g}$ での A に対する B（A から見た B）の相対位置 $x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}$ は，

$$x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}=\frac{V^2}{3\mu' g}-\frac{1}{4}\mu' g\left(\frac{2V}{3\mu' g}\right)^2-\frac{1}{2}\mu' g\left(\frac{2V}{3\mu' g}\right)^2=\frac{V^2}{3\mu' g}$$

となり，物体 A が物体 B から落下しないためには，$\ell>\dfrac{V^2}{3\mu' g}$ を満たすようにする必要がある．

【別解】$\boldsymbol{v-t}$ グラフを使用[*25]

設問 III における物体 A，B の $v-t$ グラフは次の通りである．



[*24] 等加速度運動をする物体の速度 v は以下のように与えられる：

$$v(t)=v(0)+at\,.$$

[*25] 等加速度運動の解析は $v-t$ グラフを（積極的に）使いと良い．

13. 摩擦の向きが変わる

図のように，粗い斜面（傾斜角 θ）にある物体（質量 m）に，斜面に沿って斜面上向きの初速度 v_0 を与えた．この時刻を $t=0$ とする．物体は，斜面をすべりあがった後，ある位置で折り返し，斜面下向きに滑り始めた．斜面上向きに x 軸を定め，その原点を $t=0$ における物体の位置に定める．斜面と物体の間の静止摩擦係数を μ_0，動摩擦係数を μ，重力加速度の大きさを g とする．

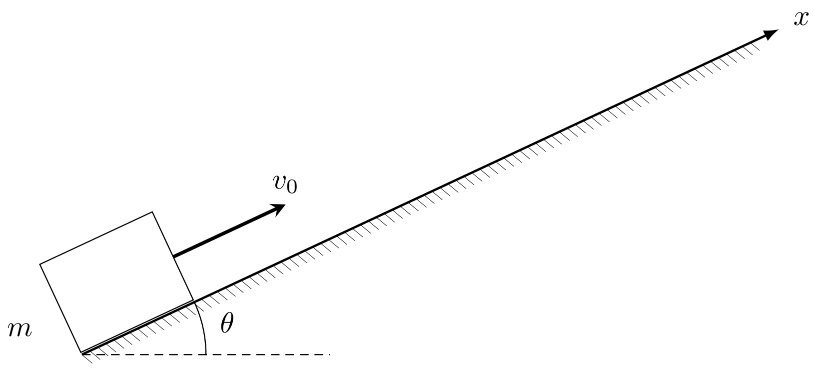
(1)　物体が上昇している間を考える．物体が位置 x にあるときの物体の加速度を a とする．a を求めよ．

(2)　物体が上昇している間の物体の位置 x，および速度 v を，ぞれぞれ時刻 t の関数として表せ．

(3)　物体が最高点で折り返した後，斜面下方向に滑り始めるための $\tan\theta$ の条件を求めよ．

(4)　物体が折り返す時刻 t_0，および折り返す位置 x_0 をそれぞれ求めよ．

(5)　物体が再び $x=0$ を通過する瞬間の物体の速度 v を求めよ．このとき，斜面を上昇する間と下降する間で物体の加速度が異なることに注意せよ．



【解答】

(1)　運動方程式より，

$$ma = -mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta\,, \qquad \therefore a = \underline{-g(\sin\theta + \mu\cos\theta)}\,.$$

(2)　加速度一定ゆえ，

$$\begin{cases} x = \underline{v_0 t - \dfrac{1}{2}g(\sin\theta + \mu\cos\theta)t^2}\,, \\ v = \underline{v_0 - g(\sin\theta + \mu\cos\theta)t}\,. \end{cases}$$

(3)　静止しているときを考えて，はたらく静止摩擦力を x 軸正の向きに R とすると[*26]，

$$0 = -mg\sin\theta + R\,, \qquad \therefore R = mg\sin\theta\,.$$

よって，滑らない条件の対偶を考えて，

$$R \geq \mu_0 N = \mu_0 mg\cos\theta\,, \qquad \therefore \underline{\tan\theta \geq \mu_0}\,.$$

(4)　$v = 0$ を解いて，

$$t_0 = \underline{\frac{v_0}{g(\sin\theta + \mu\cos\theta)}}\,, \qquad \therefore x_0 = \underline{\frac{{v_0}^2}{2g(\sin\theta + \mu\cos\theta)}}\,.$$

(5)　物体が斜面を下るときの加速度は，動摩擦力の向きが変わることに注意して，このときの速度 v は，

$$ma = -mg\sin\theta + \mu mg\cos\theta\,, \qquad \therefore a = -g(\sin\theta - \mu\cos\theta)\,.$$

折り返した時刻を再度 $t = 0$ と取れば，

$$\begin{cases} x = x_0 - \dfrac{1}{2}g(\sin\theta - \mu\cos\theta)t^2\,, \\ v = -g(\sin\theta - \mu\cos\theta)t\,. \end{cases}$$

よって，$x = 0$ を解いて[*27]，

$$t = \sqrt{\frac{2x_0}{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)}}\,, \qquad \therefore v = -\sqrt{2g(\sin\theta - \mu\cos\theta)x_0} = \underline{-v_0\sqrt{\frac{\tan\theta - \mu}{\tan\theta + \mu}}}\,.$$

[*26] 静止摩擦については，向きを逆においても，運動方程式（今はつりあい）を解くことで R が求まり，その符号から自分の置いた向きが正しいかどうかを判断できる．

[*27] v の最後の等号で $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を利用．

14. 糸に関する束縛条件の計算ドリル

水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．以下の各装置において，糸の長さが一定なことによって物体間の加速度の間に成り立つの関係式を求めよ．

(1)　図 1 のように繋がれた 2 物体について，滑車を固定しているときの A の加速度を a，B の加速度を b とする．

(2)　図 1 のように繋がれた 2 物体について，A の加速度を a，B の加速度を b，滑車の加速度を c とする．

(3)　図 2 のように繋がれた 2 物体について，A の x 方向の加速度を a，B の y 方向の加速度を b とする．

(4)　図 3 のように繋がれた 3 物体について，A の加速度を a，B の加速度を b とし，C の加速度を c とする．

(5)　図 4 のように繋がれた 2 物体について，A の加速度を a，B の加速度を b とする．糸が複数ある場合，各糸に対して糸の長さが一定の条件を立式しなければならないことに注意せよ．

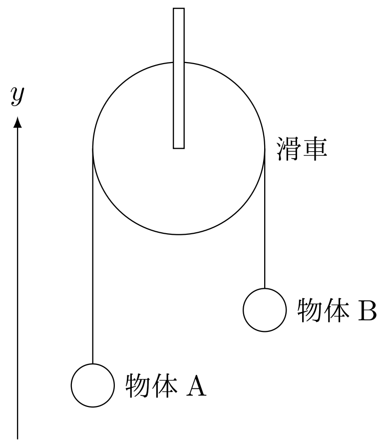


図 1

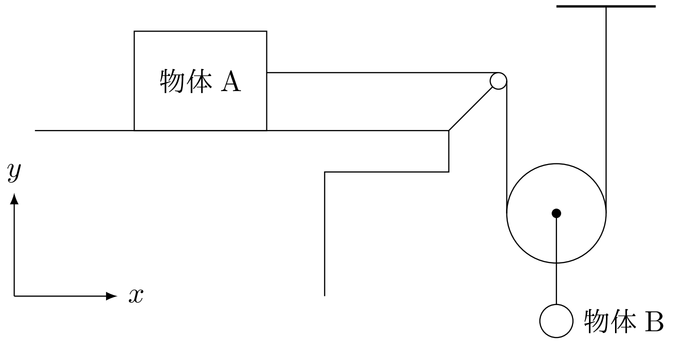


図 2

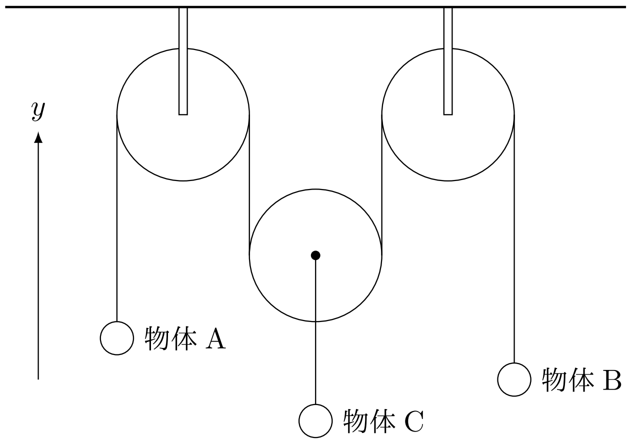


図 3

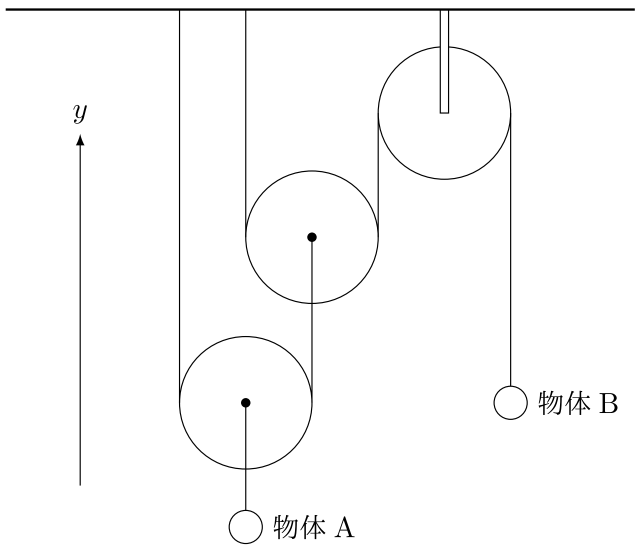


図 4

【メモ】

以下では，物体 A，B，C の位置をそれぞれ $(x_{\rm A}, y_{\rm A})$，$(x_{\rm B}, y_{\rm B})$，$(x_{\rm C}, y_{\rm C})$ とする．脚注でも言及しているが，糸の長さのうち，明らかに一定な部分（滑車の円弧の部分や，固定された位置から固定された位置までの長さ）は左辺に含めていない．

【解答】

(1)　滑車の位置を y とする．このとき，糸の長さは，

$$(y - y_{\rm A}) + (y - y_{\rm B}) = {\rm const}\,,$$

の関係を満たす．今，y が一定より t の 2 階微分を考えて，

$$(0 - a) + (0 - b) = 0\,, \qquad \therefore \underline{a + b = 0}\,.$$

(2)　前問の y が変化する場合を考えればよいので，t の 2 階微分を考えて，

$$(c - a) + (c - b) = 0\,, \qquad \therefore \underline{a + b = 2c}\,.$$

(3)　定滑車の位置を (x_0, y_0)（全て定数）とする．このとき，糸の長さは[*28][*29]，

$$(x_0 - x_{\rm A}) + (y_0 - y_{\rm B}) + (y_0 - y_{\rm B}) = {\rm const}\,,$$

の関係を満たし，t の 2 階微分を考えて，

$$(0 - a) + (0 - b) + (0 - b) = 0\,, \qquad \therefore \underline{a + 2b = 0}\,.$$

(4)　左右の滑車の位置を y_0（定数）とする．このとき，糸の長さは，

$$(y_0 - y_{\rm A}) + 2(y_0 - y_{\rm C}) + (y_0 - y_{\rm B}) = {\rm const}\,,$$

の関係を満たし，t の 2 階微分を考えて，

$$(0 - a) + 2(0 - c) + (0 - b) = 0\,, \qquad \therefore \underline{a + b + 2c = 0}\,.$$

(5)　物体 B に直接つながる糸を糸 1，A 側の糸を糸 2 とする．糸 2 がかかる動滑車の位置を y，定滑車の位置を y_0 とすると，それぞれの糸の長さは，

$$\begin{cases} \text{糸 1：} (y_0 - y_{\rm B}) + 2(y_0 - y) = {\rm const}\,, \\ \text{糸 2：} (y_0 - y_{\rm A}) + (y - y_{\rm A}) = {\rm const}\,, \end{cases}$$

[*28] 細かく言えば，滑車と物体 B を繋ぐ糸に関しても束縛条件を考える必要があるが，滑車の位置を y' とすると，$y' = y_{\rm B} + {\rm const}$ となり，ほとんど自明な束縛条件となるためここでは省略した．以降の設問でも同様に省略する．

[*29] 物体 B の繋がる動滑車の右側の糸は，本来は天井から滑車までが糸の長さだが，定滑車の位置と天井の位置は常に一定なので，定滑車の位置から動滑車の位置までと読んでも定数分のずれしかなく問題はない（V の糸 2 でも同様の議論がある）．

の関係を満たし，t の 2 階微分を考えて，$\ddot{y}=\dfrac{d^2y}{dt^2}$ すれば，

$$\begin{cases} \text{糸 }1:(0-b)+2(0-\ddot{y})=0\,, \\ \text{糸 }2:(0-a)+(\ddot{y}-a)=0\,, \end{cases} \qquad \therefore\ \underline{4a+b=0}\,.$$

15. 糸による束縛①

物体 A（質量 m）と物体 B（質量 M）を軽く伸び縮みしない糸で繋ぎ，滑車（質量 μ）にかけた．糸と滑車の間には摩擦はなく，滑車の回転は考えないものとする．鉛直上向きに x 軸を定める．重力加速度の大きさを g とする．

(1)　滑車に鉛直上向きに大きさ F_0 の力を加えたところ，滑車は静止したままであった．このとき，物体 A，B の運動について考える．

(1)　物体 A，B の加速度を鉛直上向きにそれぞれ a，b，糸の張力の大きさを T とする．物体 A，B の運動方程式をそれぞれ立式せよ．

(2)　糸が伸び縮みしないことから，a，b の間に成り立つ関係式を求めよ．

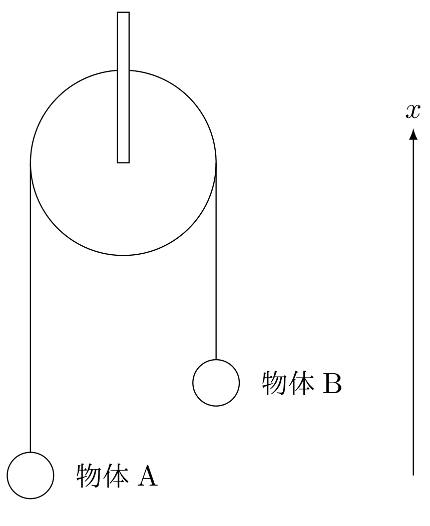
(3)　a，b，T，F_0 を求めよ．

(2)　滑車に鉛直上向きに大きさ $F\,(> F_0)$ の力を加え，一定の加速度で運動させた．このとき，物体 A，B の運動について考える．ここでは，$m_{\mathrm{A}} = m$，$m_{\mathrm{B}} = 3m$ とする．

(1)　物体 A，B の加速度を鉛直上向きにそれぞれ a，b，滑車の加速度を鉛直上向きに c，糸の張力の大きさを T とする．物体 A，B，滑車の運動方程式をそれぞれ立式せよ．

(2)　糸が伸び縮みしないことから，a，b，c の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3)　a，b，c，T を求めよ．



【メモ】

張力は未知量なので，運動方程式だけでは式が不足する．そこで，束縛条件（糸の長さが一定の条件）を考える．

【解答】

(1) (1)　各物体の運動方程式は以下の通りである．

$$\begin{cases} \text{物体 A}: \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{ma = T - mg}\,, \\ \text{物体 B}: \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{Mb = T - Mg}\,. \end{cases}$$

(2)　滑車の位置を X とする（ただし，今 X は定数）．糸の長さが一定なことより物体 A，B の位置は，

$$(X - x_{\mathrm{A}}) + (X - x_{\mathrm{B}}) = \mathrm{const}$$

の関係を満たす．この式の時間の 2 階微分（時間変化を 2 回取ること）を考えて

$$\underset{\sim\sim\sim\sim}{a + b = 0}\,.$$

(3)　束縛条件を使い，運動方程式を解いて，

$$a = \frac{M - m}{M + m}g\,,\quad b = -\frac{M - m}{M + m}g\,,\quad T = \frac{2Mm}{M + m}g\,.$$

また，滑車の運動方程式（加速度 0 なので力のつりあいの式と呼んでも良い）より，

$$\mu \cdot 0 = F_0 - 2T - \mu g\,,\qquad \therefore F_0 = \frac{4Mm}{M + m}g + \mu g\,.$$

(2) (1)　各物体の運動方程式は以下の通りである．

$$\begin{cases} \text{物体 A}: \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{ma = T - mg}\,, \\ \text{物体 B}: \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{3mb = T - 3mg}\,, \\ \text{滑車}: \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\mu c = F - 2T - \mu g}\,. \end{cases}$$

(2)　I(2) 同様にして，

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{2c - a - b = 0}\,.$$

(3)　束縛条件を使い，運動方程式を解いて[*30]，

$$a = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{3F}{2\mu + 6m} - g}\,,\quad b = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{F}{2\mu + 6m} - g}\,,$$

$$c = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{F}{\mu + 3m} - g}\,,\quad T = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{3m}{2\mu + 6m}F}\,.$$

[*30] 各運動方程式から加速度を T を含む形で表し，それを束縛条件へ代入することで T から求める，とするのが楽.

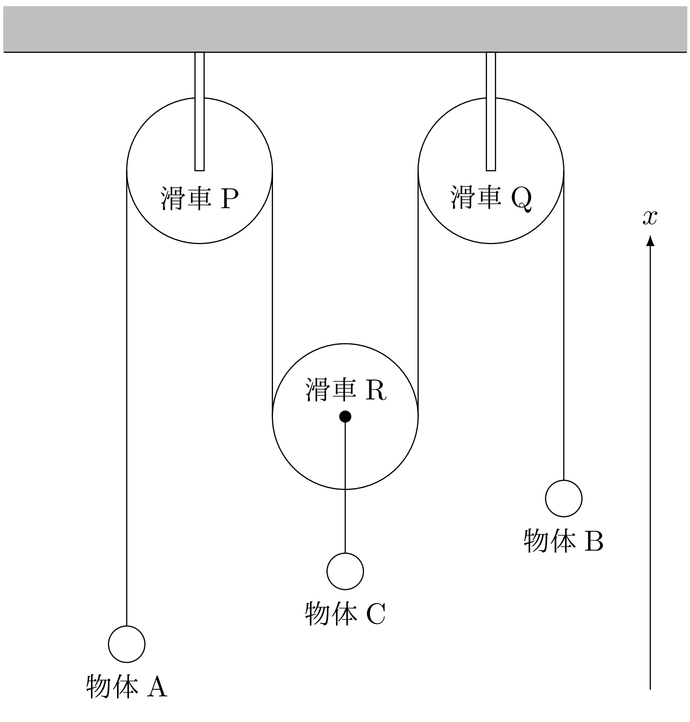
16. 糸による束縛②

物体 A（質量 m）と物体 B（質量 $2m$）を糸で繋ぎ，天井に吊るされた滑車 P，Q にかけた．その間に滑車 R をかけ，滑車 R には物体 C（質量 $3m$）を糸で繋いである．全ての物体が静止している状態から静かに手を放した．全ての滑車と糸は質量が無視でき，糸に関しては伸び縮みせず，糸と滑車の間の摩擦はなく，滑車の回転は考えないものとする．鉛直上向きに x 軸を定める．重力加速度の大きさを g とする．

(1)　物体 A，B，C の加速度をそれぞれ a_{A}，a_{B}，a_{C}，物体 A と物体 B を結ぶ糸の張力の大きさを T_1，物体 C に繋がる糸の張力の大きさを T_2 とする．物体 A，B，C，滑車 R の運動方程式をそれぞれ立式せよ．

(2)　糸が伸び縮みしないことから，a_{A}，a_{B}，a_{C} の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3)　a_{A}，a_{B}，a_{C}，T_1，T_2 を求めよ．



【メモ】

動滑車固有の特別な考えみたいなものは要らない．今の場合，滑車の運動方程式は質量が 0 で立式する．

【解答】

(1)　各物体の運動方程式は以下の通りである[*31]．

$$\begin{cases} \text{物体 A}: \underline{ma_{\mathrm{A}} = T_1 - mg}\,, \\ \text{物体 B}: \underline{2ma_{\mathrm{B}} = T_1 - 2mg}\,, \\ \text{物体 C}: \underline{3ma_{\mathrm{C}} = T_2 - 3mg}\,, \\ \text{滑車 R}: \underline{0 \cdot a_{\mathrm{C}} = 2T_1 - T_2}\,. \end{cases}$$

(2)　定滑車の位置を x_0 とする．糸の長さが一定なことより物体 A，B，C の位置は，

$$(x_0 - x_{\mathrm{A}}) + (x_0 - x_{\mathrm{B}}) + 2(x_0 - x_{\mathrm{C}}) = \mathrm{const}$$

の関係を満たす．この式の時間 2 階微分（時間変化を 2 回取ること，以後省略）を考えて，

$$\underline{a_{\mathrm{A}} + a_{\mathrm{B}} + 2a_{\mathrm{C}} = 0}\,.$$

(3)　束縛条件を使い，運動方程式を解いて[*32]

$$a_{\mathrm{A}} = \frac{7}{17}g\,,\quad a_{\mathrm{B}} = -\frac{5}{17}g\,,\quad a_{\mathrm{C}} = -\frac{1}{17}g\,,\quad T_1 = \frac{24}{17}mg\,,\quad T_2 = \frac{48}{17}mg\,.$$

[*31] 物体 C と滑車 R の加速度が等しいというところにも，糸の長さが一定という条件を暗黙裡に使用している．

[*32] 各運動方程式から加速度を T_1 を含む形で表し，それを束縛条件へ代入することで T_1 から求める，とするのが楽．

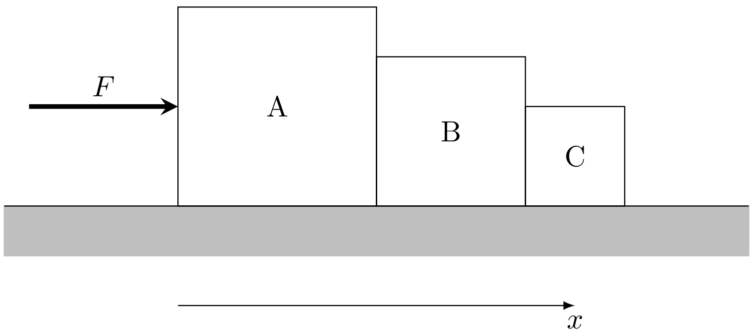
17. 面による束縛①

滑らかな水平の床の上に，質量 $m_{\rm A}$，$m_{\rm B}$，$m_{\rm C}$ の物体 A，B，C を並べて置き，物体 A に水平右向きの一定な力 F を加える．水平右向きに x 軸を定める．

(1)　物体 A，B，C の加速度をそれぞれ $a_{\rm A}$，$a_{\rm B}$，$a_{\rm C}$，物体 B が物体 A から受ける垂直抗力を N_1，物体 C が物体 B から受ける垂直抗力の大きさを N_2 とする．各物体について運動方程式を立式せよ．

(2)　各物体が変形しないことから，$a_{\rm A}$，$a_{\rm B}$，$a_{\rm C}$ の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3)　$a_{\rm A}$，$a_{\rm B}$，$a_{\rm C}$，N_1，N_2 を求めよ．



【メモ】

垂直抗力は未知量なので，運動方程式だけでは式が不足する．そこで，束縛条件（面が変形しない条件）を考える．全体の運動方程式を考えても a，F は求められるが，N が求まらない．部分から全体を知ることはできるが，全体から部分を知ることはできない[*33]．

【解答】

(1)　各物体の運動方程式は以下の通りである．

$$\begin{cases} \mathrm{A}: \underline{m_{\mathrm{A}} a_{\mathrm{A}} = F - N_1}\,, \\ \mathrm{B}: \underline{m_{\mathrm{B}} a_{\mathrm{B}} = N_1 - N_2}\,, \\ \mathrm{C}: \underline{m_{\mathrm{C}} a_{\mathrm{C}} = N_2}\,. \end{cases}$$

(2)　各物体の変位（位置の変化分）は，

$$\Delta x_{\mathrm{A}} = \Delta x_{\mathrm{B}} = \Delta x_{\mathrm{C}}$$

の関係を満たす[*34]．この式の時間 2 階微分を考えて，

$$\underline{a_{\mathrm{A}} = a_{\mathrm{B}} = a_{\mathrm{C}}}\,.$$

(3)　束縛条件を使い，運動方程式を解いて，

$$a_{\mathrm{A}} = a_{\mathrm{B}} = a_{\mathrm{C}} = \underline{\frac{F}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}}}\,,$$

$$N_1 = \underline{\frac{m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}} F}\,,\quad N_2 = \underline{\frac{m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}} F}\,.$$

---

*33 今（最初）は，部分から構成されるものとしての全体，という認識が大切．理由は前述の通り．しかし，学習が進んでいくと，全体に注目することで興味深い量（変わらない量）が見えてきたり（○○保存則），逆に，全体から部分を構成するような話もある（熱力学→分子運動論）．

*34 各物体の位置は定数（物体の幅 ℓ_{B}，ℓ_{C}）だけずれる．すなわち，

$$x_{\mathrm{B}} = x_{\mathrm{A}} + \ell_{\mathrm{B}}\,,\quad x_{\mathrm{C}} = x_{\mathrm{A}} + \ell_{\mathrm{B}} + \ell_{\mathrm{C}}$$

の関係を満たす．

18. 面による束縛②

傾斜角 θ の滑らかな斜面上に，質量 m の物体を静かに置く．物体は水平面上を滑り始めた．斜面した向きに x 軸，斜面垂直上向きに y 軸を定める．重力加速度の大きさを g とする．

(1)　物体の x 方向の加速度を a_x，y 方向の加速度を a_y，物体が斜面から受ける垂直抗力の大きさを N とする．物体の運動方程式を立式せよ．

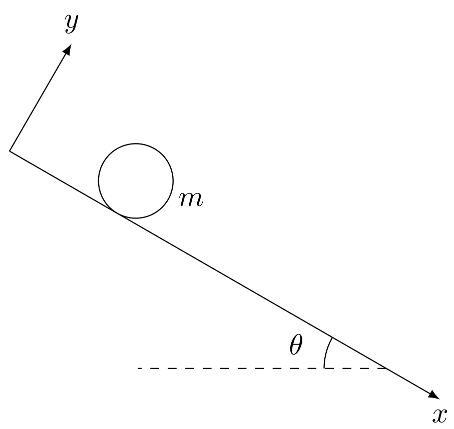
(2)　床が変形しないこと，および物体が床から離れないことから a_y を求めよ．

(3)　a_x を求めよ．

(4)　初期条件（t=0 での物体の位置と速度の値）は $x(0) = 0$，$v(0) = 0$ とする．物体の x 方向の速度速度成分 v，および位置 x をそれぞれ時刻 t の関数として求めよ．

(5)　物体が距離 ℓ だけ滑るのに要した時間を求めよ．

(6)　ℓ だけ滑ったときの物体の速さ v を求めよ．



【メモ】

(4)〜(6) で，運動の具体的な状況を問う設問を追加してみた．加速度の大きさが一定なことより，等加速度運動のときに使える公式を用いている（第 1 章参照）．

【解答】

(1)　物体の運動方程式は以下の通りである．

$$\begin{cases} ma_x = mg\sin\theta\,, \\ ma_y = N - mg\cos\theta\,. \end{cases}$$

(2)　物体の運動は常に $y=0$ を満たす．ゆえに，

$$a_y = 0\,.$$

(3)　x 方向の運動方程式より，

$$a_x = g\sin\theta\,.$$

(4)　加速度一定より等加速度運動の位置の公式に初期条件 $x(0)=0$，$v(0)=0$ を代入して，

$$\begin{cases} v(t) = g\sin\theta t\,, \\ x(t) = \dfrac{1}{2}g\sin\theta t^2\,. \end{cases}$$

(5)　$x=\ell$ となる時刻は，

$$t = \sqrt{\frac{2\ell}{g\sin\theta}}\,.$$

(6)　(5) の結果を速度の式に代入して，

$$v = g\sin\theta t = g\sin\theta\sqrt{\frac{2\ell}{g\sin\theta}} = \sqrt{2g\ell\sin\theta}\,.$$

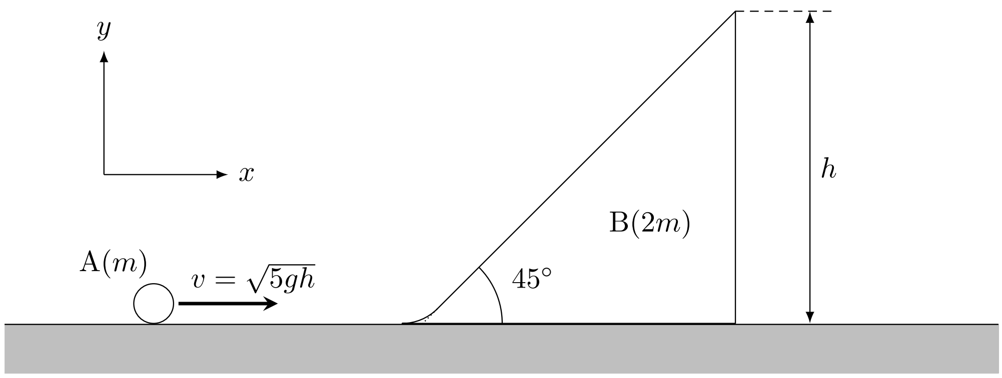
19. 面による束縛③

水平な床の上に物体 A（質量 m）と物体 B（質量 $2m$，傾斜角 $45°$）を置く．水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．物体 A に x 正方向に初速度を与えたところ，A は B の斜面上を運動した．物体 B と床はなめらかに繋がっており，一切の摩擦は無視する．重力加速度の大きさを g とする．

(1)　三角台と小物体の間にはたらく垂直抗力の大きさを N とする．三角台の x 方向の加速度を A_x，小物体の x 方向の加速度を a_x，y 方向の加速度を a_y とする．台の x 方向の運動方程式と，小物体の x 方向，および y 方向の運動方程式をそれぞれ立式せよ．

(2)　小物体が三角台の斜面上を運動することから，A_x，a_x，a_y の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3)　A_x，a_x，a_y，N を求めよ．



【メモ】

三角台が動くため，「小球は三角台の斜面垂直方向に運動しない」といった考えは誤り．イメージで解かないで，面を介したら，運動方程式と束縛条件．

【解答】

(1)　各物体の運動方程式は以下の通りである．

$$\begin{cases} ma_x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}N\,, \\ ma_y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}N - mg\,, \\ 2mA_x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}N\,. \end{cases}$$

(2)　三角台の先端の位置を $(X, 0)$，小物体の位置を (x, y) とすると，これらは常に

$$y = (x - X)\tan 45^\circ = x - X$$

の関係を満たす．この式の時間の 2 階微分を考えて，

$$a_y = a_x - A_x\,.$$

(3)　束縛条件を使い，運動方程式を解いて[*35]，

$$A_x = \frac{1}{5}g\,,\quad a_x = -\frac{2}{5}g\,,\quad a_y = -\frac{3}{5}g\,,\quad N = \frac{2\sqrt{2}}{5}mg\,.$$

*35 運動方程式から加速度を N を含む形で表し，それを束縛条件へ代入することで N から求める，というのが楽．

20. 面による束縛③の類題

図のように，三角台（質量 $2m$，傾斜角 $30°$）を水平面上に置き，三角台の斜面上に質量 m の小物体を静かに置いた．水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．床と三角台，三角台と小球の間の摩擦はないものとする．重力加速度の大きさを g とする．

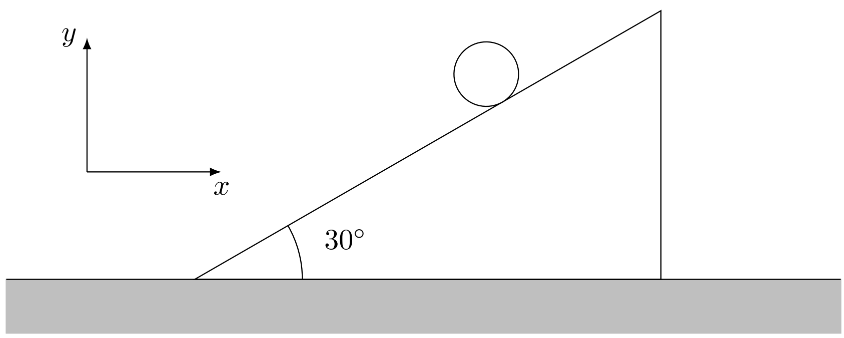
(1)　三角台と小物体の間にはたらく垂直抗力の大きさを N とする．三角台の x 方向の加速度を A_x，小物体の x 方向の加速度を a_x，y 方向の加速度を a_y とする．台の x 方向の運動方程式と，小物体の x 方向，および y 方向の運動方程式をそれぞれ立式せよ．

(2)　小物体が三角台の斜面上を運動することから，A_x，a_x，a_y の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3)　A_x，a_x，a_y，N を求めよ．

(4)　始状態での小物体の位置を $(\sqrt{3}\,h, h)$ とする．小物体が水平面に達する直前の小物体の位置 $(x, 0)$，および速度 (v_x, v_y) を求めよ．

(5)　三角台を固定した場合と固定しない場合で，水平面に達した小物体の速さの大小関係について述べよ．



【解答】

(1)　各物体の運動方程式は以下の通りである．

$$\begin{cases} ma_x = -\dfrac{1}{2}N\,, \\ ma_y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}N - mg\,, \\ 2mA_x = \dfrac{1}{2}N\,. \end{cases}$$

(2)　三角台の先端の位置を $(X,\,0)$，小物体の位置を $(x,\,y)$ として，

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-X)\,, \qquad \therefore a_y = \frac{1}{\sqrt{3}}(a_x - A_x)\,.$$

(3)　束縛条件，および運動方程式より，

$$A_x = \frac{\sqrt{3}}{9}g\,,\quad a_x = -\frac{2\sqrt{3}}{9}g\,,\quad a_y = -\frac{1}{3}g\,,\quad N = \frac{4\sqrt{3}}{9}mg\,.$$

(4)　(3) より，

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}\,h - \dfrac{\sqrt{3}}{9}gt^2\,, \\ y = h - \dfrac{1}{6}gt^2\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}gt\,, \\ v_y = -\dfrac{1}{3}gt\,. \end{cases}$$

$y=0$ を解いて $t=\sqrt{6h/g}$ より，

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}h\,,\quad v_x = -\frac{2}{3}\sqrt{2gh}\,,\quad v_y = -\frac{1}{3}\sqrt{6gh}\,.$$

(5)　(4) より，三角台が自由な場合の，水平面に達する直前の小物体の速さ v_{free} は，

$$v_{\mathrm{free}} = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\sqrt{2gh}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\sqrt{6gh}\right)^2} = \frac{\sqrt{14gh}}{3}\,.$$

一方，三角台を固定した場合の，水平面に達する直前の小物体の速さは $v_{\mathrm{fix}} = \sqrt{2gh}$ である[*36]．よって，$v_{\mathrm{free}} < v_{\mathrm{fix}}$ とわかる[*37*38]．

*36 この計算は問題 ***16*** を参照し，各自行うこと．

*37 ともに正の量ゆえ 2 乗しても大小関係は変わらず，$2 = \dfrac{18}{9} > \dfrac{14}{9}$.

*38 次章の話：固定の場合，重力のする仕事は小物体にのみ寄与するが，三角台も動く場合，重力のする仕事は小物体と三角台の 2 つに分配されるため，前者の方が速さ（運動エネルギー）は大きくなるとわかる．

21. 面による束縛④

図のような，水平な床の上での三角台（質量 M，斜面の傾斜角 θ）と，鉛直な壁と三角台に挟まれた球（質量 m）の運動について考えよう．運動はすべて紙面で表される同一鉛直面内で起こるものとし，三角台が倒れることや，球が回転することは考えない．また，壁と球，三角台の斜面との間に摩擦はないものとし，重力加速度の大きさを g とする．

水平右向きに x 軸を，鉛直上向きに y 軸を定め，三角台の位置は左下端の x 座標 X で表す．また，図の実線で示したように，三角台の左下端が壁に接触するときに $X = 0$ であるとする．

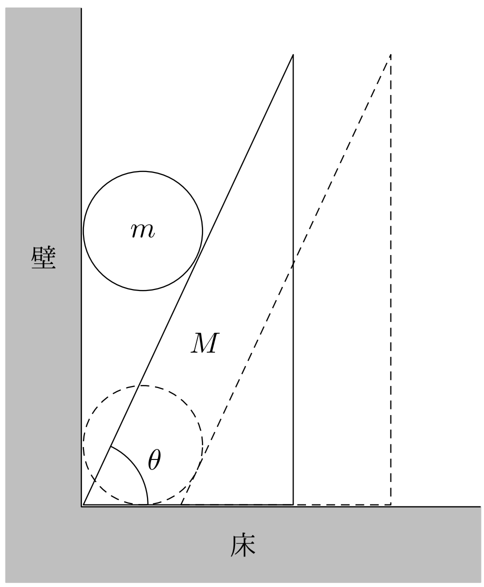
はじめ，三角台に外力を加えて，図の実線の状態（$X = 0$）に保持しておき，そっと手を放したところ，三角台は右向きに大きさ A の加速度で，小球は下向きに大きさ a の加速度で運動を始めた．球と三角台の間にはたらく垂直抗力を N とする．

(1)　各物体の運動方程式をそれぞれ立式せよ．なお，小球の加速度の符号に注意せよ．

(2)　球が三角台の斜面上をすべるように運動することから，a と A の間に成り立つ関係式を立式せよ．

（ヒント）球の座標は三角台との接している点で考えると分かり易い．

(3)　a，A，N を求めよ．



【解答】

(1)　各物体の運動方程式は，

$$\begin{cases} y : m(-a) = N\cos\theta - mg\,, \\ x : MA = N\sin\theta\,. \end{cases}$$

(2)　球の接地点を (x, y)，三角台の左下端を $(X, 0)$ とする．このとき，三角台の面，および壁，床の面が変形せず球が三角台上を滑ることから常に

$$y = (x - X)\tan\theta$$

の関係を満たす．この両辺の t の 2 階微分を取って，

$$a = A\tan\theta\,.$$

(3)　運動方程式・束縛条件より，

$$a = \frac{m\sin^2\theta}{m\sin^2\theta + M\cos^2\theta}g\,,\quad A = \frac{m\sin\theta\cos\theta}{m\sin^2\theta + M\cos^2\theta}g\,,\quad N = \frac{Mm\cos\theta}{m\sin^2\theta + M\cos^2\theta}g\,.$$

22. 流体から受ける力①

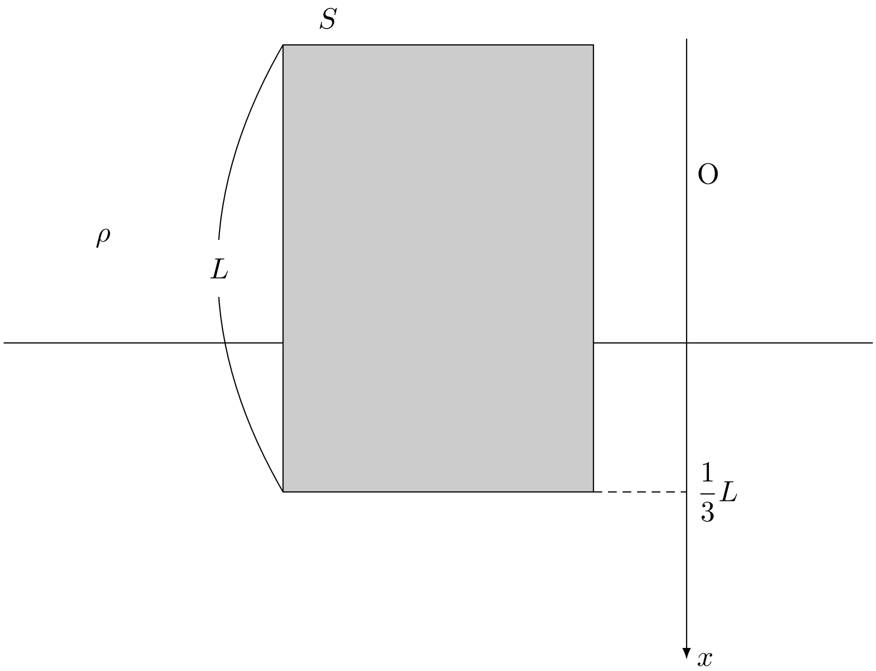
物体（断面積 S，高さ L）を液体（密度 ρ）の上に浮かべたところ，物体は水面から $\dfrac{1}{3}L$ だけ沈み静止した．鉛直下向きに x 軸を定め，物体の位置 x は物体底面の位置とし，水面を原点に取る．重力加速度の大きさを g とし，液面の高さの変化を無視する．

(1)　大気圧を P_0 とする．物体にはたらく大気圧，液圧を考えることにより物体の質量 m を求めよ．

(2)　物体にはたらく浮力を考えることにより物体の質量 m を求めよ．

(3)　物体の底面が $0 \leq x \leq L$ にあるとき，物体にはたらく力 f を x を含む式で表せ．

(4)　物体の底面が $0 \leq x \leq L$ にあるとき，物体にはたらく力 f を求めよ．



【メモ】

浮力と水圧は同時に考えてはいけない（考えるときはどちらか一方だけ）.

【解答】

(1)　つりあい（運動方程式の加速度 0）より，

$$m \cdot 0 = mg + P_0 S - \left(P_0 + \rho \frac{L}{3} g\right) S\,, \qquad \therefore m = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{3}\rho SL}\,.$$

(2)　つりあい（運動方程式の加速度 0）より，

$$m \cdot 0 = mg - \rho S \frac{L}{3} g\,, \qquad \therefore m = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{3}\rho SL}\,.$$

(3)　はたらく力（運動方程式の右辺）は，

$$f = mg + P_0 S - (P_0 + \rho g x) S = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{3}\rho SLg - \rho Sgx} \left(= \frac{\rho SLg}{3}\left(1 - \frac{3x}{L}\right)\right)\,.$$

(4)　はたらく力（運動方程式の右辺）は，

$$f = mg + P_0 S - (P_0 + \rho g L) S = \frac{1}{3}\rho SLg - \rho SgL = \underset{\sim\sim\sim}{-\frac{2}{3}\rho SLg}\,.$$

23. 流体から受ける力②

物体（質量 M，密度 ρ'）を液体（密度 $\rho\,(>\rho')$）の上に浮かべたところ，物体は水面から h だけ沈み静止した．鉛直下向きに x 軸を定め，物体の位置 x は物体底面の位置とし，水面を原点に取る．重力加速度の大きさを g とし，液面の高さの変化を無視する．

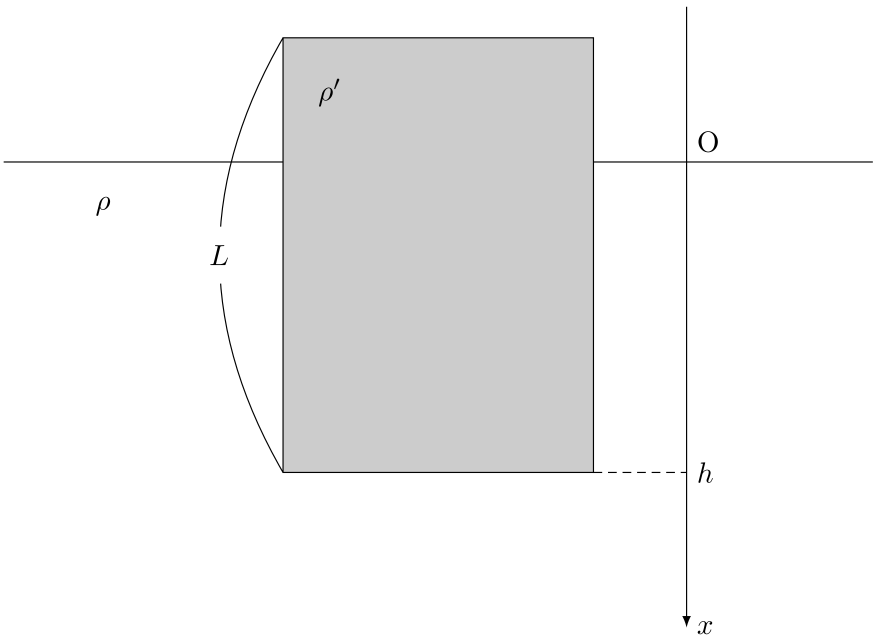
(1)　物体の液面と平行な断面の面積 S を求めよ．

(2)　大気圧を P_0 とする．物体にはたらく大気圧，液圧を考えることにより h を求めよ．

(3)　物体にはたらく浮力を考えることにより h を求めよ．

(4)　物体の位置が $0 \leq x \leq L$ のとき，物体の加速度 a を，x を含む式で表せ．

(5)　物体の位置が $L \leq x$ のとき（全て液中に沈んでいるとき），物体の加速度 a を求めよ．



【解答】

(1)　密度の定義より，

$$M = \rho' SL\,, \qquad \therefore S = \frac{M}{\rho' L}\,.$$

(2)　運動方程式より，

$$M \cdot 0 = P_0 S - (P_0 S + \rho g S h) + Mg\,, \qquad \therefore h = \frac{\rho'}{\rho} L\,.$$

(3)　運動方程式より，

$$M \cdot 0 = -\rho \frac{M}{\rho' L} hg + Mg\,, \qquad \therefore h = \frac{\rho'}{\rho} L\,.$$

(4)　運動方程式より，

$$Ma = -\rho \frac{M}{\rho' L} gx + Mg\,, \qquad \therefore a = -\frac{\rho g}{\rho' L}\left(x - \frac{\rho'}{\rho} L\right).$$

(5)　運動方程式より，

$$a = -\rho \frac{M}{\rho' L} gL + Mg\,, \qquad \therefore a = \left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) g\,.$$

§1.3 エネルギーと仕事

第 3 章では，エネルギーという物理量に注目し，運動を解析する．エネルギーによる議論では，特に「どこまでを 1 つの系と見なすか」が重要となる．エネルギー収支の式は運動方程式と数学的に同値な関係にあるが，エネルギー収支での議論は時刻 t が現れず，計算の手順が少ないという特徴がある．また，仕事という物理量に関して，その計算方法は高校範囲では 3 つに分類される．仕事の計算についてもこの章できちんと押さえたい．

■簡単なまとめ

- 各種エネルギーの公式：
  ❶ 運動エネルギー $K=\dfrac{1}{2}mv^2$（m：質量，v：速さ）
  ❷ 重力の位置エネルギー $U=mgz$（g：重力加速度の大きさ，z：基準点からの高さ）
  ❸ 弾性エネルギー $U=\dfrac{1}{2}ks^2$（k：ばね定数，s：ばねの伸縮）
- 物体の運動のエネルギー収支の式：

$$K_{\text{おわり}}-K_{\text{はじめ}}=W$$

なお，物体にはたらく力が重力，弾性力の場合は，仕事を計算してから上手いこと式をまとめることで，

$$K_{\text{おわり}}+U_{\text{おわり}}=K_{\text{はじめ}}+U_{\text{はじめ}}$$

となる．これを力学的エネルギー保存則と呼んでいる．今後，（高校範囲では）位置エネルギーの公式は残り 2 つ習い（万有引力，クーロン力の 2 つ），計 4 つ覚えることになる．

- 仕事の計算の分類：

$$W=\begin{cases}\cdot\ \text{力 } f \text{ の具体的な形が既知} \quad\to\quad \text{定義から直接計算} \\ \quad\to\ \begin{cases} f \text{ 一定な場合：} |f||\varDelta x|\cos\theta(\varDelta x\text{：変位}) \\ f \text{ が一定出ない場合：}(f \text{ の } x \text{ 積分})=(f-x \text{ グラフの面積}) \end{cases} \\ \cdot\ \text{力 } f \text{ の具体的な形が不明} \quad\to\quad \text{エネルギー収支から逆算} \end{cases}$$

1. 導入（気持ちを知る）用の問題

時刻 $t=0$ に，位置 $x(0)$，速度 $v(0)$ の状態の物体に x 軸正の方向に一定の力 f を加えた．時刻 t での物体の位置，および速度をそれぞれ $x(t)$，$v(t)$ と表す．

(1)　運動方程式から物体の加速度 a を求めよ．また，物体の位置 x，および速度 v をそれぞれ時刻 t の関数として表せ．

(2)　$x=x(t)$，$v=v(t)$ より，時刻 t を消去することで，以下の x と v の関係式が得られることを確認せよ．

$$\frac{1}{2}mv(t)^2-\frac{1}{2}mv(0)^2=f\mathit{\Delta}x\,,\quad \mathit{\Delta}x=x(t)-x(0)\,.$$

【解答】

(1)　運動方程式より，

$$ma=f\,,\quad \therefore a=\underline{\frac{F}{m}}\,.$$

よって，F，m が一定なことより，

$$\begin{cases} v(t)=\underline{v(0)+\dfrac{f}{m}t}\,,\\ x(t)=\underline{x(0)+v(0)t+\dfrac{1}{2}\dfrac{f}{m}t^2}\,. \end{cases}$$

(2)　速度 v の式より $t=\dfrac{m}{f}(v(t)-v(0))$ であり，これを位置 x の式に代入して[*39]，

$$\underline{\frac{1}{2}mv(t)^2-\frac{1}{2}mv(0)^2=f(x(t)-x(0))}\,.$$

[*39] この式の左辺の量を，運動エネルギー，右辺の量を仕事と呼ぶ．なお，この式の両辺を $\dfrac{2}{m}$ 倍することで，

$$v(t)^2-v(0)^2=2\frac{f}{m}(x(t)-x(0))=2a(x(t)-x(0))$$

のようにも変形できるが，この式には物理的な意味はない．

2. エネルギー収支①

物体（質量 m）を地面からの高さ h の地点から静かに手を放した．重力加速度の大きさを g とする．

(1) 物体のエネルギー収支に注目することで，落下直前の物体の速さ v を求めよ．

(2) 運動方程式を利用し，時間追跡によって得られた結果が (1) と整合していることを確認せよ．

【解答】

(1) 物体には鉛直下向きに大きさ mg の重力がはたらく．エネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = mgh\,, \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{2gh}}\,.$$

(2) 鉛直上向きを正，地面を $y = 0$ とする．運動方程式より，

$$ma = -mg\,, \qquad \therefore a = -g$$

であるから，物体の位置 y，および速度 v はそれぞれ時刻 t の関数として[*40]，

$$\begin{cases} v(t) = -gt\,, \\ y(t) = h - \dfrac{1}{2}gt^2\,. \end{cases}$$

$y = 0$ を満たす t は $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ ゆえ，この瞬間の物体の速さ $|v|$ は，

$$|v| = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{2gh}}\,.$$

*40 (1) では v を速さとして用いたが，ここでは速度として v を用いる．

3. エネルギー収支②

なめらかな斜面（傾斜角 θ）上にある物体（質量 m）を，斜面下向きに速さ v_0 で打ち出した．物体が斜面上を ℓ だけすべったときの物体の速さを v とする．重力加速度の大きさを g とする．

(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，v を求めよ．

(2)　運動方程式を利用し，時間追跡によって得られた結果が (1) と整合していることを確認せよ．

【解答】

(1)　物体には，鉛直下向きに重力，斜面と直交する方向に垂直抗力がはたらく．垂直抗力は変位と直交するためその仕事はゼロ．よって，重力の仕事だけを考えればよく，エネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = mg\ell\cos(90^\circ - \theta) = mg\ell\sin\theta\,, \qquad \therefore v = \sqrt{{v_0}^2 + 2g\ell\sin\theta}\,.$$

(2)　斜面下向きを正に x 軸を定め，その原点を始状態の位置とする．運動方程式より，

$$ma = mg\sin\theta\,, \qquad \therefore a = g\sin\theta\,.$$

よって，物体の位置，および速度は，

$$\begin{cases} v(t) = v_0 + g\sin\theta t\,, \\ y(t) = v_0 t + \dfrac{1}{2}g\sin\theta t^2\,. \end{cases}$$

$x = \ell$ を満たす t は，

$$v_0 t + \frac{1}{2}g\sin\theta t^2 = \ell\,, \qquad \therefore t = \frac{v_0}{g\sin\theta}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2g\ell\sin\theta}{{v_0}^2}}\right)$$

ゆえ[*41]，この瞬間の物体の速さ v は，

$$v = v_0 + g\sin\theta\frac{v_0}{g\sin\theta}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2g\ell\sin\theta}{{v_0}^2}}\right) = \sqrt{{v_0}^2 + 2g\ell\sin\theta}\,.$$

[*41] $t > 0$ の解を選ぶ．

4. エネルギー収支③（摩擦）

図のように，x 軸を右向き正，y 軸を鉛直上向き正に定め，静止している物体（質量 m）に x 正方向で大きさ f の力を加え，x 正方向に ℓ 変位したときの物体の速さを v とする．

I　物体と床との間の摩擦を無視する．

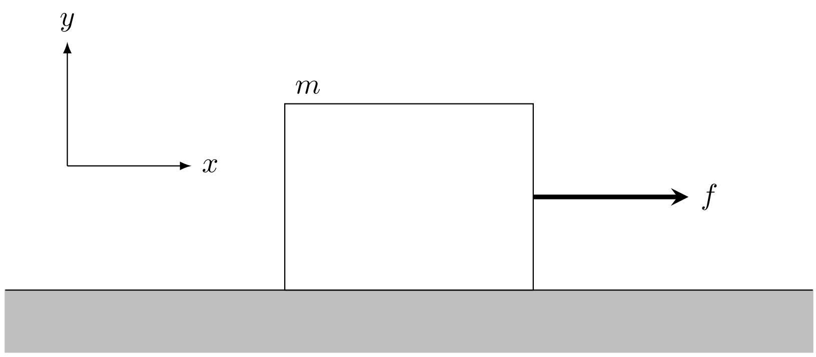
(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，v を求めよ．

(2)　運動方程式を利用し，時間追跡によって得られた結果が (1) と整合していることを確認せよ．

II　物体と床との間の動摩擦係数を μ とする．

(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，v を求めよ．

(2)　運動方程式を利用し，時間追跡によって得られた結果が (1) と整合していることを確認せよ．



【解答】

I (1)　物体が外部からされる仕事の合計は，

$$W = f\ell\,.$$

物体のエネルギー収支を考えて，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = f\ell\,, \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{2f}{m}\ell}}\,.$$

(2)　運動方程式より，

$$\begin{cases} ma = f\,, \\ m\cdot 0 = N - mg\,, \end{cases} \qquad \therefore a = \frac{f}{m}\,,\quad N = mg\,.$$

加速度が一定なことより，$x(0) = 0$ ととって[*42]，

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{f}{2m}t^2\,, \\ v(t) = \dfrac{f}{m}t\,. \end{cases} \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{2f}{m}\ell}}\,.$$

II (1)　物体が外部からされる仕事の合計は，

$$W = f\ell - \mu mg\ell = (f - \mu mg)\ell\,.$$

物体のエネルギー収支を考えて，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = (f - \mu mg)\ell\,, \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{2\left(\frac{f}{m} - \mu g\right)\ell}}\,.$$

(2)　運動方程式より，

$$\begin{cases} ma = f - \mu N\,, \\ m\cdot 0 = N - mg\,, \end{cases} \qquad \therefore a = \frac{f}{m} - \mu g\,,\quad N = mg\,.$$

加速度が一定なことより，$x(0) = 0$ ととって[*43]，

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{f}{m} - \mu g\right)t^2\,, \\ v(t) = \left(\dfrac{f}{m} - \mu g\right)t\,. \end{cases} \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{2\left(\frac{f}{m} - \mu g\right)\ell}}\,.$$

[*42] $x = \ell$ を満たす時刻 t は $t = \sqrt{\dfrac{2m\ell}{f}}$ である．

[*43] $x = \ell$ を満たす時刻 t は $t = \sqrt{\dfrac{2m\ell}{f - \mu mg}}$ である．

5. エネルギー収支④（摩擦）

図のように，粗い斜面（傾斜角 θ）にある物体（質量 m）に，斜面に沿って斜面上向きの初速度 v_0 を与えた．この時刻を $t=0$ とする．物体は，斜面をすべりあがった後，ある位置で折り返し，斜面下向きに滑り始めた．斜面上向きに x 軸を定め，その原点を $t=0$ における物体の位置に定める．斜面と物体の間の静止摩擦係数を μ_0，動摩擦係数を μ，重力加速度の大きさを g とする．

I　物体の運動を，物体のエネルギー収支によって運動を考察する．

(1)　物体上昇している間，物体にはたらく力の x 成分 f_x を求めよ．また，物体が原点から位置 x まで運動する間に，f_x が物体にした仕事 W を求めよ．

(2)　物体が位置 x にあるときの物体の速度を v とする．このときの物体のエネルギー収支の式を立式せよ．

(3)　物体が折り返した位置 x_0 を求めよ．

(4)　物体が再び $x=0$ を通過する瞬間の物体の速度 v を求めよ．

(5)　物体が最高点で折り返した後，斜面下方向に滑り始めるための $\tan\theta$ の条件を求めよ．

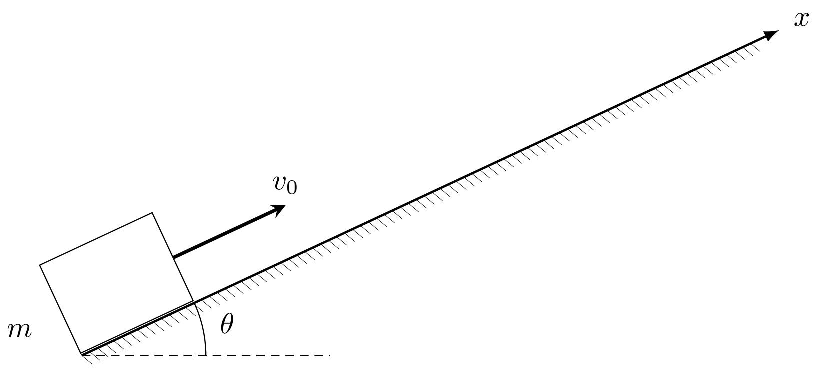
II　物体の運動を，時間追跡によって考察する．

(1)　物体が上昇している間を考える．物体が位置 x にあるときの物体の加速度を a とする．物体の運動方程式を立式せよ．

(2)　物体が上昇している間の物体の位置 x，および速度 v を，それぞれ時刻 t の関数として表せ．

(3)　物体が折り返す時刻 t_0，および折り返す位置 x_0 をそれぞれ求めよ．

(4)　物体が再び $x=0$ を通過する瞬間の物体の速度 v を求めよ．このとき，斜面を上昇する間と下降する間で物体の加速度が異なることに注意せよ．



x
v_0
m
θ

【解答】

I (1)　物体にはたらく力の x 成分 f_x は，

$$f = \underline{-mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta}\,.$$

よって，f_x が物体にする仕事 W は[*44]，

$$W = (-mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta)x\cos 0^\circ = \underline{-mgx(\sin\theta + \mu\cos\theta)}\,.$$

(2)　物体のエネルギー収支は，はじめ $v = v_0$，$x = 0$ より，

$$\underline{\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = -mgx(\sin\theta + \mu\cos\theta)}\,.$$

(3)　エネルギー収支の式に $v = 0$ を代入して，

$$-\frac{1}{2}m{v_0}^2 = -mgx_0(\sin\theta + \mu\cos\theta)\,, \qquad \therefore x_0 = \underline{\frac{{v_0}^2}{2g(\sin\theta + \mu\cos\theta)}}\,.$$

(4)　物体が $x = x_0$ から $x = 0$ へ滑り落ちる間にされた仕事 W' は，

$$W' = (-mg\sin\theta + \mu mg\cos\theta)x_0\cos(180^\circ) = mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)x_0\,.$$

よって，物体のエネルギー収支を考えて，

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)x_0\,, \qquad \therefore v = \underline{-v_0\sqrt{\frac{\tan\theta - \mu}{\tan\theta + \mu}}}\,.$$

(5)　静止しているときを考えて，はたらく静止摩擦力を x 軸正の向きに R とすると[*45]，

$$0 = -mg\sin\theta + R\,, \qquad \therefore R = mg\sin\theta\,.$$

よって，滑らない条件の対偶を考えて，

$$R \geq \mu_0 N = \mu_0 mg\cos\theta\,, \qquad \therefore \underline{\tan\theta \geq \mu_0}\,.$$

II (1)　運動方程式は，

$$\underline{ma = -mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta}\,.$$

[*44] 物体にはたらくそれぞれの力による仕事を計算しても同様の結果を得る（授業ではこのように説明をしている）.

$$W = mgx\cos(\theta + 90^\circ) + Nx\cos(90^\circ) + mumg\cos\theta\cdot x\cos(180^\circ) = -mgx(\sin\theta + \mu\cos\theta)\,.$$

[*45] 静止摩擦については，向きを逆においても，運動方程式（今はつりあい）を解くことで R が求まり，その符号から自分の置いた向きが正しいかどうかを判断できる.

(2)　運動方程式より，

$$a = -g(\sin\theta + \mu\cos\theta)\,.$$

よって，加速度一定より，

$$\begin{cases} x = v_0 t - \dfrac{1}{2}g(\sin\theta + \mu\cos\theta)t^2\,, \\ v = v_0 - g(\sin\theta + \mu\cos\theta)t\,. \end{cases}$$

(3)　静止しているときを考えて，はたらく静止摩擦力を x 軸正の向きに R とすると[*46]，

$$0 = -mg\sin\theta + R\,, \qquad \therefore R = mg\sin\theta\,.$$

よって，滑らない条件の対偶を考えて，

$$R \geq \mu_0 N = \mu_0 mg\cos\theta\,, \qquad \therefore \tan\theta \geq \mu_0\,.$$

(4)　$v = 0$ を解いて，

$$t_0 = \frac{v_0}{g(\sin\theta + \mu\cos\theta)}\,, \qquad \therefore x_0 = \frac{{v_0}^2}{2g(\sin\theta + \mu\cos\theta)}\,.$$

(5)　物体が斜面を下るときの加速度は，動摩擦力の向きが変わることに注意して，

$$ma = -mg\sin\theta + \mu mg\cos\theta\,, \qquad \therefore a = -g(\sin\theta - \mu\cos\theta)\,.$$

折り返した時刻を再度 $t = 0$ と取れば，

$$\begin{cases} x = x_0 - \dfrac{1}{2}g(\sin\theta - \mu\cos\theta)t^2\,, \\ v = -g(\sin\theta - \mu\cos\theta)t\,. \end{cases}$$

よって，$x = 0$ を解いて，

$$t = \sqrt{\frac{2x_0}{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)}}\,, \qquad \therefore v = -\sqrt{2g(\sin\theta - \mu\cos\theta)x_0} = -v_0\sqrt{\frac{\tan\theta - \mu}{\tan\theta + \mu}}\,.$$

[*46] 静止摩擦については，向きを逆においても，運動方程式（今はつりあい）を解くことで R が求まり，その符号から自分の置いた向きが正しいかどうかを判断できる．

6. エネルギー収支⑤（ばね）

図のように，ばね（ばね定数 k）の一端を固定された壁に取り付け，他端を小物体（質量 m）につなぐ．水平右向きに x 軸を定め，その原点をばねが自然長のときの物体の位置に取る．

I　時刻 $t = 0$ に原点にある物体に x 軸正の向きに大きさ v_0 の初速度を与えたところ，物体は位置 $x = x_0$ で折り返した．

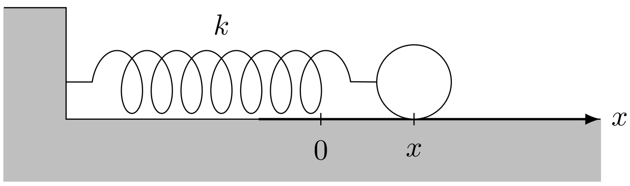
(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，x_0 を求めよ．

(2)　物体とばねを 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）を用いることで，x_0 を求めよ．

II　物体を位置 $x = a$ の位置から静かに手を放した．位置 $x = \dfrac{a}{2}$ における物体の速さを v とする．

(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，v を求めよ．

(2)　物体とばねを 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）を用いることで，v を求めよ．



【メモ】

弾性力のする仕事の計算の確認．積分公式を使えば楽に計算が行えるが，グラフを図示し符号付き面積を計算してもよい（定数関数，1 次関数の場合のみ可能）．また，エネルギーと仕事の関係を論じるときは，どこまでを系と見做すかが重要となる．

【解答】

I (1)　ばねが物体にした仕事 W は[*47]，

$$W = \int_0^{x_0} (-kx)\,dx = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_0^{x_0} = -\frac{1}{2}k{x_0}^2 .$$

物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}k{x_0}^2 , \qquad \therefore x_0 = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} .$$

(2)　物体とばねを 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 + \frac{1}{2}k{x_0}^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + \frac{1}{2}k\cdot 0^2 , \qquad \therefore x_0 = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} .$$

II (1)　弾性力のする仕事 W は[*48]，

$$W = \int_a^{\frac{1}{2}a} (-kx)\,dx = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_a^{\frac{1}{2}a} = \frac{3}{8}ka^2 .$$

物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = \frac{3}{8}ka^2 , \qquad \therefore v = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3k}{m}} .$$

(2)　物体とばねを 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{2}m\cdot 0^2 + \frac{1}{2}ka^2 , \qquad \therefore v = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3k}{m}} .$$

[*47] グラフによる符号付き面積の計算（図略）: $W = \frac{1}{2}x_0(-kx_0) = -\frac{1}{2}k{x_0}^2$.

[*48] グラフ利用 : $W = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a - a\right)\left(-\frac{1}{2}ka - ka\right) = \frac{3}{8}ka^2$.

7. エネルギー収支⑥（ばねと重力）

図のように，ばね（ばね定数 k）の一端を固定された床に取り付け，他端を物体（質量 m）に繋ぐ．物体とばねは透明な筒の中にあり，物体の運動は鉛直方向に限られるようになっている．鉛直上向きに x 軸を定め，その原点をばねが自然長の位置に定める．重力加速度の大きさを g とする．

I　物体を手で支え，$x=0$ の位置からゆっくりと鉛直下向きに動かしていくと，物体は位置 $x=-d$ で静止した．d を求めよ．

II　物体を位置 $x=0$ から静かに手を放したところ，$x=s$ で折り返した．

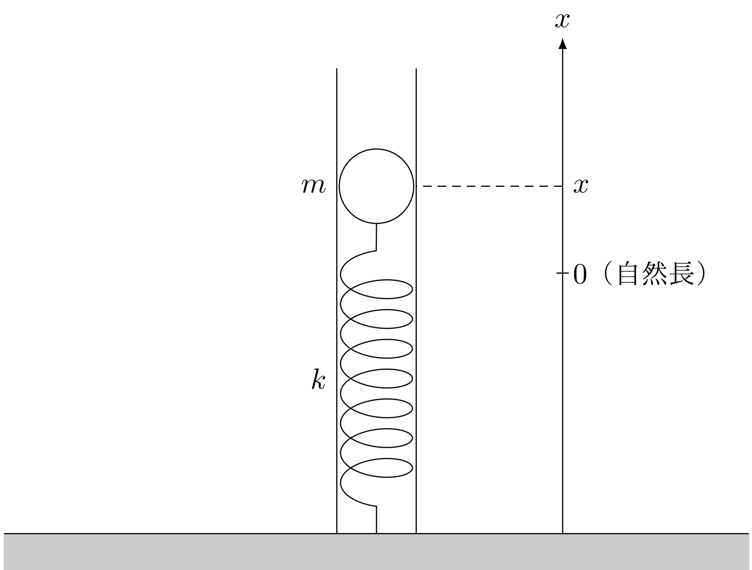
(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，s を求めよ．

(2)　物体，ばね，重力場を合わせて 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）を用いることで，s を求めよ．

III　物体を位置 $x=d$ から静かに手を放した．位置 $x=\dfrac{d}{3}$ を通過する瞬間の物体の速さを v とする．

(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，v を求めよ．

(2)　物体，ばね，重力場を合わせて 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）を用いることで，v を求めよ．



【解答】

I　運動方程式より，

$$m\cdot 0=-kx-mg\,,\qquad \therefore x=-\frac{mg}{k}\,,\quad \therefore d=\frac{mg}{k}\,.$$

II (1)　物体に作用する力のする仕事 W は[*49]，

$$W=\int_0^s(-kx-mg)\;dx=-\frac{1}{2}ks^2-mgs\,.$$

物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2-\frac{1}{2}m\cdot 0^2=-\frac{1}{2}ks^2-mgs\,,\qquad \therefore s=-\frac{2mg}{k}\,.$$

(2)　物体，ばね，重力場を 1 つの系と見る．弾性力の位置エネルギーの基準点，および重力の位置エネルギーの基準点をともに $x=0$ として，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2+\frac{1}{2}ks^2+mgs=\frac{1}{2}m\cdot 0^2+\frac{1}{2}k\cdot 0^2+mg\cdot 0\,,\qquad \therefore s=-\frac{2mg}{k}\,.$$

III (1)　物体に作用する力のする仕事 W は[*50]，

$$W=\int_{\frac{mg}{k}}^{\frac{mg}{3k}}(-kx-mg)\;dx=\frac{10}{9}\frac{(mg)^2}{k}\,.$$

物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}m\cdot 0^2=\frac{10}{9}\frac{(mg)^2}{k}\,,\qquad \therefore v=\frac{2}{3}g\sqrt{\frac{5m}{k}}\,.$$

(2)　物体，ばね，重力場を 1 つの系と見る．弾性力の位置エネルギーの基準点，および重力の位置エネルギーの基準点をともに $x=0$ として，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）より，

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{3k}\right)^2+mg\frac{mg}{3k}=\frac{1}{2}m\cdot 0^2+\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2+mg\frac{mg}{k}$$
$$\therefore v=\frac{2}{3}g\sqrt{\frac{5m}{k}}\,.$$

[*49] グラフ利用：$W=\dfrac{1}{2}s(-ks-mg)=-\dfrac{1}{2}ks^2-mgs\,.$

[*50] グラフ利用：$W=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{mg}{k}-\dfrac{mg}{3k}\right)\left\{\left(-k\dfrac{mg}{k}-mg\right)+\left(-k\dfrac{mg}{3k}-mg\right)\right\}=-\dfrac{10}{9}\dfrac{(mg)^2}{k}\,.$

8. エネルギー収支⑦（ばねと重力）

図のように，ばね（ばね定数 k）の一端を固定された天井に取り付け，他端を小物体（質量 m）に繋ぐ．物体の運動は鉛直方向に限られるようになっている．鉛直下向きに x 軸を定め，その原点をばねが自然長の位置に定める．重力加速度の大きさを g とする．

I　物体を手で支え，$x = 0$ の位置からゆっくりと鉛直下向きに動かしていくと，物体は位置 $x = d$ で静止した．d を求めよ．

II　位置 $x = d$ にある物体に x 正方向の初速度 v_0 を与えたところ，$x = s\,(> d)$ で折り返した．

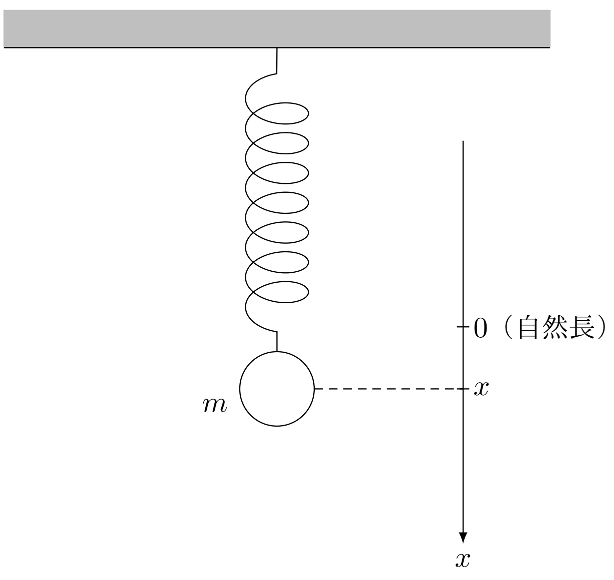
(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，s を求めよ．

(2)　物体，ばね，重力場を合わせて 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）を用いることで，s を求めよ．

III　物体を位置 $x = \dfrac{d}{2}$ にある物体に x 正方向の初速度 v_0 を与えたところ，$x = 2d$ で折り返した．

(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，v_0 を求めよ．

(2)　物体，ばね，重力場を合わせて 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）を用いることで，v_0 を求めよ．



【解答】

I　運動方程式より，

$$m\cdot 0=-kx+mg\,,\qquad \therefore d=\frac{mg}{k}\,.$$

II (1)　物体に作用する力のする仕事 W は[*51*52]，

$$W=\int_{\frac{mg}{k}}^{s}(-kx+mg)\,dx=-\frac{1}{2}ks^2+mgs-\frac{(mg)^2}{2k}\,.$$

物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2-\frac{1}{2}m{v_0}^2=-\frac{1}{2}ks^2+mgs-\frac{(mg)^2}{2k}\,,\qquad \therefore s=\frac{mg}{k}+v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

(2)　物体，ばね，重力場を 1 つの系と見る．弾性力の位置エネルギーの基準点，および重力の位置エネルギーの基準点をともに $x=0$ として，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2+\frac{1}{2}ks^2+mg(-s)=\frac{1}{2}m{v_0}^2+\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2+mg\left(-\frac{mg}{k}\right)$$

$$\therefore s=\frac{mg}{k}+v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

III (1)　物体に作用する力のする仕事 W は[*53]，

$$W=\int_{\frac{mg}{2k}}^{\frac{2mg}{k}}(-kx+mg)\,dx=-\frac{3}{8}\frac{(mg)^2}{k}\,.$$

物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2-\frac{1}{2}m{v_0}^2=-\frac{3}{8}\frac{(mg)^2}{k}\,,\qquad \therefore v_0=\frac{g}{2}\sqrt{\frac{3m}{k}}\,.$$

(2)　物体，ばね，重力場を 1 つの系と見る．弾性力の位置エネルギーの基準点，および重力の位置エネルギーの基準点をともに $x=0$ として，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2+\frac{1}{2}k\left(\frac{2mg}{k}\right)^2+mg\left(-\frac{2mg}{k}\right)=\frac{1}{2}m{v_0}^2+\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{2k}\right)^2+mg\left(-\frac{mg}{2k}\right)$$

$$\therefore v_0=\frac{g}{2}\sqrt{\frac{3m}{k}}\,.$$

[*51] グラフ利用：$W=\frac{1}{2}\left(s-\frac{mg}{k}\right)(-ks+mg)=-\frac{1}{2}ks^2+mgs-\frac{(mg)^2}{2k}\,.$

[*52] W を，$W=-\frac{1}{2}k\left(s-\frac{mg}{k}\right)^2$ と整理すれば，エネルギー収支の式の計算の見通しが良くなる．

[*53] グラフ利用：$W=\frac{1}{2}\left(\frac{2mg}{k}-\frac{mg}{2k}\right)\left\{\left(-k\frac{2mg}{k}+mg\right)+\left(-k\frac{mg}{2k}+mg\right)\right\}=-\frac{3}{8}\frac{(mg)^2}{k}\,.$

9. エネルギー収支⑧（ばねと重力，原点がつりあう位置）

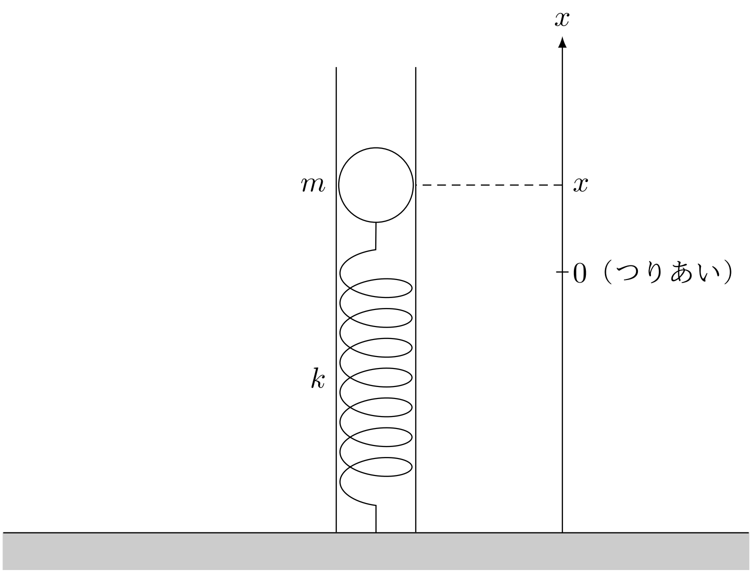
図のように，ばねの一端を固定された床に取り付け，他端を小物体（質量 m）に繋ぐ．小物体とばねは透明な筒の中にあり，物体の運動は鉛直方向に限られるようになっている．鉛直上向きに x 軸を定め，その原点を物体がつりあう位置に定める．物体が弾性力と重力のみを受けてつりあっているとき（原点にあるとき）のばねの縮みを d とする．重力加速度の大きさを g とする．

I　原点においてばねが d だけ縮んで静止することから，ばね定数 k を求めよ．

II　物体を位置 $x = d$ から静かに手を放したところ，$x = 0$ を速さ v で通過した．

(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，v を求めよ．

(2)　物体，ばね，重力場を合わせて 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）を用いることで，v を求めよ．



【解答】

I　物体が位置 x にあるときのばねの伸びは $x-d$ である．運動方程式より，$x=0$ でつりあい（加速度 $a=0$）ゆえ

$$m\cdot 0 = -k(0-d) - mg\,, \qquad \therefore k = \underset{\sim\sim}{\frac{mg}{d}}\,.$$

II (1)　物体にはたらく力は，

$$f = -\frac{mg}{d}(x-d) - mg = -\frac{mg}{d}x\,.$$

よって，物体に作用する力のする仕事 W は[*54]，

$$W = \int_d^0 \left(-\frac{mg}{d}x\right)\,dx = \frac{1}{2}mgd\,.$$

物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = \frac{1}{2}mgd\,, \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim}{\sqrt{gd}}\,.$$

(2)　物体，ばね，重力場を 1 つの系と見る．重力の位置エネルギーの基準点を $x=0$ として，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 + \frac{1}{2}\frac{mg}{d}(0-d)^2 + mg\cdot 0 = \frac{1}{2}m\cdot 0^2 + \frac{1}{2}\frac{mg}{d}\cdot 0^2 + mgd\,, \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim}{\sqrt{gd}}\,.$$

*54 グラフ利用：$W = \dfrac{1}{2}s(-ks-mg) = -\dfrac{1}{2}ks^2 - mgs\,.$

10. エネルギー収支⑨（ばねと重力，原点がつりあう位置）

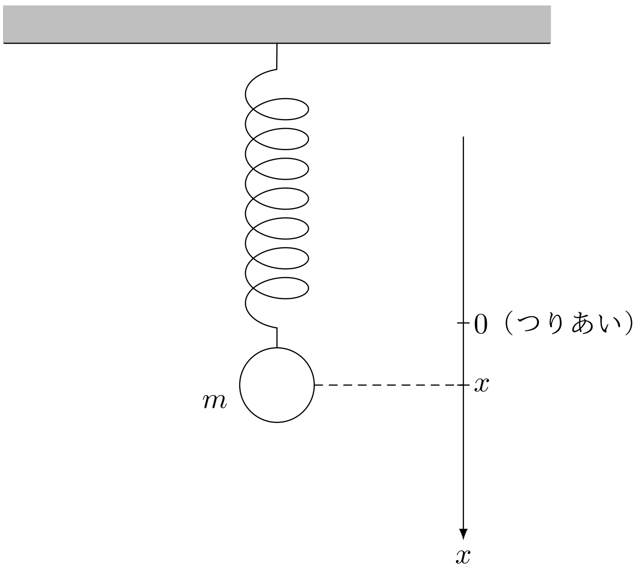
図のように，ばねの一端を固定された天井に取り付け，他端を小物体（質量 m）に繋ぐ．物体の運動は鉛直方向に限られるようになっている．鉛直下向きに x 軸を定め，その原点を物体がつりあう位置に定める．物体が弾性力と重力のみを受けてつりあっているとき（原点にあるとき）のばねの伸びを s とする．重力加速度の大きさを g とする．

I　原点においてばねが s だけ伸びて静止することから，ばね定数 k を求めよ．

II　原点にある物体に x 負方向に大きさ v_0 の初速度を与えたところ，ちょうどばねが自然長となる位置で折り返した．

(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，v_0 を求めよ．

(2)　物体，ばね，重力場を合わせて 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）を用いることで，v_0 を求めよ．



【解答】

I　物体が位置 x にあるときのばねの伸びは $x+s$ である．運動方程式より，$x=0$ でつりあい（加速度 $a=0$）ゆえ

$$m\cdot 0=-k(0+s)+mg\,,\qquad \therefore k=\underset{\sim\sim}{\frac{mg}{s}}\,.$$

II (1)　物体にはたらく力は，

$$f=-\frac{mg}{s}(x+s)+mg=-\frac{mg}{s}x\,.$$

よって，物体に作用する力のする仕事 W は[*55]，

$$W=\int_0^{-s}\left(-\frac{mg}{s}x\right)dx=-\frac{1}{2}mgs\,.$$

物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2-\frac{1}{2}m{v_0}^2=-\frac{1}{2}mgs\,,\qquad \therefore v_0=\underset{\sim\sim}{\sqrt{gs}}\,.$$

(2)　物体，ばね，重力場を 1 つの系と見る．重力の位置エネルギーの基準点を $x=0$ として，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2+\frac{1}{2}\frac{mg}{s}\cdot 0^2+mgs=\frac{1}{2}m{v_0}^2+\frac{1}{2}\frac{mg}{s}(0+s)^2+mg\cdot 0\,,\qquad \therefore v_0=\underset{\sim\sim}{\sqrt{gs}}\,.$$

[*55] グラフ利用：$W=\frac{1}{2}s(-ks-mg)=-\frac{1}{2}ks^2-mgs\,.$

11. エネルギー収支⑩（ばねと重力，復習）

図のように，ばね（ばね定数 k）の一端を固定された天井に取り付け，他端を小物体（質量 m）につなぐ．鉛直下向きに x 軸を定め，その原点をばねが自然長のときの物体の位置に取る．重力加速度の大きさを g とする．

I　物体を手で支え，$x = 0$ の位置からゆっくりと鉛直下向きに動かしていくと，物体は位置 $x = x_0$ で静止した．x_0 を求めよ．

II　時刻 $t = 0$ に $x = x_0$ にある物体に x 軸正の向きに大きさ v_0 の初速度を与えたところ，物体は位置 $x = x_1$ で折り返した．

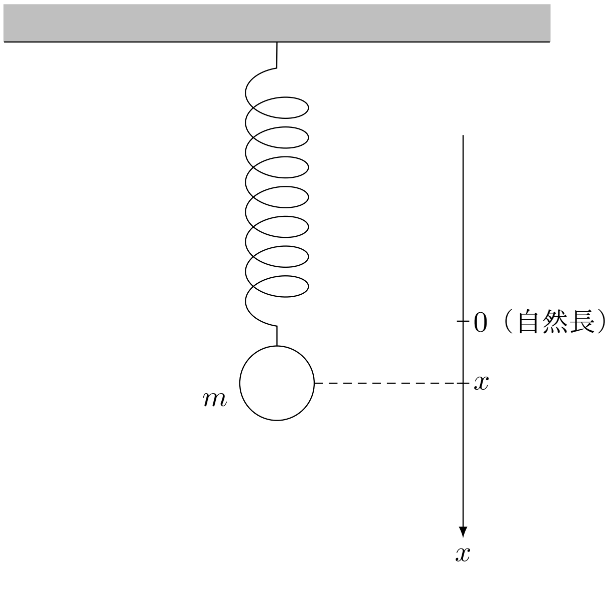
(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，x_1 を求めよ．

(2)　物体，ばね，重力場を合わせて 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）を用いることで，x_1 を求めよ．

III　物体を位置 $x = 0$ の位置から静かに手を放した．位置 $x = \left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) x_0$ における物体の速さを v とする．

(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，v を求めよ．

(2)　物体，ばね，重力場を合わせて 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）を用いることで，v を求めよ．



【解答】

I　運動方程式より，

$$m\cdot 0=-kx_0+mg\,,\qquad \therefore x_0=\underline{\frac{mg}{k}}\,.$$

II (1)　物体に作用する力のする仕事 W は[*56][*57]，

$$W=\int_{-\frac{mg}{k}}^{x_1}(-kx+mg)\ dx=-\frac{1}{2}k{x_1}^2+mgx_1-\frac{1}{2}\frac{(mg)^2}{k}\,.$$

物体のエネルギー収支の式より[*58]，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2-\frac{1}{2}m{v_0}^2=-\frac{1}{2}k{x_1}^2+mgx_1-\frac{1}{2}\frac{(mg)^2}{k}\,,\qquad \therefore x_1=\underline{\frac{mg}{k}+v_0\sqrt{\frac{m}{k}}}\,.$$

(2)　物体，ばね，重力場を 1 つの系と見る．弾性力の位置エネルギーの基準点，および重力の位置エネルギーの基準点をともに $x=0$ として，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2+\frac{1}{2}k{x_1}^2+mg(-x_1)=\frac{1}{2}m{v_0}^2+\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)+mg\left(-\frac{mg}{k}\right)$$
$$\therefore x_1=\underline{\frac{mg}{k}+v_0\sqrt{\frac{m}{k}}}\,.$$

III (1)　弾性力のする仕事 W は[*59]

$$W=\int_0^{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{mg}{k}}(-kx+mg)\ dx=\frac{1}{8}\frac{(mg)^2}{k}\,.$$

物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}m\cdot 0^2=\frac{1}{8}\frac{(mg)^2}{k}\,,\qquad \therefore v=\underline{\frac{g}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}}\,.$$

(2)　物体，ばね，重力場を 1 つの系と見る．弾性力の位置エネルギーの基準点，および重力の位置エネルギーの基準点をともに $x=0$ として，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）より，

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k\left\{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{mg}{k}\right\}^2+mg\left\{-\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{mg}{k}\right\}=0\,,\qquad \therefore v=\underline{\frac{g}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}}\,.$$

[*56] グラフ利用：$W=\frac{1}{2}(x_1-x_0)(-kx_1+mg)=-\frac{1}{2}k{x_1}^2+mgx_1-\frac{1}{2}\frac{(mg)^2}{k}$.

[*57] W を，$W=-\frac{1}{2}k\left(x_1-\frac{mg}{k}\right)^2$ と整理すれば，エネルギー収支の式の計算の見通しが良くなる．

[*58] 2 次方程式の解の公式を利用．このとき，$x_1>x_0$ より，正の解を選択．

[*59] グラフ利用：$W=\frac{1}{2}mg\frac{mg}{k}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{mg}{k}\left\{-k\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{mg}{k}+mg\right\}=\frac{1}{8}\frac{(mg)^2}{k}$.

12. エネルギー収支⑪（ばねと重力，斜め）

図のように，ばね（ばね定数 k）の一端を斜面（傾斜角 θ）の端に固定された壁に取り付け，他端を小物体（質量 m）につなぐ．斜面上向きに x 軸を定め，その原点をばねが自然長のときの物体の位置に取る．重力加速度の大きさを g とする．

I　物体を手で支え，$x = 0$ の位置からゆっくりと斜面下向きに動かしていくと，物体は位置 $x = x_0$ で静止した．x_0 を求めよ．

II　時刻 $t = 0$ に $x = x_0$ にある物体に x 軸負の向きに大きさ v_0 の初速度を与えたところ，物体は $x_1 \leq x \leq x_2\,(x_1 < x_2)$ の間を周期運動した．

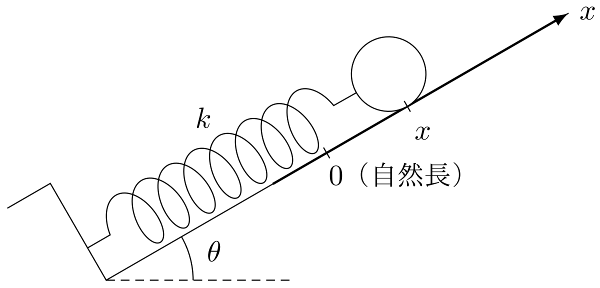
(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，x_1，x_2 をそれぞれ求めよ．

(2)　物体，ばね，重力場を合わせて 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）を用いることで，x_1，x_2 をぞれぞれ求めよ．

III　物体を位置 $x = 0$ の位置から静かに手を放した．位置 $x = \dfrac{x_0}{4}$ における物体の速さを v とする．

(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，v を求めよ．

(2)　物体，ばね，重力場を合わせて 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）を用いることで，v を求めよ．



【解答】

I (1)　運動方程式より，

$$m\cdot 0=-kx_0-mg\sin\theta\,,\qquad \therefore x_0=\underset{\sim\sim\sim}{-\frac{mg}{k}\sin\theta}\,.$$

II (1)　物体に作用する力が位置 x に至るまでにする仕事 W は[*60]，

$$W=\int_{-\frac{mg}{k}\sin\theta}^{x}(-kx-mg\sin\theta)\,dx=\underbrace{-\frac{1}{2}kx^2-mgx\sin\theta+\frac{1}{2}\frac{mg}{k}\sin\theta}_{=-\frac{1}{2}k\left(x+\frac{mg}{k}\sin\theta\right)^2}\,.$$

物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2-\frac{1}{2}m{v_0}^2=-\frac{1}{2}k\left(x_1+\frac{mg}{k}\sin\theta\right)^2\,,\qquad \therefore x=-\frac{mg}{k}\sin\theta\pm v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

$x_2>x_1$ より，

$$x_1=\underset{\sim\sim\sim}{-\frac{mg}{k}\sin\theta-v_0\sqrt{\frac{m}{k}}}\,,\quad x_2=\underset{\sim\sim\sim}{-\frac{mg}{k}\sin\theta+v_0\sqrt{\frac{m}{k}}}\,.$$

(2)　物体とばねと重力場を 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m\cdot 0^2+\frac{1}{2}kx^2+mgx\sin\theta&=\frac{1}{2}m{v_0}^2+\frac{1}{2}k{x_0}^2+mgx_0\sin\theta\\ \frac{1}{2}kx^2+mgx\sin\theta&=\frac{1}{2}m{v_0}^2+\frac{1}{2}\frac{(mg\sin\theta)^2}{k}\\ \therefore x_1=\underset{\sim\sim\sim}{-\frac{mg}{k}\sin\theta-v_0\sqrt{\frac{m}{k}}}\,,&\quad x_2=\underset{\sim\sim\sim}{-\frac{mg}{k}\sin\theta+v_0\sqrt{\frac{m}{k}}}\,.\end{aligned}$$

III (1)　弾性力，および重力のする仕事 W は[*61]

$$\begin{aligned}W&=\int_0^{-\frac{mg}{4k}\sin\theta}(-kx-mg\sin\theta)\,dx\\ &=-\frac{1}{2}k\left(-\frac{mg}{4k}\sin\theta\right)^2-mg\sin\theta\left(-\frac{mg}{4k}\sin\theta\right)+\frac{1}{2}k\cdot 0^2+mg\sin\theta\cdot 0\\ &=\frac{7}{32}\frac{(mg\sin\theta)^2}{k}\,.\end{aligned}$$

物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}m\cdot 0^2=\frac{7}{32}\frac{(mg)^2\sin^2\theta}{k}\,,\qquad \therefore v=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{g\sin\theta}{4}\sqrt{\frac{7m}{k}}}\,.$$

[*60] グラフ利用：$W=\frac{1}{2}(x-x_0)(-kx-kx_0)$.

[*61] グラフ利用：$W=\frac{1}{2}\frac{x_0}{4}\left\{mg\sin\theta+\left(-\frac{1}{4}kx_0-mg\sin\theta\right)\right\}=\frac{7}{32}\frac{(mg\sin\theta)^2}{k}$.

(2)　物体とばねを 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{x_0}{4}\right)^2 + mg\frac{x_0}{4}\sin\theta = \frac{1}{2}m\cdot 0^2 + \frac{1}{2}k\cdot 0^2 + mg\cdot 0\,,$$

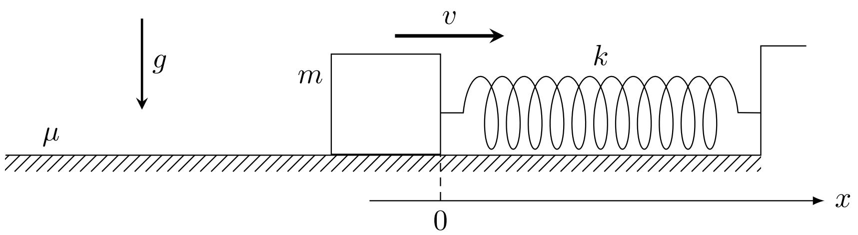
$$\therefore v = \underline{\frac{g\sin\theta}{4}\sqrt{\frac{7m}{k}}}\,.$$

13. エネルギー収支⑫（ばねと摩擦）

図のように，水平右向きに x 軸を定める．物体（質量 m）を粗い床面の上に置き，x 正方向に初速 v で打ち出したところ，ばねが s だけ縮んだ位置で折り返した．重力加速度の大きさを g，物体と床の間の動摩擦係数を μ とする．

(1)　s を，物体のエネルギー収支を計算することにより求めよ．

(2)　s を，物体とばねからなる力学的エネルギー収支を計算することにより求めよ．



【解答】

(1)　物体が x 正方向に滑るとき，位置 x にある物体にはたらく力は $f=-kx-\mu N=-kx-\mu mg$ となる[*62]である．よって，物体のエネルギー収支より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2-\frac{1}{2}mv^2=\int_0^s(-kx-\mu mg)\,dx=-\frac{1}{2}ks^2-\mu mgs$$

$$\therefore s=\frac{\mu mg}{k}\left(-1+\sqrt{1+\frac{k}{m}\left(\frac{v}{\mu g}\right)^2}\right).$$

(2)　物体とばねからなる系は，摩擦から仕事をされる．よってこの系のエネルギー収支は，

$$\left(\frac{1}{2}m\cdot 0^2-\frac{1}{2}mv^2\right)+\left(\frac{1}{2}ks^2-\frac{1}{2}k\cdot 0^2\right)=\mu mgs\cos\pi=-\mu mgs$$

$$\therefore s=\frac{\mu mg}{k}\left(-1+\sqrt{1+\frac{k}{m}\left(\frac{v}{\mu g}\right)^2}\right).$$

[*62] 鉛直方向のつりあいより垂直抗力の大きさ N は $N=mg$ である．

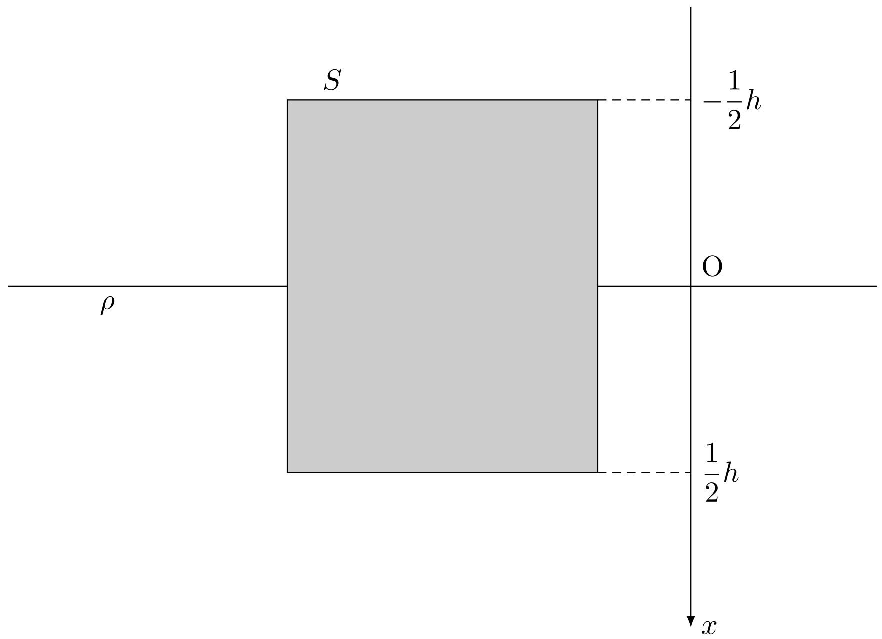
14. エネルギー収支⑬（浮力）

物体（断面積 S，高さ h）を液体（密度 ρ）の上に浮かべたところ，物体は水面から $\dfrac{1}{2}h$ だけ沈み静止した．鉛直下向きに x 軸を定め，物体の位置 x は物体底面の位置とし，水面を原点に取る．重力加速度の大きさを g とし，液面の高さの変化を無視する．

(1)　物体の質量 m を求めよ．

(2)　物体の底面が $0 \leq x \leq h$ にあるとき，物体にはたらく力 f を x を含む式で表せ．

(3)　物体に外力を加え，力のつりあいを保ちながら $x = \dfrac{1}{2}h$ から $x = h$ まで押し込むとき，外力が物体にした仕事 W を求めよ．



【解答】

(1)　大気圧を P_0 とすれば，

$$m \cdot 0 = mg + P_0 S - \left(P_0 + \rho \cdot \frac{1}{2}hg\right) S\,, \qquad \therefore m = \underline{\frac{1}{2}\rho Sh}\,.$$

また，浮力の公式を用いれば，

$$m \cdot 0 = mg - \rho \cdot \frac{1}{2}hgS\,, \qquad \therefore m = \underline{\frac{1}{2}\rho Sh}\,.$$

(2)　物体にはたらく力は，

$$f = mg - \rho Sxg = \frac{1}{2}\rho Shg - \rho Sxg = \underline{\frac{1}{2}\rho Shg\left(1 - \frac{2x}{h}\right)}\,.$$

(3)　物体に加える外力を F とすれば，

$$m \cdot 0 = F + mg - \rho Sgx = F + \frac{1}{2}\rho Shg - \rho Sgx\,, \qquad \therefore F = -\frac{1}{2}\rho Shg + \rho Sgx\,.$$

上記の式より，外力 F は定数ではなく位置 x に依存するため積分する他ない．よって，仕事の定義より，

$$\begin{aligned} W = \int_{\frac{h}{2}}^{h} F\,dx &= \int_{\frac{h}{2}}^{h} \left(-\frac{1}{2}\rho Shg + \rho Sgx\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\rho Shg \int_{\frac{h}{2}}^{h} \left(-1 + \frac{2x}{h}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\rho Shg \left[-x + \frac{x^2}{h}\right]_{\frac{h}{2}}^{h} \\ &= \underline{\frac{1}{8}\rho Sgh^2}\,. \end{aligned}$$

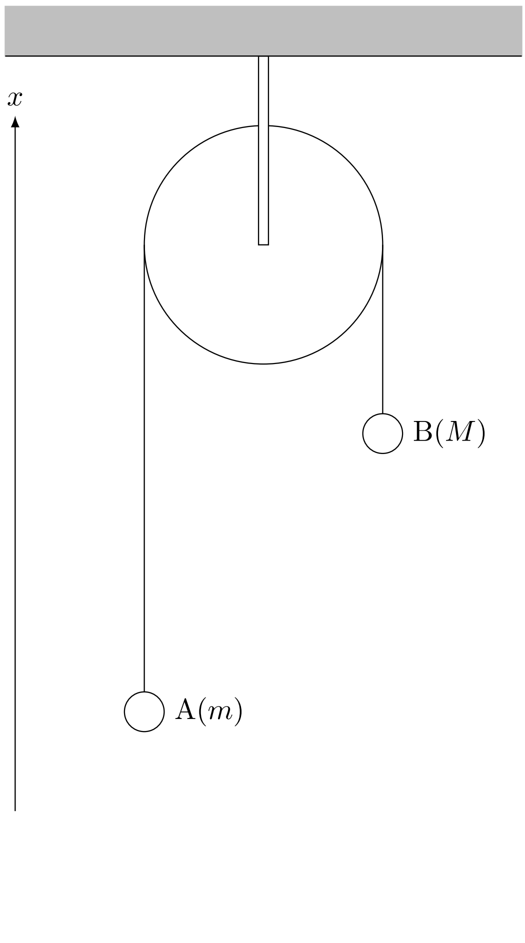
15. 複数の物体からなる系

物体 A（質量 m）と物体 B（質量 $M\,(> m)$）を固定された軽い滑車にかけ，静かに手を放した．鉛直上向きに x 軸を定める．糸と滑車の間の摩擦は無視し，重力加速度の大きさを g とする．物体 A が h 上昇したときの物体 A の速度を v とする．

(1) 張力の大きさを T とする．物体 A が h 上昇する間に，張力が A にした仕事 W_{A}，および張力が B にした仕事 W_{B} を求めよ．

(2) A と B を合わせて 1 つの系を見たとき，この系の力学的エネルギーは保存する．v を求めよ．

(3) おまけ：時間追跡（運動方程式）により得られた結果が，上記の結果と整合していることを確認せよ．



【メモ】

各物体のみに注目すると張力の仕事が現れるが，全体に注目することで張力の仕事は相殺する．

【解答】

(1)　仕事の定義より，

$$W_{\mathrm{A}} = \underset{\sim\sim}{Th}\,,\quad W_{\mathrm{B}} = \underset{\sim\sim\sim}{-Th}\,.$$

(2)　力学的エネルギー保存則より[*63][*64]，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + mgh + Mg\cdot 0 = \frac{1}{2}m\cdot 0^2 + \frac{1}{2}M\cdot 0^2 + mg\cdot 0 + Mgh$$
$$\therefore v = \sqrt{\frac{2(M-m)}{M+m}gh}\,.$$

(3)　運動方程式・束縛条件より，

$$\begin{cases} \mathrm{A}: ma = T - mg\,, \\ \mathrm{B}: M(-a) = T - Mg\,, \end{cases} \qquad \therefore a = \frac{M-m}{M+m}g\,,\quad T = \frac{2Mm}{M+m}g\,.$$

加速度一定より，$x_{\mathrm{A}}(0) = 0$ として，$v_{\mathrm{A}}(0) = 0$ より[*65]，

$$\begin{cases} x_{\mathrm{A}}(t) = \dfrac{1}{2}at^2\,, \\ v_{\mathrm{A}}(t) = at\,, \end{cases} \qquad \therefore t = \sqrt{\frac{2h}{a}}\,,\quad v = \sqrt{\frac{2(M-m)}{M+m}gh}\,.$$

*63 各物体のエネルギー収支の式は，

$$\begin{cases} \mathrm{A}: \dfrac{1}{2}mv^2 - 0 = Th + mg(-h)\,, \\ \mathrm{B}: \dfrac{1}{2}MV^2 - 0 = T(-h) + Mgh\,. \end{cases}$$

2 式の和を取って整理すると，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + mgh + Mg(-h) = 0$$

となり，2 物体と重力場からなる系の力学的エネルギー保存則を得る．

*64 束縛条件（糸の長さが一定の条件）より両物体の速度は大きさが等しく逆向きである．糸が出てきたら束縛条件を頭にちらつかせるように．

*65 このとき B は，$x_{\mathrm{B}}(0) = h$，$v_{\mathrm{B}}(0) = 0$ である．

2

力学後半

第 2 部力学後半では，力学前半で学習した内容を基礎として幅広い力学現象を扱う．第 1 章では，数学の学習進度の都合上，力学前半では扱うことができなかった運動の時間追跡について扱う．また，数学の学習がある程度進んだことにより，仕事の計算も（受験の範囲で）より一般的な分類をする．第 2 章では，多体系の運動の特に 2 物体系の運動を扱う．2 物体系の運動は，個々の運動方程式を見てもそれらを解くことが困難であることが多い．第 1 章の学習でも言及するように，時間追跡ができないような運動は保存則を利用する他ない．そこで，多体系の運動も保存則を用いて解析することとなる．なお，衝突や分裂といった現象は例外的に扱うことに注意する．第 3 章では，円運動を扱う．円運動は束縛条件から得られる加速度を公式として覚える高校範囲の力学では例外的な位置付けとなっている．第 4 章では，中心力場での物体の運動を扱う．中心力場の運動は高校範囲では時間追跡が不可能なためにこちらも保存則に頼る他ない（円軌道の場合は円運動の定石に従う）．また，ここで面積速度という物理量を導入し，中心力場での運動では面積速度が保存すること（ケプラー第 2 法則）を利用する．第 5 章では，動く座標系内部での物体の運動を扱う．この章では，これまでも意識してきた「どの座標系を選ぶか」を，より意識的に学習する（選択する座標系によって運動方程式の形が変わるため）．第 6 章では，剛体の運動のうち，つりあい（およびつりあいが破れる瞬間）だけを扱う．剛体のつりあわないような場合は，タイミングを見て紹介をする．

§2.1 運動の時間追跡

第 1 章では，位置，速度，加速度の定義を再度確認し，高校範囲において時間追跡が可能な運動を扱う．時間追跡による運動の解析とは運動方程式を利用したものであり，思想的には，運動を微小に刻み，微小な運動を考察することで微小な運動の積み重ねとしての全体の運動を調べるものである．高校範囲で時間追跡可能な運動は，①等加速度運動，②単振動，③速度の 1 次に比例する空気抵抗型の運動の 3 つに分類される．特に②，③は，単純な時間追跡の方法では困難が生じるために，運動方程式を微分方程式として解くことになる（実際は方程式の解を暗記して使うことになる）．

■各種微分公式のまとめ

- 合成関数の微分：

  関数 $f(x)$ に，関数 $g(x)$ を合成した合成関数を $f(g)$ と書き，$f(g)$ の x に関する微分は以下のように連鎖的に行う．

$$\frac{df(g)}{dx} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg(x)}{dx}\,.$$

  例えば，$f(x) = \sin x$，$g(x) = 3x^2$ とすると，$f(g) = \sin g = \sin(3x^2)$ であり，

$$\frac{df(g)}{dx} = \frac{d}{dg}(\sin g)\frac{d}{dx}(3x^2) = \cos g \cdot 6x = 6x\cos(3x^2)\,.$$

  計算手順としては，（外側の微分）×（1 つ内側の微分）×（更に 1 つ内側の微分）× $\cdots$ を行っていると思えばよい．

- 初等関数の微分公式：

$$\frac{d}{dt}\{\sin(at)\} = a\cos(at)\,, \qquad \frac{d}{dt}\{\cos(at)\} = -a\sin(at)\,,$$
$$\frac{d}{dt}(e^{at}) = ae^{at}\,, \qquad \frac{d}{dt}\{\log(at)\} = \frac{1}{t}\,.$$

  ここで，微分結果にある係数 a は，合成関数の微分によって生じている（詳しくは授業ノートを参照）．

■簡単なまとめ

- 時間追跡の分類：

❶ 加速度 a が t の冪関数で与えられるとき：

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a\,dt\,, \quad x(t) = x(0) + \int_0^t v\,dt\,.$$

❷ ω，x_0 を定数として $a = -\omega^2(x - x_0)$ と与えられるとき（単振動型）：

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\,, \\ v(t) = \dfrac{dx}{dt} = C\omega\cos(\omega t) - D\omega\sin(\omega t)\,. \end{cases}$$

x の解の形（三角関数の線形結合）だけ覚える（v は微分公式によって導けるようにすればよい）．C，D は定数であり，$t = 0$ における位置 x と速度 v（初期条件）から決定する．

❸ γ，v_f を定数として $a = \gamma(v - v_\mathrm{f})$ と与えられるとき（空気抵抗型）：

$$v = v_\mathrm{f} + Ce^{\gamma t}$$

v の形を覚える．C は定数であり，$t = 0$ における速度 v（初期条件）から決定する．この型の微分方程式は，電気回路で主に用いることとなる．

- 仕事の計算の分類：

$$W = \begin{cases} \text{定義から直接計算} \begin{cases} f\ \text{が一定：（力の大きさ）}\times\text{（変位の大きさ）}\cos\theta \\ f\ \text{が一定でない：}\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f\,dx \end{cases} \\ \text{エネルギー収支から逆算} \end{cases}$$

エネルギー収支から逆算する場合，どこまでを 1 つの系と見るかが重要となる．

1. 今後使うための微分・積分計算の練習

次の関数 x を，t に関して微分，および積分せよ．積分定数は C を用い，x，t 以外の文字は全て定数とし，以下の微分公式を用いてよい（k は実数の定数）*1.

$$\frac{d}{dt}(t^k) = kt^{k-1}\,, \qquad \frac{d}{dt}\{\sin(kt)\} = k\cos(kt)\,, \qquad \frac{d}{dt}\{\cos(kt)\} = -k\sin(kt)\,.$$

(1)　$x = t^3$

(2)　$x = a\sqrt{t}$

(3)　$x = A\sin(\omega t)$

(4)　$x = A\cos(\omega t)$

*1 微分公式の証明はノートを参照.

【解答】

(1)　微分公式より，

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3) = \underset{\sim\sim}{3t^2}\,.$$

微分の逆演算（不定積分）を考えて，

$$\int x\,dt = \int t^3\,dt = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{4}t^4 + C}\,.$$

(2)　微分公式より，

$$\frac{dx}{dt} = a\frac{d}{dt}(\sqrt{t}) = a\frac{d}{dt}(t^{\frac{1}{2}}) = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{a}{2\sqrt{t}}}\,.$$

不定積分は，

$$\int x\,dt = \int a\sqrt{t}\,dt = a\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{2}{3}at\sqrt{t} + C}\,.$$

(3)　微分公式より，

$$\frac{dx}{dt} = A\frac{d}{dt}\{\sin(\omega t)\} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{A\omega\cos(\omega t)}\,.$$

不定積分は[*2]，

$$\int x\,dt = \int A\sin(\omega t)\,dt = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{-\frac{A}{\omega}\cos(\omega t) + C}$$

(4)　微分公式より，

$$\frac{dx}{dt} = A\frac{d}{dt}\{\cos(\omega t)\} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{-A\omega\sin(\omega t)}\,.$$

不定積分は，

$$\int x\,dt = \int A\cos(\omega t)\,dt = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{A}{\omega}\sin(\omega t) + C}$$

[*2] 原始関数を微分することで元の関数 x に戻ることを確認しながら計算する．

2. 時間追跡①

以下の加速度 a を時刻 t で積分することで，速度 v，位置 x をそれぞれ求めよ．a，t 以外の文字は全て定数とし，初期条件（時刻 $t=0$ での位置 x，および速度 v）は $x=x_0$，$v=v_0$ とする．

(1)　$a=\alpha$

(2)　$a=\alpha+\beta t$

(3)　$a=\gamma\sqrt{t}$

【解答】

(1)　両辺 t で積分して，

$$v(t) - v(0) = \int_0^t a\,dt = \int_0^t \alpha\,dt = \alpha t$$
$$\therefore v = \underset{\sim\sim\sim\sim}{v_0 + \alpha t}\,,$$
$$x(t) - x(0) = \int_0^t v\,dt = \int_0^t (v_0 + \alpha t)\,dt = v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$
$$\therefore x = \underset{\sim\sim\sim\sim}{x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2}\,.$$

(2)　両辺 t で積分して，

$$v(t) - v(0) = \int_0^t a\,dt = \int_0^t (\alpha + \beta t)\,dt = \alpha t + \frac{1}{2}\beta t^2$$
$$\therefore v = \underset{\sim\sim\sim\sim}{v_0 + \alpha t + \frac{1}{2}\beta t^2}\,.$$
$$x(t) - x(0) = \int_0^t v\,dt = \int_0^t \left(v_0 + \alpha t + \frac{1}{2}\beta t^2\right)\,dt = v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 + \frac{1}{6}\beta t^3$$
$$\therefore x = \underset{\sim\sim\sim\sim}{x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 + \frac{1}{6}\beta t^3}\,.$$

(3)　両辺 t で積分して，

$$v(t) - v(0) = \int_0^t a\,dt = \int_0^t \gamma\sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}\gamma t\sqrt{t}$$
$$\therefore v = \underset{\sim\sim\sim\sim}{v_0 + \frac{2}{3}\gamma t\sqrt{t}}\,.$$
$$x(t) - x(0) = \int_0^t v\,dt = \int_0^t \left(v_0 + \frac{2}{3}\gamma t\sqrt{t}\right)\,dt = v_0 t + \frac{4}{15}\gamma t^2\sqrt{t}$$
$$\therefore x = \underset{\sim\sim\sim\sim}{x_0 + v_0 t + \frac{4}{15}\gamma t^2\sqrt{t}}\,.$$

3. 時間追跡②

x 軸上にある小物体（質量 m）に，時刻 $t=0$ に質量と時刻に比例した外力 $F=-kmt$（m は質量，k は定数）を x 正方向に加えた．初期条件を $x=0$，$v=v_0$ とする．$t>0$ の運動について考える．

(1)　物体の加速度 a を求めよ．

(2)　時刻 t における物体の速度 v，および位置 x を求めよ．

(3)　物体が x 軸正の方向へ原点から最も遠ざかる時刻を $t=t_1$，そのときの位置を $x=x_1$ とする．t_1，x_1 を求めよ．

(4)　物体が再び原点を通過する時刻を $t=t_2$，そのときの速度を $v=v_2$ とする．t_2，v_2 を求めよ．

【解答】

(1)　運動方程式より，

$$ma=-kmt\,,\qquad \therefore a=\underline{-kt}\,.$$

(2)　それぞれ時間追跡を行って，

$$v(t)-v(0)=\int_0^t a\,dt=\int_0^t -kt\,dt=-\frac{1}{2}kt^2$$
$$\therefore v=\underline{v_0-\frac{1}{2}kt^2}\,.$$
$$x(t)-x(0)=\int_0^t v\,dt=\int_0^t\left(v_0-\frac{1}{2}kt^2\right)dt=v_0t-\frac{1}{6}kt^3$$
$$\therefore x=\underline{v_0t-\frac{1}{6}kt^3}\,.$$

(3)　$t=t_1$ において $v=0$ より，$t>0$ を考慮して，

$$v_0-\frac{1}{2}kt^2=0\,,\qquad \therefore t_1=\underline{\sqrt{\frac{2v_0}{k}}}\,,\ \ x_1=x(t_1)=\underline{\frac{2v_0}{3}\sqrt{\frac{2v_0}{k}}}\,.$$

(4)　$t=t_2$ において $x=0$ より，$t>0$ を考慮して，

$$v_0t-\frac{1}{6}kt^3=0\,,\qquad \therefore t_2=\underline{\sqrt{\frac{6v_0}{k}}}\,,\ \ v_2=v(t_2)=\underline{-2v_0}\,.$$

$\mathit{4}$. 仕事の計算

物体に位置 $x=a$ から $x=b$ まで以下の力 F を加えたとき，物体がされた仕事 W を計算せよ．x，t 以外は定数とする．

(1)　$F=F_0$

(2)　$F=kx$

(3)　$F=A\sqrt[3]{x}$

(4)　$F=At$，$x=\sqrt{Bt}$

【解答】

(1)　仕事の定義より[*3]，

$$W=\int_a^b F_0\,dx=\underset{\sim\sim\sim}{F_0(b-a)}\,.$$

(2)　仕事の定義より，

$$W=\int_a^b kx\,dx=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}k(b^2-a^2)}\,.$$

(3)　仕事の定義より，

$$W=\int_a^b A\sqrt[3]{x}\,dx=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{3}{4}A(b^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{4}{3}})}\,.$$

(4)　$t=\dfrac{x^2}{B}$ より，$F=\dfrac{A}{B}x^2$ と書ける．よって，仕事の定義より，

$$W=\int_a^b \frac{A}{B}x^2\,dx=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{A}{3B}(b^3-a^3)}\,.$$

[*3] 一定の力ゆえ，わざわざ積分する必要はない（今回は導入として一応積分計算を載せた）．

5．（復習）時間追跡とエネルギー収支の違い①

x 軸上を動く小物体（質量 m）について，その位置を x，速度を v，加速度を a と記し，それらは全て時刻 t の関数であるとする．$t=0$ で小物体は原点で静止しており，$t>0$ の運動について考える．物体に一定の力 F_0 を加える．

I　時間追跡で考える．

(1)　運動方程式から加速度を求めよ．また，v，x を，それぞれ時刻 t の関数として表せ．

(2)　$x=A$ を満たす時刻 t を求め，その時刻での速度 v を A を含む式で表せ．

(3)　v，x の 2 式について時刻 t を消去することで，v と x の間の直接の関係式を記せ．

II　エネルギー収支で考える．

(1)　原点にある小物体が位置 x まで運動する間にされた仕事 W を求めよ．

(2)　エネルギー収支の式が I(3) の式と整合していることを確認せよ．

(3)　小物体のエネルギー収支を考え，位置 $x=A$ にある小物体の速さ v を求めよ．

【解答】

I (1)　運動方程式より，

$$ma = F_0\,, \qquad \therefore a = \underset{\sim\sim}{\frac{F_0}{m}}\,.$$

加速度一定より[*4]，

$$v = \underset{\sim\sim}{\frac{F_0}{m}t}\,,\quad x = \underset{\sim\sim}{\frac{F_0}{2m}t^2}\,.$$

(2)　$x = A$ を解いて，

$$t = \underset{\sim\sim}{\sqrt{\frac{2mA}{F_0}}}\,,\quad v = \underset{\sim\sim}{\sqrt{\frac{2F_0A}{m}}}\,.$$

(3)　$t = \dfrac{m}{F_0}v$ より，

$$\underset{\sim\sim}{x = \frac{m}{2F_0}v^2}\,.$$

II (1)　仕事の定義より，

$$W = \underset{\sim\sim}{F_0x}\,.$$

(2)　小物体のエネルギー収支の式より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 &= F_0x \\ \therefore x &= \underset{\sim\sim}{\frac{m}{2F_0}v^2}\,.\end{aligned}$$

(3)　小物体のエネルギー収支を考えて，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = F_0A\,, \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim}{\sqrt{\frac{2F_0A}{m}}}\,.$$

[*4] わざわざ積分してもいいけど，等加速度運動の時間追跡の結果は以下の 2 つの「公式」として既に暗記しているのでそれを用いる．

$$\begin{cases} v = v(0) + at\,, \\ x = x(0) + v(0)t + \dfrac{1}{2}at^2\,. \end{cases}$$

6. 時間追跡とエネルギー収支の違い②（やってもやらなくても）

x 軸上を動く小物体（質量 m）について，その位置を x，速度を v，加速度を a と記し，それらは全て時刻 t の関数であるとする．$t = 0$ で小物体は原点で静止しており，$t > 0$ の運動について考える．小物体に時刻 t に比例する力 $F = kmt$（k は定数）を加える．

I　時間追跡で考える．

(1)　運動方程式から加速度 a を求めよ．また，v，x を，それぞれ時刻 t の関数として表せ．

(2)　$x = A$ を満たす時刻 t を求め，その時刻での速度 v を A を含む式で表せ．

(3)　v，x の 2 式について時刻 t を消去することで，x を v を含む式で表せ．

II　エネルギー収支で考える．

(1)　I(1) を利用し，小物体にはたらく力を x の関数として表せ．また，原点にある物体が位置 x まで運動する間にされた仕事 W を求めよ．

(2)　エネルギー収支の式が I(3) の式と整合していることを確認せよ．

(3)　物体のエネルギー収支を考え，位置 $x = A$ にある物体の速さ v を求めよ．

【解答】

I (1)　運動方程式より，

$$ma = kmt\,, \qquad \therefore a = \underset{\sim}{kt}\,.$$

時間追跡をして，

$$v = \underline{\frac{1}{2}kt^2}\,, \quad x = \underline{\frac{1}{6}kt^3}\,.$$

(2)　$x = A$ を解いて，

$$t = \underline{\sqrt[3]{\frac{6A}{k}}}\,, \quad v = \underline{\sqrt[3]{\frac{9}{2}kA^2}}\,.$$

(3)　$t = \sqrt{\dfrac{2v}{k}}$ より，

$$\underline{x = \frac{v}{3}\sqrt{\frac{2v}{k}}}\,.$$

II (1)　I(1) より，

$$F = \underline{m\sqrt[3]{6k^2x}}\,.$$

仕事の定義より，

$$W = \int_0^x m\sqrt[3]{6k^2x}\,dx = \underline{\frac{3}{4}mx\sqrt[3]{6k^2x}}\,.$$

(2)　小物体のエネルギー収支の式は，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 &= \frac{3}{4}mx\sqrt[3]{6k^2x}\\ v^2 &= \frac{3^4}{2^2}k^2x^4\\ \therefore x &= \underline{\frac{v}{3}\sqrt{\frac{2v}{k}}}\,.\end{aligned}$$

(3)　小物体のエネルギー収支を考えて，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = \frac{3}{4}mA\sqrt[3]{6k^2A}\,, \qquad \therefore v = \underline{\sqrt[3]{\frac{9}{2}kA^2}}\,.$$

7. 単振動の時間追跡①

図のように，ばね（ばね定数 k，質量無視）の一端を固定された壁に取り付け，他端を小物体（質量 m）につなぐ．水平右向きに x 軸を定め，その原点をばねが自然長のときの物体の位置に取る．時刻 $t=0$ に原点にある物体に，x 軸正の向きに大きさ v_0 の初速度を与えた．

(1)　位置 x にある小物体がばねから受ける弾性力が向きを考慮して $f=-kx$ と与えられることを，(i) ばねが伸びているとき，(ii) ばねが縮んでいるとき，と場合分けをして確認せよ．

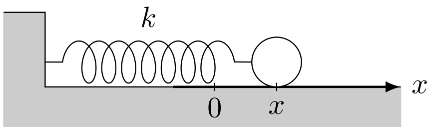
(2)　物体が位置 x にあるときの物体の加速度を a とする．物体の運動方程式を立式せよ．

(3)　物体の位置 x を時刻 t の関数として表せ．また，位置 x を時刻 t で微分することにより，速度 v を時刻 t の関数として表せ．なお，必要であれば以下の微分公式を用いてよい．

$$\frac{d}{dt}\{\sin(\omega t)\}=\omega\cos(\omega t)\,,\quad \frac{d}{dt}\{\cos(\omega t)\}=-\omega\sin(\omega t)\,.$$

(4)　単振動の周期 T を求めよ．

(5)　1 回目に物体の速度が $-\frac{\sqrt{3}}{2}v_0$ となったときの時刻 t を求めよ．また，そのときの位置 x を求めよ．



【解答】

(1)　ばねが伸びているとき，$x>0$ で弾性力の大きさは $k|x|$，向きは x 負の向きゆえ，

$$f=-k|x|=-kx\,.$$

ばねが縮んでいるとき，$x<0$ で弾性力の大きさは $k|x|$，向きは x 正の向きゆえ[*5]，

$$f=k|x|=-kx\,.$$

(2)　運動方程式より，

$$\underline{ma=-kx}\,.$$

(3)　運動方程式より，物体は角速度 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，振動中心 $x_0=0$ の単振動をする．したがって，定数を C，D として，

$$\begin{cases} x(t)=C\sin(\omega t)+D\cos(\omega t)\,,\\ v(t)=C\omega\cos(\omega t)-D\omega\sin(\omega t)\,. \end{cases}$$

初期条件より，

$$\begin{cases} 0=D\,,\\ v_0=C\omega\,, \end{cases}\qquad \therefore C=\frac{v_0}{\omega}\,,\quad D=0\,.$$

よって，

$$x(t)=\underline{v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)}\,,\quad v(t)=\underline{v_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)}\,.$$

(4)　公式より[*6]，

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\underline{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}\,.$$

(5)　$v=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}v_0$ より，

$$v_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}v_0\,,\qquad \therefore t=\frac{5}{6}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

この時刻での位置 x は，

$$x=v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\underline{\frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}}\,.$$

[*5] 絶対値の中身が負の場合，絶対値を外すとき，-1 をかけてはずすことに注意．

[*6] 任意の t において $\sin\{\omega(t+T)\}=\sin(\omega t)$ を満たす T のうち，正で最小のものを周期と呼んでいる．すなわち（ほとんど自明だが），$\omega T=2\pi$ を満たす T である．

8. 単振動の時間追跡②

図のように，ばね（ばね定数 k，ばね定数 $2k$，質量無視）の 2 つのばねの一端を固定された壁に取り付け，他端を小物体（質量 m）につなぐ．このとき，ばねはともに自然長である．水平右向きに x 軸を定め，その原点をばねが自然長のときの物体の位置に取る．時刻 $t=0$ に，物体を $x=A\,(>0)$ から静かに放した．

(1)　物体が位置 x にあるときの物体の加速度を a とする．物体の運動方程式を立式せよ．

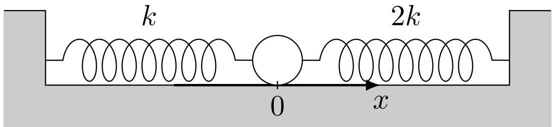
(2)　単振動の周期 T を求めよ．

(3)　物体の位置 x を時刻 t の関数として表せ．また，位置 x を時刻 t で微分することにより，速度 v を時刻 t の関数として表せ．なお，必要であれば以下の微分公式を用いてよい．

$$\frac{d}{dt}\{\sin(\omega t)\}=\omega\cos(\omega t)\,,\quad \frac{d}{dt}\{\cos(\omega t)\}=-\omega\sin(\omega t)\,.$$

(4)　原点を通過する時刻 t_n を，自然数 n を用いて表せ．

(5)　時刻 t_n における速さ v を求めよ．



【解答】

(1)　運動方程式より，

$$ma = -3kx\,.$$

(2)　運動方程式より，物体は角速度 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$，振動中心 $x_0 = 0$ の単振動をする．よって，公式より，

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}\,.$$

(3)　物体の位置，および速度は，定数を C，D として，

$$\begin{cases} x(t) = C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\,, \\ v(t) = C\omega\cos(\omega t) - D\omega\sin(\omega t)\,. \end{cases}$$

初期条件より，

$$\begin{cases} A = D\,, \\ 0 = C\omega\,, \end{cases} \qquad \therefore C = 0\,,\quad D = A\,.$$

よって，

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t\right),\quad v(t) = -A\sqrt{\frac{3k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\,t\right).$$

(4)　$\dfrac{1}{4}T$ 経過後は，半周期ずつ通過する，よって[*7]，

$$t_n = \frac{T}{4} + \frac{T}{2}n = (2n+1)\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{3k}}\,.$$

(5)　この時刻での速さ v は，

$$v = \left|-A\sqrt{\frac{3k}{m}}\sin\left(\frac{\omega T}{4} + \frac{\omega T}{2}n\right)\right| = \left|-A\sqrt{\frac{3k}{m}}\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)\right| = A\sqrt{\frac{3k}{m}}\,.$$

[*7] $A\cos(\omega t) = 0$ を解いても良い．

9. 単振動の時間追跡③

図のように，ばね（ばね定数 k，質量無視）の一端を固定された天井に取り付け，他端を小物体（質量 m）につなぐ．鉛直下向きに x 軸を定め，その原点をばねが自然長のときの物体の位置に取る．物体は $x = d$ の位置でつりあった．時刻 $t = 0$ に物体を位置 $2d$ から静かに手を放した．重力加速度の大きさを g とする．

(1)　d を，m，g，k を用いて表せ．

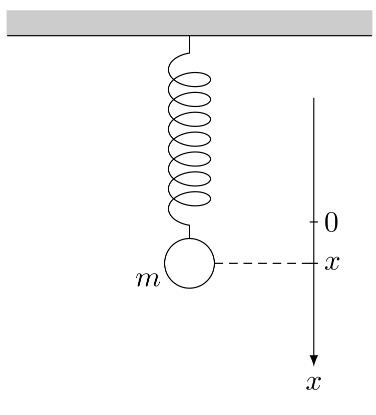
(2)　物体が位置 x にあるときの物体の加速度を a とする．物体の運動方程式を立式せよ．

(3)　単振動の周期 T を求めよ．

(4)　物体の位置 x を時刻 t の関数として表せ．また，位置 x を時刻 t で微分することにより，速度 v を時刻 t の関数として表せ．なお，必要であれば以下の微分公式を用いてよい．

$$\frac{d}{dt}\{\sin(\omega t)\} = \omega\cos(\omega t)\,,\quad \frac{d}{dt}\{\cos(\omega t)\} = -\omega\sin(\omega t)\,.$$

(5)　1 回目にばねが自然長となったときの物体の速度 v を求めよ．



【解答】

(1)　物体の力のつりあいより，

$$0 = mg - kd\,, \qquad \therefore d = \underset{\sim\sim}{\frac{mg}{k}}\,.$$

(2)　運動方程式より，

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{ma = -kx + mg}\,.$$

(3)　公式より，

$$T = \underset{\sim\sim\sim\sim}{2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}\,.$$

(4)　運動方程式より，物体は角速度 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$，振動中心 $x_0 = \dfrac{mg}{k}$ の単振動をする[*8]．したがって，定数を C，D として，

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{mg}{k} + C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\,, \\ v(t) = C\omega\cos(\omega t) - D\omega\sin(\omega t)\,. \end{cases}$$

初期条件より，

$$\begin{cases} \dfrac{2mg}{k} = \dfrac{mg}{k} + D\,, \\ 0 = C\omega\,, \end{cases} \qquad \therefore C = 0\,,\quad D = \frac{mg}{k}\,.$$

よって，

$$\begin{cases} x(t) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\dfrac{mg}{k} + \dfrac{mg}{k}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right)}\,, \\ v(t) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{-g\sqrt{\dfrac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right)}\,. \end{cases}$$

(5)　$x = 0$ を解いて，

$$\frac{mg}{k} + \frac{mg}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) = 0\,, \qquad \therefore t = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,,\quad \therefore v = \underset{\sim}{0}\,.$$

[*8] 運動方程式より，

$$a = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{mg}{k}\right)\,.$$

10. 単振動の時間追跡④

図のように，ばね（質量無視）の一端を固定された天井に取り付け，他端を小物体（質量 m）につなぐ．鉛直下向きに x 軸を定め，その原点を物体にはたらく重力と弾性力がつりあう位置に取る．物体はばねが d だけ伸びた位置でつりあった．時刻 $t=0$ に物体を自然長の位置から静かに手を放した．重力加速度の大きさを g とする．

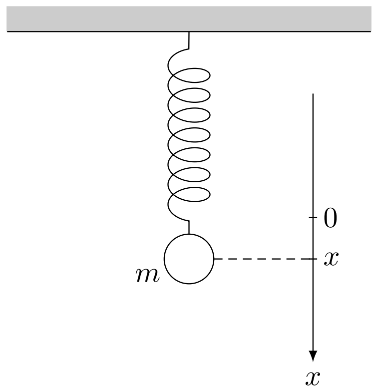
(1)　ばね定数 k を，m，g，d を用いて表せ．

(2)　物体が位置 x にあるときの物体の加速度を a とする．a を，x を含む式で表せ．

(3)　単振動の周期 T を求めよ．

(4)　物体の位置 x を時刻 t の関数として表せ．また，位置 x を時刻 t で微分することにより，速度 v を時刻 t の関数として表せ．なお，必要であれば以下の微分公式を用いてよい．

$$\frac{d}{dt}\{\sin(\omega t)\} = \omega\cos(\omega t)\,,\quad \frac{d}{dt}\{\cos(\omega t)\} = -\omega\sin(\omega t)\,.$$



【解答】

(1)　物体の力のつりあいより，

$$0 = mg - kd\,, \qquad \therefore k = \underset{\sim\sim}{\frac{mg}{d}}\,.$$

(2)　位置 x にあるとき，ばねの自然長からの伸びは $x + d$ であることに注意して，運動方程式より，

$$ma = -\frac{mg}{d}(x+d) + mg = -kx\,, \qquad \therefore a = \underset{\sim\sim}{-\frac{g}{d}}x\,.$$

(3)　公式より，

$$T = \underset{\sim\sim}{2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}}\,.$$

(4)　運動方程式より，物体は角速度 $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{d}}$，振動中心 $x_0 = 0$ の単振動をする．したがって，定数を C，D として，

$$\begin{cases} x(t) = C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\,, \\ v(t) = C\omega\cos(\omega t) - D\omega\sin(\omega t)\,. \end{cases}$$

初期条件より，

$$\begin{cases} -d = D\,, \\ 0 = C\omega\,, \end{cases} \qquad \therefore C = 0\,,\quad D = -d\,.$$

よって，

$$x(t) = \underset{\sim\sim}{-d\cos\left(\sqrt{\frac{g}{d}}\,t\right)}\,,\quad v(t) = \underset{\sim\sim}{\sqrt{gd}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{d}}\,t\right)}\,.$$

11. 単振動の時間追跡⑤

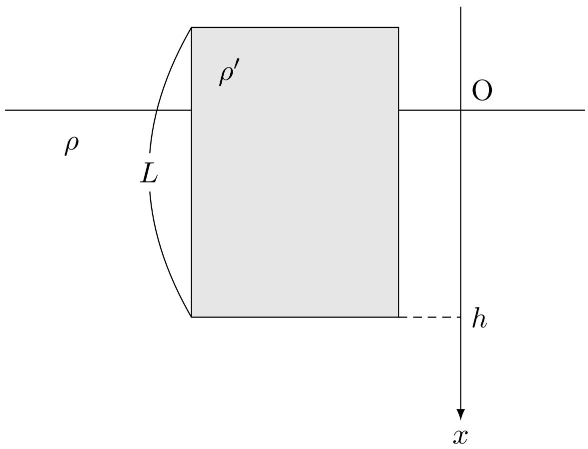
物体（質量 M，密度 ρ'）を液体（密度 $\rho\,(>\rho')$）の上に浮かべたところ，物体は水面から h だけ沈み静止した．鉛直下向きに x 軸を定め，物体の位置 x は物体底面の位置とし，水面を原点に取る．時刻 $t=0$ に物体を位置 $\dfrac{h}{2}$ から静かに放した．重力加速度の大きさを g とする．

(1)　物体の底面が位置 x にあるときの物体の加速度を a とする．物体の運動方程式を，h を用いずに立式せよ．

(2)　h を求めよ．

(3)　手を放した後，物体は単振動をした．初期条件より，小物体の位置 x，速度 v をそれぞれ時刻 t の関数として求めよ[*9]．

(4)　物体の運動の周期を求めよ．



*9 浮力（水圧）の公式は静止流体を仮定した上で成り立つ式なので，物体が運動し，周囲の流体に流れが生じるようなこのような議論は少し危うい．

【解答】

(1)　運動方程式より，

$$\underset{\sim\sim\sim}{Ma = -\frac{\rho M g}{\rho' L}x + Mg}\,.$$

(2)　運動方程式より，$a = 0$ を解いて，

$$h = \frac{\rho'}{\rho}L\,.$$

(3)　運動方程式より，物体の運動は角速度 $\omega = \sqrt{\frac{\rho g}{\rho' L}}$，振動中心 $x_0 = \frac{\rho'}{\rho}L$ の単振動である[*10]．したがって，定数を C，D として，

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\rho'}{\rho}L + C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\,, \\ v(t) = C\omega\cos(\omega t) - D\omega\sin(\omega t)\,. \end{cases}$$

初期条件より，

$$\begin{cases} \dfrac{\rho'}{2\rho}L = \dfrac{\rho'}{\rho}L + D\,, \\ 0 = C\omega\,, \end{cases} \qquad \therefore C = 0\,,\quad D = -\frac{\rho'}{2\rho}L\,.$$

よって，

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{\rho'}{\rho}L - \dfrac{\rho'}{2\rho}L\cos\left(\sqrt{\dfrac{\rho g}{\rho' L}}\,t\right), \\ v(t) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\rho'}{\rho}gL}\sin\left(\sqrt{\dfrac{\rho g}{\rho' L}}\,t\right). \end{cases}$$

(4)　公式より，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho' L}{\rho g}}\,.$$

*10 運動方程式より，

$$a = -\frac{\rho g}{\rho' L}\left(x - \frac{\rho'}{\rho}L\right)\,.$$

12. 単振動の時間追跡⑥

物体 A（質量 $2m$）にばね（ばね定数 k，質量無視）の一端を取りつけ，他端を床に固定した．物体 A の上に物体 B（質量 m）をそっと置くと，自然長から d だけ縮み静止した．物体 A はその運動が鉛直方向だけに限られるよう十分に長い筒で囲ってある．なお，筒と物体 A の間の摩擦は考えないものとする．鉛直上向きに x 軸を定め，ばねが自然長のときの物体 A の位置を原点とする．重力加速度の大きさを g とする．

I　つりあいの状態から $\dfrac{d}{2}$ だけ押し込み静かに放したところ，2 つの物体は一体のまま単振動を行った．物体が運動を始めた時刻を $t=0$ とする．

(1)　d を求めよ．

(2)　物体 A，物体 B の加速度をそれぞれ a，b，物体 A と物体 B の間の垂直抗力を N とする．物体 A が位置 x にあるときの物体 A，物体 B の運動方程式を，d を用いずに立式せよ．

(3)　物体 B が物体 A の面上から離れないことから，a，b の間に成り立つ関係式を求めよ．

(4)　初期条件より，物体 A の位置 x を時刻 t の関数として求めよ．

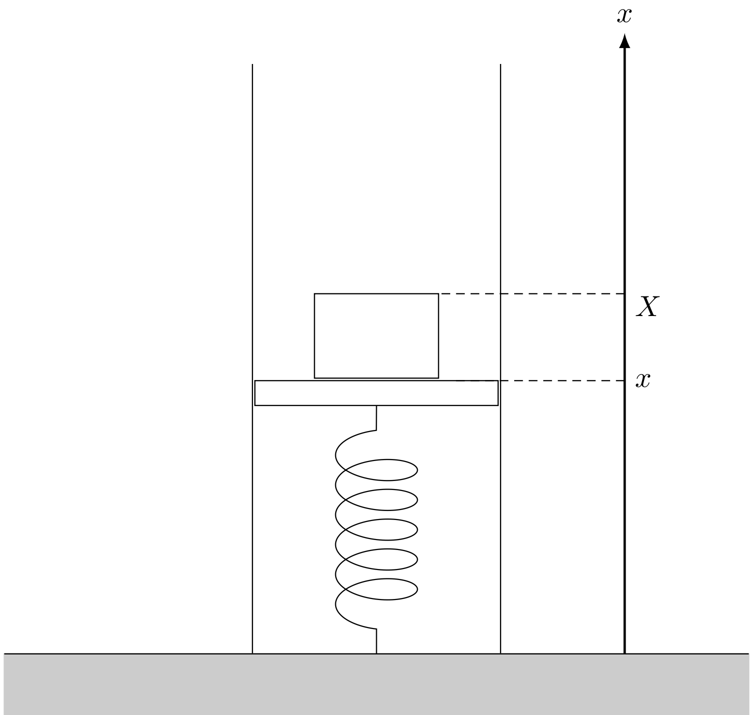
(5)　物体の運動の周期を求めよ．

II　つりあいの状態から d' だけ押し込み静かに放したところ，2 つの物体は一体のまま単振動の運動の一部を行った後，物体 B が物体 A から離れた．物体が運動を始めた時刻を $t=0$ とする．

(1)　物体 B が物体 A から離れるまでの垂直抗力 N を，x の関数として表せ．

(2)　物体 B が物体 A から離れるために，d' が満たす条件を求めよ．

(3)　$d'=\sqrt{2}\,d$ とする．このとき，物体 B が物体 A の面から離れる時刻を求めよ．


x
X
x

【解答】

I (1)　運動方程式・束縛条件より，

$$\begin{cases} 2ma = -kx - 2mg - N\,, \\ mb = -mg + N\,, \\ a - b = 0\,. \end{cases}$$

つりあいでは，$a = b = 0$ ゆえ，

$$N = mg\,, \quad d = |x| = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{3mg}{k}}\,.$$

(2)　略.

(3)　略.

(4)　束縛条件から $a = b$ ゆえ，運動方程式から，

$$a = -\frac{k}{3m}\left(x + \frac{3mg}{k}\right)\,.$$

よって，物体（A，B を合わせて 1 つと見たもの）の運動は，角速度 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{3m}}$，振動中心 $x_0 = -\dfrac{3mg}{k}$ である．したがって，定数を C，D として，

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{3mg}{k} + C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\,, \\ v(t) = C\omega\cos(\omega t) - D\omega\sin(\omega t)\,. \end{cases}$$

初期条件より，

$$\begin{cases} -\dfrac{9mg}{2k} = -\dfrac{3mg}{k} + D\,, \\ 0 = C\omega\,, \end{cases} \qquad \therefore C = 0\,, \quad D = -\frac{3mg}{2k}\,.$$

よって，

$$\begin{cases} x(t) = \underset{\sim\sim\sim}{-\dfrac{3mg}{k} - \dfrac{3mg}{2k}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{3m}}\,t\right)}\,, \\ v(t) = \underset{\sim\sim\sim}{\dfrac{g}{2}\sqrt{\dfrac{3m}{k}}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{3m}}\,t\right)}\,. \end{cases}$$

II (1)　束縛条件より $a = b$ ゆえ，運動方程式から，

$$N = \underset{\sim\sim\sim}{-\frac{1}{3}kx}\,.$$

(2)　初期条件より[*11][*12]，

$$\left\{ x(t) = -\frac{3mg}{k} - d' \cos(\omega t) \right. ,$$

と求まり，

$$N = mg + \frac{1}{3}kd' \cos(\omega t) .$$

物体 B が物体 A から離れるためには，$\cos(\omega t) = -1$ のとき $N < 0$ を満たすように d を選べばよく[*13]，

$$\underline{d' > \frac{3mg}{k}} .$$

(3)　$d' = \sqrt{2}\, d$ より，

$$N = mg\left(1 + \sqrt{2}\cos(\omega t)\right) .$$

$N = 0$ を解いて，

$$\cos(\omega t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} , \qquad \therefore t = \underline{\frac{3}{4}\pi\sqrt{\frac{3m}{k}}} .$$

---

*11 $x(0) = -d' - d$，$v(0) = 0$

*12 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{3m}}$

*13 「$N > 0$ ならば離れない」の対偶を考えればよい．物理では文字計算でも実際には有効数字を想定して計算する以上，等号はどちらでもよいので省略．

13. 単振動の時間追跡とエネルギー①

図のように，ばね（ばね定数 k）の一端を固定された壁に取り付け，他端を小物体（質量 m）につなぐ．水平右向きに x 軸を定め，その原点をばねが自然長のときの物体の位置に取る．時刻 $t=0$ に原点にある物体に，x 軸正の向きに大きさ v_0 の初速度を与えた．

I　物体が位置 x にあるときの物体の加速度を a とする．物体の運動方程式を立式せよ．

II　物体の位置 x を時刻 t の関数として表せ．また，位置 x を時刻 t で微分することにより，速度 v を時刻 t の関数として表せ．なお，必要であれば以下の微分公式を用いてよい．

$$\frac{d}{dt}\{\sin(\omega t)\} = \omega\cos(\omega t)\,,\quad \frac{d}{dt}\{\cos(\omega t)\} = -\omega\sin(\omega t)\,.$$

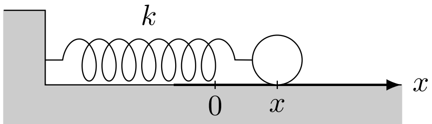
III　v，x の 2 式について時刻 t を消去することで，v と x の間の直接の関係式を記せ．

IV　1 回目に物体が位置 $-\dfrac{v_0}{2}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ を通過したときの速度 v を，

(1)　時間追跡で得た 2 式を解くことにより求めよ．

(2)　物体の運動エネルギー変化と物体がされる仕事の関係に注目することにより求めよ．

(3)　物体とばねを 1 つの系と見て，全体の力学的エネルギーが保存することに注目することにより求めよ．



【解答】

I　運動方程式より,

$$\underset{\sim\sim\sim}{ma = -kx}\,.$$

II　運動方程式・初期条件より[*14],

$$\begin{cases} x(t) = v_0\sqrt{\dfrac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right), \\ v(t) = v_0\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right). \end{cases}$$

III　II より[*15],

$$v^2 + \frac{k}{m}x^2 = {v_0}^2\,.$$

IV (1)　$x = -\dfrac{v_0}{2}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ より,

$$v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) = -\frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\,,\qquad \therefore t = \frac{7}{6}\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

この時刻での位置 v は,

$$v = v_0\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}v_0\,.$$

(2)　物体のみを 1 つの系と見てエネルギー収支を考えれば[*16],

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = \int_0^{-\frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}}(-kx)\,dx\,,\qquad \therefore v = -\frac{\sqrt{3}}{2}v_0\,.$$

(3)　全体を 1 つの系と見て力学的エネルギー保存則を考えれば[*17],

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\left(-\frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + \frac{1}{2}k\cdot 0^2\,,\qquad \therefore v = -\frac{\sqrt{3}}{2}v_0\,.$$

[*14] 問題 7 と同じ設定なので，詳しくはそちらの解答を参照.

[*15] 物体とばねを合わせて一つと見た系の持つエネルギー（力学的エネルギー）保存則と整合している.

[*16] 物体の運動の状況から，$v < 0$ が適当.

[*17] 物体の運動の状況から，$v < 0$ が適当.

14. 単振動の時間追跡とエネルギー②

図のように，ばね（ばね定数 k，質量無視）の一端を固定された天井に取り付け，他端を小物体（質量 m）につなぐ．鉛直下向きに x 軸を定め，その原点をばねが自然長のときの物体の位置に取る．物体は $x=\dfrac{mg}{k}$ の位置でつりあった．時刻 $t=0$ に物体を位置 $x=0$ で静かに手を放した．重力加速度の大きさを g とする．

I　物体が位置 x にあるときの物体の加速度を a とする．物体の運動方程式を立式せよ．

II　物体の位置 x を時刻 t の関数として表せ．また，位置 x を時刻 t で微分することにより，速度 v を時刻 t の関数として表せ．なお，必要であれば以下の微分公式を用いてよい．

$$\frac{d}{dt}\{\sin(\omega t)\}=\omega\cos(\omega t)\,,\quad \frac{d}{dt}\{\cos(\omega t)\}=-\omega\sin(\omega t)\,.$$

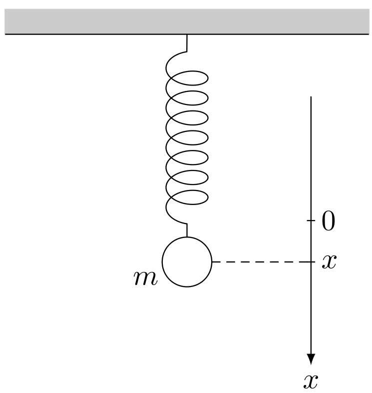
III　v，x の 2 式について時刻 t を消去することで，v と x の間の直接の関係式を記せ．

IV　1 回目に物体が位置 $x=\dfrac{mg}{2k}$ を通過したときの速度 v を，

(1)　時間追跡で得た 2 式を解くことにより求めよ．

(2)　物体の運動エネルギー変化と物体がされる仕事の関係に注目することにより求めよ．

(3)　物体と重力場とばねを 1 つの系と見て，全体の力学的エネルギーが保存することにより求めよ．



【解答】

I　運動方程式より，

$$ma = -kx + mg\,.$$

II　運動方程式・初期条件より，

$$x(t) = \frac{mg}{k}\left\{1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\right\}, \quad v(t) = g\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right).$$

III　II より[*18]，

$$v^2 + \frac{k}{m}x^2 - 2gx = 0\,.$$

IV (1)　$x = \dfrac{mg}{2k}$ より，

$$\frac{mg}{k}\left\{1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\right\} = \frac{mg}{2k}\,, \qquad \therefore t = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}\,, \quad v = \frac{g}{2}\sqrt{\frac{3k}{m}}\,.$$

(2)　物体のみを 1 つの系と見てエネルギー収支を考えれば[*19][*20]，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 - 0 &= \int_0^{\frac{mg}{2k}} (-kx + mg)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{2k}\right)^2 + mg\frac{mg}{2k}\,, \qquad \therefore v = \frac{g}{2}\sqrt{\frac{3k}{m}}\,.\end{aligned}$$

(3)　全体を 1 つの系と見て力学的エネルギー保存則を考えれば，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{2k}\right)^2 + mg\left(-\frac{mg}{2k}\right) &= \frac{1}{2}m\cdot 0^2 + \frac{1}{2}k\cdot 0^2 + mg\cdot 0 \\ \therefore v &= \frac{g}{2}\sqrt{\frac{3k}{m}}\,.\end{aligned}$$

[*18] 物体とばねと重力場を合わせて一つと見た系の持つエネルギー（力学的エネルギー）保存則と整合している．

[*19] 物体の運動の状況から，$v > 0$ が適当．

[*20] ばねと重力のする仕事がともに経路に依らず，始点と終点のみで決まることがわかる．この式変形によって，ばね，および重力場（重力の作用する空間）には「エネルギー」が宿ると解釈し，これを位置エネルギーと呼んでいる．エネルギーとは何かと言えば，運動方程式を変形した結果都合の良い（便利な）関係式（時刻という媒介変数によらない関係式）となり，その各項をエネルギーと呼んでいるに過ぎない．初めから意味や実態があるのではなく，数式に現れる項に人類が意味や解釈を見出したのである．というのは言い過ぎで，この論理では理由もなく力や加速度を特別視し，これらには本質的な意味や実態があるということになってしまうし，歴史的にもそのように辿っているわけではない．エネルギーや仕事も目に見えないが，力や加速度も目に見るわけではない（そもそも目に見えることが「本質的」な量である根拠となるかどうかもわからない）．どちらをアプリオリに仮定しても両者は数学的に同値であり，どちらを本質的な量とするかは結局のところイデオロギーの対立である．

§2.2 多体系の力学

第 2 章では，多体系（多体と言っても 2 物体）を扱う．物体が複数ある場合，その運動の解析（時間追跡）は殆どの場合で困難が生じる．そこで，時間変化しないもの，すなわちその系を特徴づけるような保存量に注目することで，各瞬間における力学変数（位置，速度）を決定する．この際に有効な保存量が運動量である．そこで，まず初めに運動量と関係付く力積という量の計算方法について学ぶ．そして，2 物体系の問題を扱う．なお，衝突や分裂といった現象は，衝突/分裂が一瞬で起こることやその力学モデルの詳細が不明なために，力の詳細が不明で力積や仕事の計算が行えない．そこで，衝突・分裂の問題は，例外的な扱いとして問題を解くこととなる．

■簡単なまとめ

- 多体系の基本：

❶ 解法整理：

$$\begin{cases} \text{外力のない方向の運動量保存則} \\ \text{系全体の力学的エネルギー保存則} \\ \text{（束縛条件）} \end{cases}$$

束縛条件に関しては，明示的に考えなくとも良い場合が多い．束縛条件を明示的に考えないと解けないような問題は難しい．

❷ 内力のする仕事：個々の物体のエネルギー収支に注目する．特に，摩擦の場合，系全体の力学的エネルギーが保存しないことに注意．

- 衝突・分裂：衝突/分裂時の力の詳細が不明なため，問題文で考えているモデル（平たく言えば条件）を与える必要がある．

$$\begin{cases} \text{外力のない方向の運動量保存則} \\ \text{問題文の条件} \end{cases}$$

条件として，はね返り係数が与えられることがあるが，はね返り係数の式は分数式でなく以下のように用いるのが良い．

$$v_{\text{終}}^{(\mathrm{A})} - v_{\text{終}}^{(\mathrm{B})} = -e\left(v_{\text{始}}^{(\mathrm{A})} - v_{\text{始}}^{(\mathrm{B})}\right)$$

- 力積の計算の分類：力積は，問題文で「力積」と言われて初めて考える．

$$\begin{cases} f\ \text{の関数形が既知} & \rightarrow & \text{定義通りの計算（積分，もしくは}\ f-t\ \text{図の面積評価）} \\ f\ \text{の関数形が不明} & \rightarrow & \text{運動量収支から逆算} \end{cases}$$

- 重心の定義：i 番目 $(i = 1, 2, \cdots n)$ の物体の質量を m_i，位置を x_i とする．

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}\,.$$

1. 力積の計算①（定義による計算・一定の大きさの力）

$t=0$ に物体（質量 m）を鉛直下向きに初速 v_0 で放した．正の向きを鉛直下向きに定める．また，重力加速度の大きさを g とする．

(1)　時刻 t までに物体が重力から受けた力積 I を計算せよ．

(2)　運動量収支を利用し，時刻 t での物体の速度 v を求めよ．

【解答】

(1)　力積の定義より，

$$I = \underset{\sim\sim}{mgt}\,.$$

(2)　運動量収支より，

$$mv - mv_0 = mgt\,, \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim}{v_0 + gt}\,.$$

2. 力積の計算②（定義による計算・時間変化する力）

ばね（ばね定数 k，質量無視）の一端を固定された壁に，他端を物体（質量 m）に取り付けた．ばねは常に水平かつ直線的で，物体はなめらかな水平面上を運動する．原点をばねが自然長での物体の位置に取り，水平でばねが伸びる向きに x 軸を定める．物体の初期条件は $x(0) = A\,(>0)$，$v(0) = 0$ とする．

(1)　物体の位置 x を，時刻 t の関数として表せ．

(2)　時刻 $t = 0$ から t までの間に物体が受けた力積 I を，時刻 t の関数として表せ．

(3)　運動量収支を利用し，物体の速度 v を，時刻 t の関数として表せ．

【解答】

(1)　運動方程式より，角振動数は $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ である．よって，初期条件より[*21]，

$$x = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)}.$$

(2)　力積の定義より，

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t (-kx)\,dt \\ &= \int_0^t \left\{-kA\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\right\} dt \\ &= \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{-A\sqrt{km}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)}. \end{aligned}$$

(3)　運動量収支より，

$$mv - m\cdot 0 = -A\sqrt{km}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right), \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{-A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)}.$$

[*21] 時間追跡の章でやったように丁寧にやっても良いし，運動の状況から明らかに +cos と判断しても良い（今は前者のように丁寧にやった方がいい気もするが，後者のようにできないのも今後困る）．

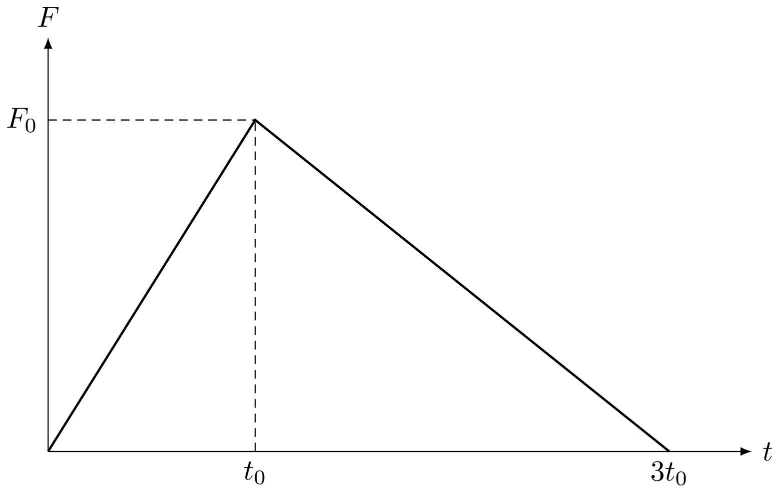
3. 力積の計算③（定義による計算・グラフの面積利用）

一定速度 v_0 で運動する物体に，時刻 $t=0$ に物体（質量 m）に図のように時間変化する外力 F を加えた．

(1)　時刻 $3t_0$ までに物体が受けた力積 I を計算せよ．

(2)　物体の運動量変化が受けた力積に等しいことから，時刻 $3t_0$ での物体の速度 v を求めよ．

(3)　おまけ：力積の値から，時間 $3t_0$ の間に物体が受けた平均の力の大きさ $\overline{F}$ を求めよ．



【解答】

(1)　力積の定義より，グラフを利用して，

$$I=\frac{3}{2}F_0t_0\,.$$

(2)　運動量収支より，

$$mv-mv_0=\frac{3}{2}F_0t_0\,,\qquad \therefore v=v_0+\frac{3F_0}{2m}t_0\,.$$

(3)　力積の定義より，

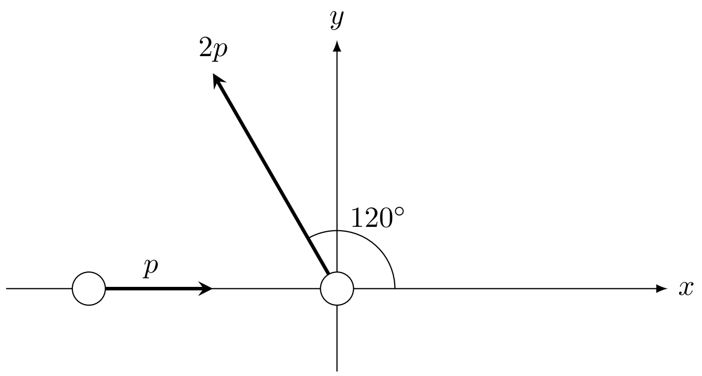
$$\overline{F}\cdot 3t_0=\frac{3}{2}F_0t_0\,,\qquad \therefore \overline{F}=\frac{1}{2}F_0\,.$$

4. 力積の計算④（運動量収支から逆算）

xy 平面内を運動する物体の運動を考える．x 軸正方向に大きさ p の運動量で運動していた物体が原点を通過する瞬間ごく短い間外力を加えたことで，物体は x 軸正方向からの $120°$ の方向へ大きさ $2p$ の運動量で運動をした．

(1)　物体が受けた力積の x 成分，および y 成分を求めよ．

(2)　物体が受けた力積の大きさ I を求めよ．



【解答】

(1)　運動量収支から，

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p \\ \sqrt{3}\,p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2p \\ \sqrt{3}\,p \end{pmatrix}.$$

(2)　設問 I より，

$$I = \sqrt{{I_x}^2 + {I_y}^2} = \sqrt{7}\,p.$$

5. 多体系を特徴付ける保存量としての運動量保存則

以下の文章を読み，$\boxed{}$ に適した式または数を答えよ．

1 次元上の 2 物体の運動（物体 A，物体 B）を考え，物体の運動方向に x 軸を定める．両物体は何らかを介して[*22]互いに力を及ぼし合い，物体 A は $+f\,(>0)$，物体 BB は $-f$ の力を受けている．物体 A の物理量には添え字として 1 を，物体 B の物理量には添え字として 2 を付する．

両物体の運動方程式は，

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{dv_1}{dt} = \boxed{\quad ① \quad}, \\ m_2 \dfrac{dv_2}{dt} = \boxed{\quad ② \quad}, \end{cases}$$

と書ける．ここで，2 式の和を取ると，

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} + m_2 \frac{dv_2}{dt} = \boxed{\quad ③ \quad}$$

となり，

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\quad ④ \quad}\right) = \boxed{\quad ③ \quad}, \qquad \therefore \boxed{\quad ④ \quad} = \mathrm{const}\,.$$

を得る．以上から，物体 A，および物体 B から成る系の x 軸方向の運動量の和は保存することがわかる．

なお，物体 A に外力 F が作用するとき，

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\quad ④ \quad}\right) = \boxed{\quad ⑤ \quad},$$

となり，系の運動量は保存せず，系の運動量収支は（物体 A が）外部から受ける力積に等しくなる[*23]．

【解答】

① $+f$　② $-f$　③ 0　④ $m_1 v_1 + m_2 v_2$　⑤ F

[*22] ばねや糸，面，空間など．

[*23] 両辺 $t=0$ から t までの時間積分を考えれば，

$$\int_0^t \frac{d}{dt}(m_1 v_1 + m_2 v_2)\,dt = \int_0^t F\,dt$$

$$\{m_1 v_1(t) + m_2 v_2(t)\} - \{m_1 v_1(0) + m_2 v_2(0)\} = \int_0^t F\,dt\,.$$

6. ばねによる相互作用

図のように，水平右向きに x 軸を定め，物体 B（質量 M）をばね（ばね定数 k，質量無視）に向かい，物体 A（質量 m）に x 正方向に大きさ v_0 の初速度を与えた．物体 A，物体 B，ばねからなる系の力学的エネルギーは保存する．物体 A がばねに接触してからの運動を考える．

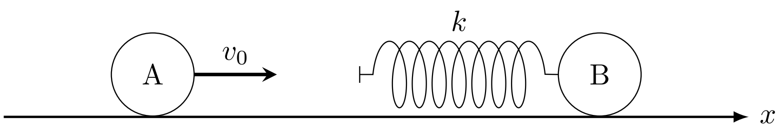
I　両物体の速度が等しく u となったとき，ばねの縮みは s であった．

(1)　x 方向には外力が働かないことから，全体を 1 つの系と見たときの系の x 方向の運動量は保存する．運動量保存則を立式せよ．

(2)　系の力学的エネルギーは保存する．力学的エネルギー保存則を立式せよ．

(3)　u，s を求めよ．

II　初速度を与えてから，ばねが初めて自然長に戻ったときの A の速度を v，B の速度を V とする．v，V を求めよ．



【解答】

I (1)　略

(2)　略

(3)　力学的エネルギー・運動量保存則より，

$$\begin{cases} mu + Mu = mv_0\,, \\ \dfrac{1}{2}mu^2 + \dfrac{1}{2}mu^2 + \dfrac{1}{2}ks^2 = \dfrac{1}{2}m{v_0}^2\,, \end{cases} \qquad \therefore u = \underline{\frac{m}{M+m}v_0}\,,\quad s = \underline{v_0\sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}}\,.$$

II (1)　力学的エネルギー・運動量保存則より，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}MV^2 = \dfrac{1}{2}m{v_0}^2\,, \\ mv + MV = mv_0\,, \end{cases} \qquad \therefore v = \underline{\frac{m-M}{M+m}v_0}\,,\quad V = \underline{\frac{2m}{M+m}v_0}\,.$$

7. 面を介した相互作用①

水平な床の上に物体 A（質量 m）と物体 B（質量 $M\,(>m)$）を置く．水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．物体 A に x 正方向に大きさ v_0 の初速度を与えた．物体 B と床はなめらかに繋がっており，全ての摩擦は無視する．重力加速度の大きさを g とする．

I　物体 A が物体 B 上の曲面上を折り返したときの両物体の速度を u，物体 A の床からの高さを h とする．

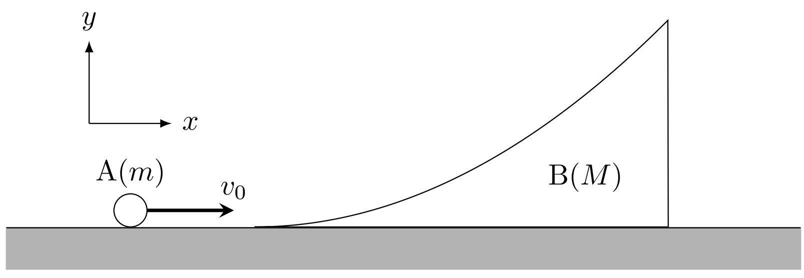
(1)　x 方向には外力が働かないことから，全体を 1 つの系と見たときの系の x 方向の運動量は保存する．運動量保存則を立式せよ．

(2)　系の力学的エネルギーは保存する．力学的エネルギー保存則を立式せよ．

(3)　u，h を求めよ．

II　A が再び床に戻った後の A の速度を v，B の速度を V とする．v，V を求めよ．

III　おまけ：これは時間追跡ができない（現実的でない）．それは何故か考えよ．例として，曲面が円の一部である場合を考えて，束縛条件を立ててみると良い．



【解答】

I (1)　x 方向の運動量保存則は,

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{Mu + mu = mv_0}\,.$$

(2)　力学的エネルギー保存則は,

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}Mu^2 + \frac{1}{2}mu^2 + mgh = \frac{1}{2}m{v_0}^2}\,.$$

(3)　力学的エネルギー・運動量保存則より,

$$u = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{m}{M+m}v_0}\,,\quad h = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{M{v_0}^2}{2(M+m)g}}\,.$$

II　力学的エネルギー・運動量保存則より[*24],

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}MV^2 = \dfrac{1}{2}m{v_0}^2\,, \\ mv + MV = mv_0\,, \end{cases} \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{m-M}{M+m}v_0}\,,\quad V = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{2m}{M+m}v_0}\,.$$

III　補足を参照.

[*24] この一連の運動はこれより後ろにある衝突の問題の弾性衝突と見なすことができる．実際，力学的エネルギー保存則に運動量保存則から得られる $MV = m(v_0 - v)$ を用いて，$V \neq 0$ より，

$$MV^2 = m{v_0}^2 - mv^2 = m(v_0 - v)(v_0 + v) = MV(v_0 + v)$$
$$\therefore V = v_0 + v$$

を得る．このとき，$V = v_0 + v$ ははね返り係数 1 の式と同値であることがわかる（ひとつ前のばねの問題の設問 II でも同じことが言えるが，解答のスペースの都合でこちらに載せた）．

【補足 1】束縛条件に関する一般論（難しい）

A が B の曲面上の任意の点にある瞬間を考える．この瞬間の A の位置を (x, y)，B の位置を (X, Y) とする．このとき，束縛条件は曲面の方程式を $y - Y = f(x - X)$ とすると[*25]，これが面が変形せず物体がこの曲面上を運動することからこの方程式が束縛条件になっており，この両辺の t 微分を考えることで[*26]，

$$\begin{aligned} \dot{y} - \dot{Y} &= \frac{df}{d(x-X)}\frac{d(x-X)}{dt} = f' \cdot (\dot{x} - \dot{X}) \\ \therefore f' \cdot (\dot{x} - \dot{X}) &- (\dot{y} - \dot{Y}) = 0\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

したがって，次の 2 つのベクトルが平行であることが言える．

$$\begin{pmatrix} \dot{x} - \dot{X} \\ \dot{y} - \dot{Y} \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 1 \\ f' \end{pmatrix}.$$

このことは，B に対する A の相対速度が，接面の傾き（右側のベクトル）[*27]と平行であることを意味する．

今，一般の場合[*28]で議論してきたため，一般論として(相対速度)//(接面) は成り立つ[*29]．加速度に関する束縛条件は，速度に関する束縛条件 (2.1) 式の両辺をもう 1 回 t で微分すれば得ることができ，右辺は積の微分公式を利用することで

$$\begin{aligned} \ddot{y} - \ddot{Y} &= \frac{d}{dt}\left\{ f' \cdot (\dot{x} - \dot{X}) \right\} \\ &= f'' \cdot (\dot{x} - \dot{X})^2 + f' \cdot (\ddot{x} - \ddot{X}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

となる．このようにして，加速度に関する束縛条件が複雑な形となってしまうために，運動方程式と連立して解くことが，すなわち未知力の決定が困難となる[*30*31]．

---

*25 この問題では $Y = 0$ である．

*26 ドット記号 $\dot{O}$ は，$\dot{O} = \dfrac{dO}{dt}$ を表す．

*27 数学で習った微分の意味を確認せよ．わかりにくければ，中学で習った傾きの定義を思い出す．

*28 曲面の断面の方程式が直線だとか，放物線，円など具体的に指定していないという意味．

*29 そもそも垂直抗力の大きさが未知量なのはフック則により，垂直抗力が未知量であるということは面が硬く（ばね定数無限大），それゆえ面の変形がゼロであるからであった．面の変形がゼロということが物体の運動の軌道を制限（束縛）するわけだが，軌道を決定するというのは次に瞬間に進む方向まで決めてしまうということでもある．面が変形しないというたった 1 つの条件が，相対速度の方向まで決定してしまうのであり，束縛条件を知った今であれば，「変形しない面上を運動する物体の相対速度の方向」といういまいちピンとこなさそなもののイメージも持てるだろう．イメージが先に在ってわかるのではなく，すでに知っている（わかっている）からイメージできる．

*30 加速度だけの関係式ならば解くことはできるが，（相対）速度の 2 乗が含まれることにより解くことが困難となる．$f'' = 0$，すなわち $\ddot{y} - \ddot{Y} = f' \cdot (\ddot{x} - \ddot{X})$ のような場合（面の傾き f' が一定な場合），加速度の束縛条件もシンプルな形となり，運動方程式と連立させる問題が作れる．この場合，斜面の傾きである $\tan\theta$ がそのまま f' に入る）．

*31 実は円の場合も特殊な考えを持ち出すことで例外的に未知力を決定することができる（一部の私大ではここ数年ほぼ毎年のように出題されている）．

【補足 2】全体で見たとき，垂直抗力のする仕事が相殺することについて[*32]

A が B から受ける垂直抗力（大きさ N）と鉛直線のなす角を θ とする[*33]．物体 A，B の運動方程式は B が床から受ける垂直抗力の大きさを R として，

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = -N\sin\theta\,, \\ m\dot{v}_y = N\cos\theta - mg\,, \\ M\dot{V}_x = N\sin\theta\,, \\ M\cdot 0 = R - Mg - N\cos\theta\,. \end{cases}$$

それぞれの式に対応した速度成分と積を取り，全ての式の和を取って整理すると[*34]，

$$\begin{aligned} &m\dot{v}_x v_x + m\dot{v}_y v_y + M\dot{V}_x V_x + M\cdot 0\cdot 0 + mgv_y = -N\sin\theta v_x + N\cos\theta v_y + N\sin\theta V_x \\ &\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}m({v_x}^2+{v_y}^2)+\frac{1}{2}M({V_x}^2+0^2)+mgy\right\} = N\underbrace{\begin{pmatrix} v_x - V_x \\ v_y - 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{A に対する B の}\\\text{相対速度ベクトル}}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}}_{\substack{N\text{ と平行な}\\\text{単位ベクトル}}}, \end{aligned}$$

となり，右辺はこの瞬間における垂直抗力の仕事率を表す．ここで，$\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ は接面と直交した（N と同じ方向の）単位ベクトルゆえ，接面と平行である相対速度ベクトル[*35]とは直交している．このことから，垂直抗力の仕事率は全体としてはゼロとなり[*36]，以下のように，系の力学的エネルギー保存則が確認できる．

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}m({v_x}^2+{v_y}^2)+\frac{1}{2}M({V_x}^2+0^2)+mgy\right\} = 0 \\ &\therefore \underbrace{\frac{1}{2}m({v_x}^2+{v_y}^2)}_{\text{物体 A}}+\underbrace{\frac{1}{2}M({V_x}^2+0^2)}_{\text{物体 B}}+\underbrace{mgy}_{\text{重力場}} = \text{const}\,. \end{aligned}$$

[*32] 自分で再現できなくてもよいが，読んで理解できるのが望ましい．

[*33] 今，A が運動する B の面は曲面のため，角 θ は B の曲面上の位置による．すなわち，相対位置 $x-X$ の関数であり $\theta=\theta(x-X)$ と書ける（物体の相対的な位置が変われば θ も変わる）．

[*34] 上の式から下の式はわからなくても良いが，下の式から上の式は確認できるようにしたい．合成関数の微分公式から，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m{v_x}^2\right) = \frac{1}{2}m\frac{d}{dv_x}\left({v_x}^2\right)\frac{dv_x}{dt} = mv_x\dot{v}_x\,.$$

v_y，V_x についても同様である．右辺は，内積の定義より，

$$N\begin{pmatrix} v_x - V_x \\ v_y - 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = -N(v_x - V_x)\sin\theta + Nv_y\cos\theta\,.$$

[*35] **【補足 1】**の波線部を参照．

[*36] 互いに直交したベクトルの内積はゼロ．

8. 面を介した相互作用②（束縛条件が絡む問題）

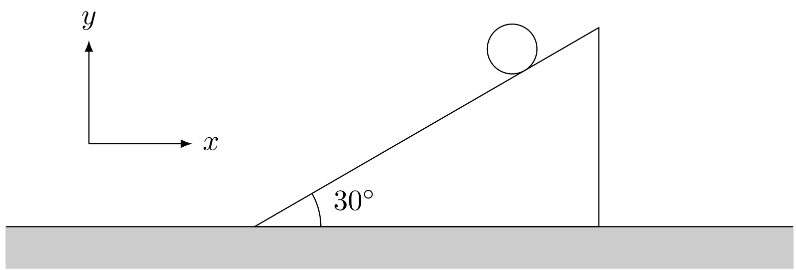
図のように，三角台（質量 $2m$，傾斜角 $30°$）を水平面上に置き，三角台の斜面上に質量 m の小物体を静かに置いた．水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．はじめ，小物体は三角台上の高さ h の位置にあった．小物体が水平面上に達する直前の小物体の速度を $\vec{v}=(v_x, v_y)$，三角台の速度の x 成分を V とする．全ての摩擦は無視する．重力加速度の大きさを g とする．

(1)　小物体と三角台から成る系の x 方向の運動量保存則を立式せよ．

(2)　小物体と三角台，重力場から成る系の力学的エネルギー保存則を立式せよ．

(3)　小物体が三角台上を運動することから，v_x，v_y，V の間に成り立つ関係式を立式せよ．

(4)　v_x，v_y，V を求めよ．



【メモ】

保存則に加え，束縛条件も考慮する必要がある．なお，このように束縛条件が単純な場合，例外的に時間追跡も可能である．

【解答】

(1)　x 方向の運動量保存則は，

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{mv_x + 2mV = 0}\,.$$

(2)　力学的エネルギー保存則は，

$$\frac{1}{2}m({v_x}^2 + {v_y}^2) + \frac{1}{2}\cdot 2mV^2 = mgh\,.$$

(3)　束縛条件は，

$$y - 0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - X)\,, \qquad \therefore v_y = \frac{1}{\sqrt{3}}(v_x - V)\,.$$

(4)　力学的エネルギー・運動量保存則，および束縛条件より，

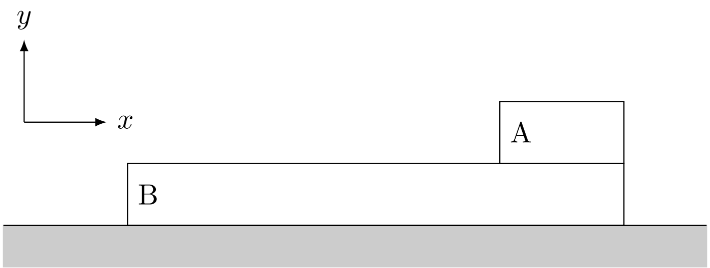
$$v_x = -\frac{2}{3}\sqrt{2gh}\,,\quad v_y = -\sqrt{\frac{2}{3}gh}\,,\quad V = \frac{\sqrt{2gh}}{3}\,.$$

9. 摩擦によるエネルギー損失

図のように，物体 A（質量 m）を物体 B（質量 $2m$）の端に置く．物体 A と B の間には摩擦が働き，物体 B と床の間の摩擦は無視できる．水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．物体 B に x 正方向に大きさ v_0 の初速度を与えたところ，物体 A は物体 B 上をすべり，物体 B 上のある位置で物体 B に対して静止した．物体 A，B 間の動摩擦係数を μ，重力加速度の大きさを g とする．

(1)　両物体間ですべりが生じなくなった時刻における両物体の速度を u とする．u を求めよ．

(2)　両物体間ですべりが生じなくなった時刻において，物体 B は床に対して D だけ変位し，物体 A は物体 B 上を d だけすべった．各物体のエネルギー収支を考えることで，d，D を求めよ．



【メモ】

内力のする仕事は各物体のエネルギー収支に注目する．

【解答】

(1)　運動量保存則より，

$$2mu + mu = 2mv_0\,, \qquad \therefore u = \frac{2}{3}v_0\,.$$

(2)　各物体のエネルギー収支の式は，

$$\begin{cases} \mathrm{A}: \dfrac{1}{2}mu^2 - \dfrac{1}{2}m\cdot 0^2 = +\mu mg(D-d) \\ \mathrm{B}: \dfrac{1}{2}\cdot 2mu^2 - \dfrac{1}{2}\cdot 2m{v_0}^2 = -\mu mgD \end{cases} \qquad \therefore D = \frac{5{v_0}^2}{9\mu g}\,,\quad d = \frac{{v_0}^2}{3\mu g}\,.$$

10.2 物体の衝突

物体 A（質量 m，初速 u）と物体 B（質量 M，静止）の衝突を考える．物体間のはねかえり係数（反発係数）を e とする．衝突は，水平面内で 1 次元的に起こるものとする．

(1)　弾性衝突の場合を考える．衝突後の物体 A の速度 v，および物体 B の速度 V をそれぞれ求めよ．

(2)　非弾性衝突の場合を考える．衝突後の物体 A の速度 v，および物体 B の速度 V をそれぞれ求めよ．

(3)　完全非弾性衝突の場合を考える．衝突後の両物体の速度を求めよ．

【解答】

(1)　略（以下の解答に $e=1$ を代入せよ）．

(2)　運動量保存則・はね返り係数の定義より，

$$\begin{cases} mv + MV = mu\,, \\ v - V = -e(u-0)\,, \end{cases} \qquad \therefore v = -\frac{eM-m}{\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{M+m}}u\,,\quad V = \frac{(1+e)m}{M+m}u\,.$$

(3)　この場合，衝突方向の速度成分が等しくなる[*37]．運動量保存則より，

$$mv + Mv = mu\,, \qquad \therefore v = V = \frac{m}{\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{M+m}}u\,.$$

[*37] はね返り係数の式より．いちいち式を立ててもいいけど…

11.2 物体の衝突（2 次元）①

(1)　xy 平面内（水平でなめらか，摩擦なし）での 2 体の衝突を考える．質量 m の物体 A を，$+x$ 方向から速さ v_0 で運動させ，静止している質量 M の物体 B へ衝突させた．衝突後，物体 A は速さ v で x 軸から時計回りに $\theta > 0$ の方向へ，物体 B は速さ V で x 軸から反時計回りに $\phi > 0$ の方向へ運動した．

各方向の運動量保存則を考えることで，v，V を求めよ．

(2)　上記の問題で，衝突は弾性的であるとし，$m = M$ の場合を考える．このとき，$\theta + \phi = \dfrac{\pi}{2}$ を示せ．

【解答】

(1)　運動量保存則より，

$$\begin{cases} mv\cos\theta + MV\cos\phi = mv_0\,, \\ m(-v\sin\theta) + MV\sin\phi = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{\sin\phi}{\sin(\theta+\phi)}v_0}\,,\quad V = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{m\sin\theta}{M\sin(\theta+\phi)}v_0}\,.$$

(2)　弾性衝突ゆえ力学的エネルギーより，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2\,.$$

ここに上記結果を代入して，$M = m$ とすれば，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\left(\frac{\sin\phi}{\sin(\theta+\phi)}v_0\right)^2 + \frac{1}{2}M\left(\frac{m\sin\theta}{M\sin(\theta+\phi)}v_0\right)^2 &= \frac{1}{2}m{v_0}^2 \\ 2\sin\theta\sin\phi(\sin\theta\sin\phi - \cos\theta\cos\phi) &= 0 \\ 2\sin\theta\sin\phi\cos(\theta+\phi) &= 0\,. \end{aligned}$$

ここで，$\sin\theta \neq 0$，$\sin\phi \neq 0$ より，

$$\cos(\theta+\phi) = 0\,,\qquad \therefore \theta + \phi = \underset{\sim}{\frac{\pi}{2}}\,.$$

12.2 物体の衝突（2 次元）②

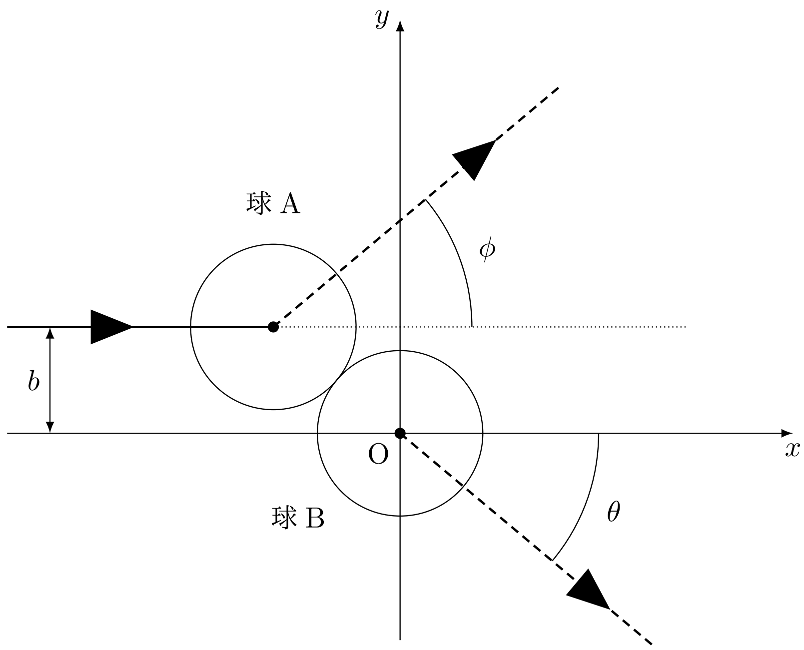
滑らかで水平な xy 平面上を，x 軸の正方向に速さ v_0 で運動する半径 r の剛体球 A が，原点に静止している半径 r の剛体球 B に弾性衝突するとき，球 A，B の質量をそれぞれ m，M，衝突後の球 A，B の速さをそれぞれ v，V として，以下の問いに答えよ．ただし，$v > 0$，$V > 0$，$M > m$ とする．

図 2 のように，球 A の中心が y 軸の正方向に $b\,(0 < b < 2r)$ ずれて衝突した．衝突の瞬間には 2 つの球の中心を通る直線に沿って力が働き，衝突後に球 A，B はそれぞれ x 軸の正方向と角度 ϕ，θ をなす方向に運動した．

(1)　運動量保存則を用いて，衝突後の球 A の速度の x 成分 $v\cos\phi$ と y 成分 $v\sin\phi$ を，v_0，V，m，M，θ の中から必要なものを用いて表せ．

(2)　衝突後の球 B の速さ V を v_0，m，M，θ を用いて表せ．

(3)　衝突後の球 A の運動エネルギーを v_0，m，M，r，b を用いて表せ．



【メモ】

2015 年岩手大学より，前半の問題を削除と問題文に少しだけ手を加えた．なお，問題の削除に伴い，図 1 を削除した．

【解答】

(1)　運動量保存則より，

$$\begin{cases} mv\cos\phi + MV\cos\theta = mv_0\,, \\ mv\sin\phi + M(-V\sin\theta) = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore\ v\cos\phi = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{v_0 - \frac{M}{m}V\cos\theta}\,,\quad v\sin\phi = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{M}{m}V\sin\theta}\,.$$

(2)　弾性衝突ゆえ，2 物体の力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2\,.$$

ここに (4) の結果を代入して，

$$V = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{2m}{M+m}v_0\cos\theta}\,.$$

(3)　図 2 より，

$$\sin\theta = \frac{r}{2b}\,,\quad \cos\theta = \sqrt{1-\frac{r^2}{4b^2}}\,.$$

よって，

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2 - \frac{1}{2}MV^2 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}m{v_0}^2\left\{1-\frac{4Mm}{(M+m)^2}\left(1-\frac{r^2}{4b^2}\right)\right\}}\,.$$

13. 壁との衝突①

図に示した壁面と物体の間の衝突を考える．x 軸を水平右向きに定める．物体の初速度を $v_0\,(>0)$ とし，物体と壁面の間のはねかえり係数（反発係数）を e とする．

I　壁面が固定されているときを考える．

(1)　衝突後の物体の速度 v を求めよ．

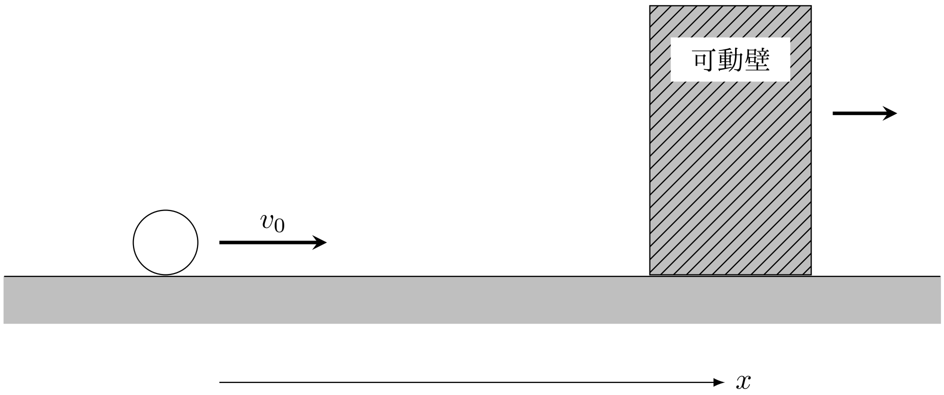
(2)　衝突の前後で，物体が壁から受けた力積 I を求めよ．

II　壁面が常に一定の速さ $u\,(<v_0)$ で運動している状況を考える．

(1)　衝突後の物体の速さ v を求めよ．

(2)　衝突後，物体が x 正方向に運動するための u の条件を求めよ．

(3)　衝突の前後で，壁が物体から受けた力積 I' を求めよ．



【メモ】

壁を等速で運動させるために，物体と壁からなる系には外力がはたらいており運動量は保存しない．

【解答】

I (1)　衝突の条件（はね返り係数）より，

$$v - 0 = -e(v_0 - 0)\,, \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim}{-ev_0}\,.$$

(2)　物体の運動量収支より，

$$I = \mathit{\Delta} p = m(-ev_0) - mv_0 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{-(1+e)mv_0}\,.$$

II (1)　衝突の条件より，

$$v - u = -e(v_0 - u)\,, \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{(1+e)u - ev_0}\,.$$

(2)　$v > 0$ を解いて，

$$(1+e)u - ev_0 > 0\,, \qquad \therefore \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{u > \frac{e}{1+e}v_0}\,.$$

(3)　物体が受ける力積を I とすると，作用・反作用の関係から $I = -I'$ であり，

$$I' = -\mathit{\Delta} p = -(mv - mv_0) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{m(1+e)(v_0 - u)}\,.$$

14. 壁との衝突②

重力加速度の大きさを g とする．小物体と滑らかな壁面，および床面の間のはねかえり係数（反発係数）を e とする．

I　位置 $(0, h)$ から位置 $x = \alpha h\,(\alpha > 0)$ にある壁に向かい，水平方向に速さ v_0 で小物体を打ち出した．小物体は床面に達する前に壁に衝突した．

(1)　地面に衝突する前に壁に衝突するための v_0 の条件を求めよ．

(2)　落下時刻 t を求めよ．

(3)　衝突後，床面に達した小物体の位置 x を求めよ．

II　小物体を高さ h の位置から静かに放した．この時刻を $t = 0$ とする．

(1)　床面に衝突する時刻 t を求め，この瞬間の速度 v を求めよ．

(2)　１回目に床面と衝突した後，次に折り返す高さ h_1 を求めよ．

(3)　衝突が収まる時刻 T を求めよ．なお，$0 < a < 1$ の定数に対し，$\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ となることを用いてよい．

【解答】

I (1)　衝突する時刻 t は水平方向の運動から $t = \dfrac{\alpha h}{v_0}$ である．この時刻で $y > 0$ であればよいので，

$$y = h - \frac{1}{2}g\left(\frac{\alpha h}{v_0}\right)^2 > 0\,, \qquad \therefore \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{v_0 > \alpha\sqrt{\frac{1}{2}gh}}\,.$$

(2)　衝突直後の速度の x 方向成分は，衝突の条件（はね返り係数の定義）より，

$$v_x - 0 = -e(v_0 - 0)\,, \qquad \therefore v_x = -ev_0\,.$$

鉛直方向は力積を受けないため，鉛直成分の速度成分は衝突の前後で変化しない．よって，落下時刻は $t' = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ であり[*38]，

$$x = \alpha h - ev_0\left(\sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{\alpha h}{v_0}\right) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{(1+e)\alpha h - ev_0\sqrt{\frac{2h}{g}}}\,.$$

II (1)　$y = 0$ を解いて，

$$h - \frac{1}{2}gt^2 = 0\,, \qquad \therefore t = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{2h}{g}}}\,, \quad v = \underset{\sim\sim\sim\sim}{-\sqrt{2gh}}\,.$$

(2)　衝突後の速度は $e\sqrt{2gh}$，最高点での速度が 0 より，衝突後から最高点までの時間は $t = e\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ である[*39]．よって，

$$h_1 = e\sqrt{2gh}\cdot e\sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{1}{2}g\left(e\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2 = \underset{\sim\sim}{e^2h}\,.$$

(3)　n 回目の衝突直後の速度を v_n とする．$n-1$ 回目の衝突直後から n 回目の衝突までの時間 τ_n は $\tau_n = \dfrac{2ev_{n-1}}{g}$ であり，v_n ははね返り係数の定義より，

$$v_n = -e(-v_{n-1}) = ev_{n-1} = e^2v_{n-2} = \cdots = e^n\sqrt{2gh}\,.$$

よって，

$$T = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{2h}{g}} + 2e^k\sqrt{\frac{2h}{g}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left\{1 + \frac{2e(1-e^n)}{1-e}\right\}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1+e}{1-e}\sqrt{\frac{2h}{g}}}\,.$$

[*38] 等加速度運動の式で，加速度が $-g$ として $y = 0$ を解く．
[*39] 等加速度運動の式で，加速度が $-g$ として $v = 0$ を解く．(3) では $y = 0$ を解けばよい．

15. 分裂

I　静止している質量 $3m$ の物体が，質量 m の物体 A と質量 $2m$ の物体 B に分裂した．物体 A の速度を $-v$ とするとき，物体 B の速度 V を求めよ．

II　速度 v_0 で運動する質量 M の物体の質量 $m\,(< M)$ の部分を，運動方向と逆方向に打ち出し分離させた．分離後の質量 $M-m$ の方の物体を A，質量 m の物体を B とする．A から観測した B の相対的な速さは，進行方向とは逆向きに u である．A の速度 V，B の速度 v をそれぞれ求めよ．

【解答】

I　運動量保存則より，

$$2mV + m(-v) = 3m \cdot 0\,, \qquad \therefore V = \underset{\sim}{\frac{v}{2}}\,.$$

II　運動量保存則・相対速度の式より，

$$\begin{cases} (M-m)V + mv = Mv_0\,, \\ v - V = -u\,, \end{cases} \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim}{v_0 - \left(1 - \frac{m}{M}\right)u}\,, \quad V = \underset{\sim\sim\sim}{v_0 + \frac{m}{M}u}\,.$$

16. **質量中心（重心）**[*40][*41]

以下の物体の重心の位置 (x, y) を求めよ．図の色が塗られている部分に一様に質量が分布している．

I　半径 a の円板からその中心と接するように半径 $b\,(< a)$ の円を切り取った物体（図 1）．

II　長さ ℓ の棒を，$s : 1 - s$ に内分して直角に折り曲げた物体（図 2）．

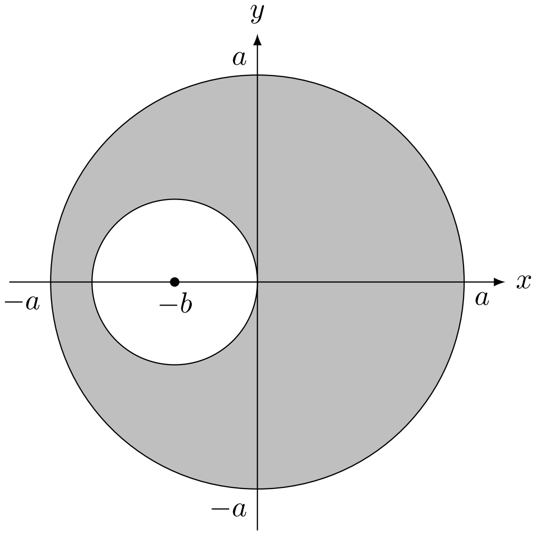


図 1

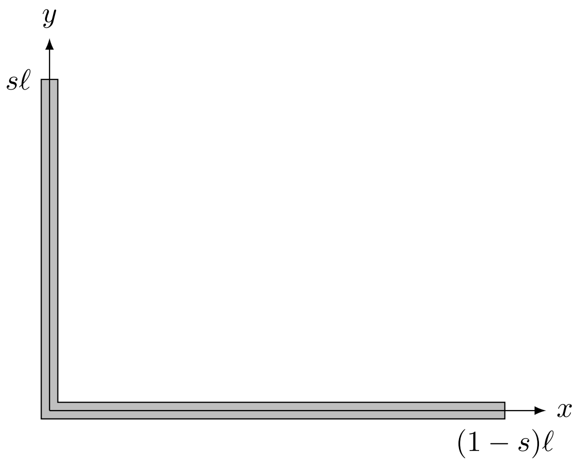


図 2

【解答】

I　y 成分は対称性から $\underset{\sim}{0}$ であることは明らか．色付きの部分の質量は，面密度を ρ とすると $\pi(a^2 - b^2)\rho$ である．よって，重心の定義より，

$$0 = \frac{\pi(a^2 - b^2)\rho x + \pi b^2 \rho(-b)}{\pi(a^2 - b^2)\rho + \pi b^2 \rho}, \qquad \therefore x = \frac{b^3}{a^2 - b^2}.$$

II　線密度を ρ とする．重心の定義より，

$$(x, y) = \left(\frac{s\ell\rho \cdot 0 + (1 - s)\ell\rho/2}{s\ell\rho + (1 - s)\ell\rho}, \frac{s\ell\rho/2 + (1 - s)\ell\rho \cdot 0}{s\ell\rho + (1 - s)\ell\rho} \right) = \left(\frac{(1 - s)}{2}\ell, \frac{s}{2}\ell \right).$$

*40 厳密には，質量中心と重心は等しいものをささない．
*41 本来は剛体の分野に載せるのがふさわしい問題だが，一つ後の問題で重心を扱うためここに入れてある．

17.（やらなくてもよい）重心運動と相対運動

図のように，滑らかで水平な床の上にばね（ばね定数 k，自然長 ℓ，質量無視）で繋がれた物体 A（質量 m）と物体 B（質量 $2m$）が置いてある．床に沿って水平右向きに x 軸を定める．

時刻 $t = 0$ に，A に初速度 $v_0\,(v_0 > 0)$ を与えた．時刻 t における A の位置を x_A，B の位置を x_B，A の速度を v_A，B の速度を v_B，A の加速度を a_A，B の加速度を a_B と記す．$t = 0$ において，$x_\mathrm{A} = 0$，$x_\mathrm{B} = \ell$ とする．

I　2 物体の運動方程式を立式せよ．

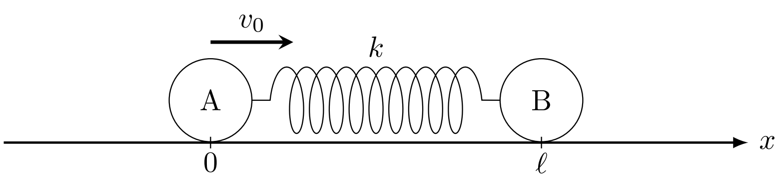
II　2 物体の運動方程式の和を取ることで，2 物体の重心の位置 X を，時刻 t の関数として表せ．

III　$y = x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}$ とする[*42]．2 物体の運動方程式を利用して，y を，時刻 t の関数として表せ．

IV　x_A，x_B を，時刻 t の関数として表せ．

V　はじめてばねの縮みが最大となる時刻 t_1 を求めよ．また，t_1 における A の速度 v_1，および B の速度 u_1，ばねの縮み s_1 を求めよ．

VI　はじめてばねが自然長に戻る時刻 t_2 を求めよ．また，t_2 における A の速度 v_2，および B の速度 u_2 を求めよ．



[*42] A に対する B の相対位置．今の場合ばねの長さを表す．

【メモ】

一見複雑（解くのが困難）に見える運動だが，実は運動方程式が既知の微分方程式に帰着するタイプの運動[*43][*44]．今後学習する『動く座標系』の章の知識を用いた誘導も存在する[*45]．

【解答】

I　運動方程式は，

$$\begin{cases} \underline{ma_{\mathrm{A}} = +k\{(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}) - \ell\}}\,, \\ \underline{2ma_{\mathrm{B}} = -k\{(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}) - \ell\}}\,. \end{cases}$$

II　2 式の和を取って[*46]，

$$\begin{aligned} ma_{\mathrm{A}} + 2ma_{\mathrm{B}} &= 0 \\ \therefore mv_{\mathrm{A}} + 2mv_{\mathrm{B}} &= mv_0 + 2m \cdot 0 \\ \therefore mx_{\mathrm{A}} + 2mx_{\mathrm{B}} &= m \cdot 0 + 2m\ell + mv_0 t \\ \therefore X &= \underline{\frac{2}{3}\ell + \frac{1}{3}v_0 t}\,. \end{aligned}$$

III　$y = x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}$ より，

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}) = \frac{d^2 x_{\mathrm{B}}}{dt^2} - \frac{d^2 x_{\mathrm{A}}}{dt^2} = a_{\mathrm{B}} - a_{\mathrm{A}}\,.$$

よって，運動方程式より，

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{3k}{2m}(y - \ell)$$

となり，y は，角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{3k}{2m}}$，振動中心 $y = \ell$ の単振動を行うことがわかる．初期条件から求まる積分定数を C，D とすれば，

$$y = \ell + C\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}}\,t\right) + D\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}}\,t\right)$$

[*43] この問題の基本は保存則の連立である．このような誘導がない限りこの計算をたどる必要はない．

[*44] 鉛直方向の問題も作れる．この場合，2 物体からなる系に対して，運動方向に重力が外力として作用するため運動方向の運動量は保存しない．そのため，このような誘導を付ける他ない．

[*45] 重心とともに動く座標系（重心系）から 2 物体を観測する誘導，A とともに動く座標系から B を観測する誘導がある．

[*46] 運動量保存則と同値．

と表せる．$t=0$ において，$y=\ell$，$\dfrac{dy}{dt}=-v_0$ より[*47]，

$$\begin{cases} \ell = \ell + D \\ -v_0 = C\sqrt{\dfrac{3k}{2m}} \end{cases} \qquad \therefore C = -v_0\sqrt{\frac{2m}{3k}}\,,\quad D=0\,,$$

と求まり，

$$y = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\ell - v_0\sqrt{\frac{2m}{3k}}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}}\,t\right)}\,.$$

IV　I，II より，

$$\begin{cases} x_{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{3}v_0 t + \dfrac{2}{3}v_0\sqrt{\dfrac{2m}{3k}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{3k}{2m}}\,t\right), \\ x_{\mathrm{B}} = \ell + \dfrac{1}{3}v_0 t - \dfrac{1}{3}v_0\sqrt{\dfrac{2m}{3k}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{3k}{2m}}\,t\right). \end{cases}$$

V　y の最小値を取る瞬間を考えればよい[*48]．したがって，

$$\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}}\,t\right) = 1\,,\qquad \therefore t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2m}{3k}} = \pi\sqrt{\frac{m}{6k}}\,.$$

このときのばねの縮みは，

$$s_1 = \ell - y = v_0\sqrt{\frac{2m}{3k}}\,.$$

また，このとき 2 物体の速度は等しく[*49]，

$$v_1 = u_1 = \frac{1}{3}v_0\,.$$

VI　再び $y=\ell$ となるときを考えて，

$$\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}}\,t\right) = 0\,,\qquad \therefore t_2 = \pi\sqrt{\frac{2m}{3k}}\,.$$

よって[*50]，

$$v_2 = -\frac{1}{3}v_0\,,\quad u_2 = \frac{2}{3}v_0\,.$$

---

*47 $y(0) = x_{\mathrm{B}}(0) - x_{\mathrm{A}}(0)$，$\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0} = v_{\mathrm{B}}(0) - v_{\mathrm{A}}(0)$ である．

*48 ばねの縮み $\ell - y$ の最大となる瞬間を考えても良い．

*49 実際に代入してもわかるし，相対位置が極値を取ることから $\dfrac{dy}{dt}=0$ を満たし，2 物体の速度が等しい（相対速度が 0 である）ことがわかる．このとき，2 物体の速度は重心速度とも一致する．

*50 $v_{\mathrm{A}} = \dfrac{dx_{\mathrm{A}}}{dt}$，$v_{\mathrm{B}} = \dfrac{dx_{\mathrm{B}}}{dt}$ に代入して計算してもよいし，運動量保存則（重心の運動方程式から得られた速度の関係式）とこの瞬間の相対速度 $\dfrac{dy}{dt} = -v_0$ を用いて連立方程式を解いてもよい．

§2.3 円運動

第 3 章では，円に束縛された運動を扱う．円に束縛された運動は，高校範囲では例外的に扱う．また，等速円運動と非等速円運動で解法が異なることに留意する．

■簡単なまとめ

- 等速円運動：

$$\begin{cases}\text{運動方程式の中心成分} \\ \text{（力のつりあい）}\end{cases}$$

- 非等速円運動：

$$\begin{cases}\text{運動方程式の中心成分} \\ \text{力学的エネルギー保存則}\end{cases}$$

力学的エネルギー保存則は，運動方程式の接線成分と同値である．力学的エネルギー保存則でなく運動方程式の接線成分で考えるもので主なものは，①単振り子，②ベータトロン（磁気分野）がある．

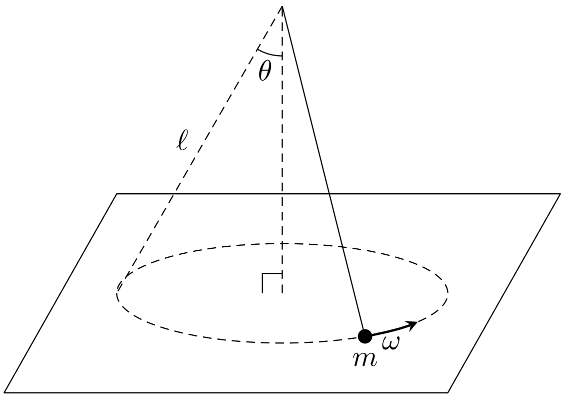
1. 等速円運動①

図のように，糸（長さ ℓ，質量，伸縮ともに無視）の一端を固定し，他端になめらかで水平な板上にある質量 m の小球を取り付け，糸と鉛直線とのなす角 θ の位置で角速度 ω の等速円運動をさせた．重力加速度の大きさを g とする．

I　小球の速さ v，および円運動の周期 T を求めよ．

II　運動方程式，およびつりあいより，張力の大きさ S，垂直抗力の大きさ N を求めよ．

III　小球が板から離れないための角速度 ω の条件を求めよ．



【解答】

I　公式より，

$$v = \underline{\ell\omega\sin\theta}\,, \qquad \therefore T = \frac{2\pi\ell\sin\theta}{v} = \underline{\frac{2\pi}{\omega}}\,.$$

II　運動方程式（中心成分），および鉛直方向のつりあいより[*51]，

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{\ell\sin\theta} = S\sin\theta\,, \\ 0 = S\cos\theta + N - mg\,, \end{cases} \qquad S = \underline{m\ell\omega^2}\,, \quad N = \underline{mg - m\ell\omega^2\cos\theta}\,.$$

III　$N \geq 0$ を考えて[*52]，

$$mg - m\ell\omega^2\cos\theta \geq 0\,, \qquad \therefore \underline{\omega \leq \sqrt{\frac{g}{\ell\cos\theta}}}\,.$$

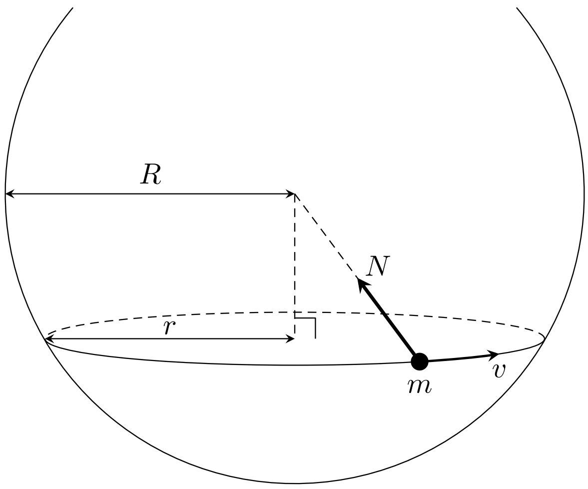
[*51] 中心方向の加速度は $\dfrac{(\text{速さ})^2}{(\text{半径})}$ の形を優先して覚えてほしいので解答はこちらで載せてある．v は前問の値を代入すればよい．

[*52] 等号の取り扱いだが，付けて議論しても付けなくて議論してもどちらでもよい．問題文を読んで判断する．

2. 等速円運動②

図のように，半径 R の球殻内で，大きさの無視できる質量 m の小球を半径 $r\ (< R)$ の円運動をさせた．小球の運動は水平面内に限られるものとし，重力加速度の大きさを g とする．

小球の速さ v，および小球が球殻から受ける垂直抗力の大きさ N を求めよ．



【解答】

運動方程式（中心成分），および鉛直方向のつりあいより，

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{r} = N\dfrac{r}{R}\,, \\ 0 = N\dfrac{\sqrt{R^2-r^2}}{R} - mg\,, \end{cases} \qquad N = \underline{\dfrac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}mg}\,,\quad v = r\underline{\sqrt{\dfrac{g}{\sqrt{R^2-r^2}}}}\,.$$

3. 非等速円運動①

糸（長さ ℓ，質量，伸縮ともに無視）に吊られ静止している小球（質量 m）に，大きさ v_0 の初速を与えた．小球の回転角 θ を図のように定める．重力加速度の大きさを g とする．

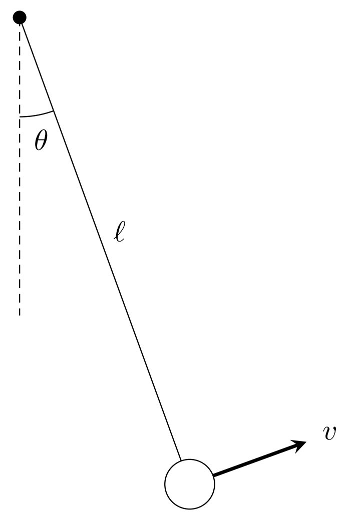
I　小球が角度 θ にあるときの小物体の速さ v を，力学的エネルギー保存則を考えることで求めよ．

II　小球が角度 θ にあるときの張力の大きさ S を，運動方程式の中心成分を考えることで求めよ．

III　小球が円軌道を取るための v_0 の最小値を求めよ．

IV　小球を繋ぐ糸を，質量の無視できる変形のない棒に変えた．このとき，小球が円軌道を取るための v_0 の最小値を求めよ．

V　初速が十分小さいとき，小球の運動は単振動と見なせる．振動の周期 T を求めよ．ただし，$|\theta| \ll 1$ に対して成り立つ近似式 $\sin\theta \fallingdotseq 1$ を用いてよい．



【メモ】

非等速円運動は，以下の 2 式を連立する[*53][*54]．

$$\begin{cases} \text{運動方程式（中心成分）} & \leftarrow \quad v\text{ を決定した後，拘束力の決定} \\ \text{力学的エネルギー保存則} & \leftarrow \quad v\text{ の決定} \end{cases}$$

【解答】

I　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\ell(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}m{v_0}^2\,, \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{{v_0}^2 - 2g\ell(1-\cos\theta)}}\,.$$

II　運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{v^2}{\ell} = S - mg\cos\theta\,, \qquad \therefore S = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{m\frac{{v_0}^2}{\ell} - mg(2-3\cos\theta)}\,.$$

III　$\theta = \pi$ で $S \geq 0$ が必要．よって，

$$S = m\frac{{v_0}^2}{\ell} - 5mg \geq 0\,, \qquad \therefore v_0 \geq \underset{\sim\sim}{\sqrt{5g\ell}}\,.$$

IV　最高点での速さが 0 以上であればよい．よって，

$${v_0}^2 - 4mg\ell \geq 0\,, \qquad \therefore v_0 \geq \underset{\sim\sim}{2\sqrt{g\ell}}\,.$$

V　運動方程式（接線成分）より，

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\theta\,.$$

ここで，$v = \ell\dfrac{d\theta}{dt}$ であり，微小角の場合を考えて，

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta \fallingdotseq -\frac{g}{\ell}\theta\,.$$

よって，運動の周期 T は，

$$T = \underset{\sim\sim}{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}\,.$$

[*53] 等速円運動は，運動方程式（中心成分）と必要に応じて各種つりあいを立てる．

[*54] 単振り子やベータトロンなどでは，力学的エネルギー保存則ではなく，それと数学的には同値な接線方向の運動方程式を考える．

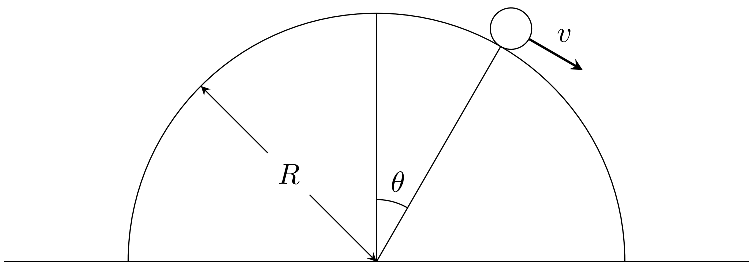
4. 非等速円運動②

図のように，水平面上に半径 R の半球台が固定されて置かれている．その最高点に質量 m で大きさの無視できる小物体が静止している．小物体に水平右向きの初速 v_0 を与えたところ，小物体は球面上を運動し，ある点で台から離れた．小物体の球面上の位置は，鉛直線と小物体と球の中心を結ぶ線分とのなす角 θ で与えることができる．重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えよ．摩擦は全て無視できるものとする．

I　小物体が球面上から離れていない間の運動を考える．角度 θ にあるときの小物体の速さを v，小物体が台から受ける垂直抗力の大きさを N とする．力学的エネルギー保存則より，v を θ の関数として求めよ．また，中心方向の運動方程式をより，N を θ の関数として求めよ．

II　小物体が $\theta = 0$ で球面上から離れないための条件を求めよ．

III　小物体が台から離れる位置を $\theta = \theta_0$ とする．$\cos\theta_0$ を求めよ．



【解答】

I　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR\cos\theta = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + mgR, \quad \therefore v(\theta) = \sqrt{{v_0}^2 + 2gR(1-\cos\theta)}.$$

中心方向の運動方程式より，

$$m\frac{v^2}{R} = mg\cos\theta - N, \quad \therefore N(\theta) = mg(3\cos\theta - 2) - m\frac{{v_0}^2}{R}.$$

II　$\theta = 0$ で $N > 0$ が必要．よって，

$$N(\theta = 0) = mg - m\frac{{v_0}^2}{R} > 0, \quad \therefore v_0 < \sqrt{gR}.$$

III　$N(\theta = \theta_0) = 0$ より，

$$N(\theta = 0) = mg(3\cos\theta_0 - 2) - m\frac{{v_0}^2}{R} = 0, \quad \therefore \cos\theta_0 = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{{v_0}^2}{gR}\right).$$

5. 非等速円運動（入試問題みたいな問題）[*55]

図１－１のように，半径 R の半円筒形を持つ質量 $3m$ の台と，台上にある質量 m の小球の運動について考える．小球が円筒面上にあるとき，小物体の台上での位置を，その中心 O からの角 θ で表す（図１－2）．台は水平面から離れることなく運動するものとし，一切の摩擦を無視する．重力加速度の大きさを g とする．

I　台を固定し，小球に水平右向きに大きさ v_0 の初速を与えた．

(1)　小球が角 θ の位置にあるとき，小球の速さ v，および小球が台から受ける垂直抗力の大きさ N を求めよ．

(2)　小球が円筒面の点 A を通過して飛び出すためには，v_0 はある値 v_{m} より大きい必要がある．v_{m} を求めよ．

II　台を自由にし，小球に水平右向きに大きさ v_0 の初速を与えた．水平右向きを正とする．

(1)　小球はある位置で台の円筒面上を折り返した．この瞬間の小球の速度 v_1 を求めよ．

(2)　小球が折り返した後，小球が再び台の水平面上を運動するときの小球の速度 v_2，および台の速度 V_2 を求めよ．なお，折り返しの前後で小球が台から離れることはないものとする．

(3)　小球が台上の位置 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ を一回目に通過するときの台の速度 V を求めよ．

(4)　小球が円筒面の点 A を通過して飛び出すためには，v_0 はある値 v_{m} より大きい必要がある．v_{m} を求めよ．なお，台から観測した小球の運動は円運動であり，小球が角 θ にあるときの小球の速度を $\vec{v} = (v_x, v_y)$，台の速度を V，台の加速度を A，垂直抗力の大きさを N としたとき，台の運動方程式は

$$3mA = N \sin\theta$$

と与えられ，このとき，台から観測した小球の運動方程式の中心成分が，

$$m\frac{(v_x - V)^2 + {v_y}^2}{R} = N - mg\cos\theta + mA\sin\theta$$

となることを用いてよい．

[*55] 設問 II は多体系の運動の内容で，(3)，(4) は難しいのでやらなくても良い．

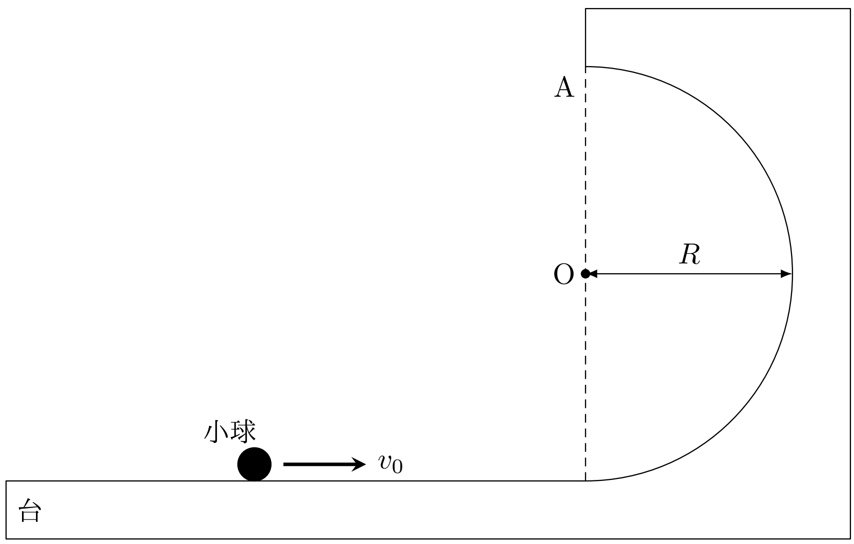


図 1 − 1

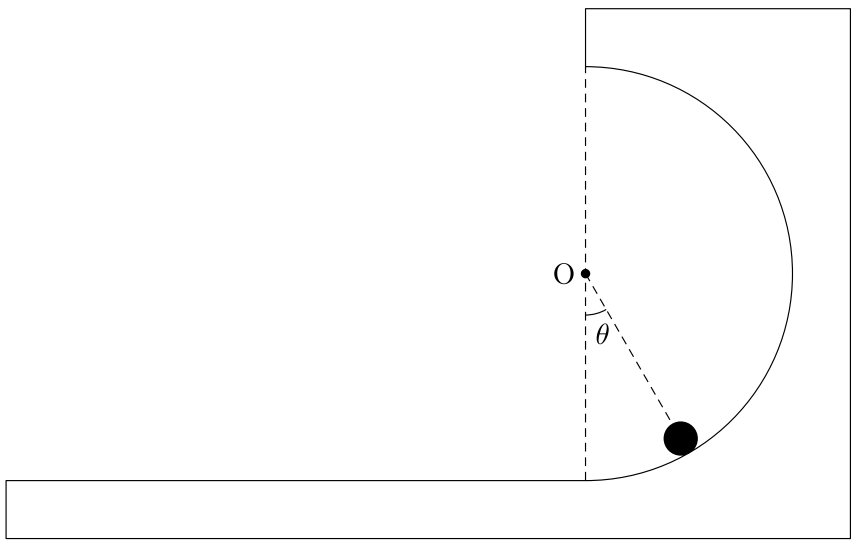


図 1 − 2

【解答】

I (1)　運動方程式（中心成分）・力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{R} = N - mg\cos\theta\,, \\ \dfrac{1}{2}mv^2 + mgR(1-\cos\theta) = \dfrac{1}{2}m{v_0}^2\,. \end{cases}$$

以上 2 式より，

$$v = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{{v_0}^2 - 2gR(1-\cos\theta)}}\,,\quad N = \underset{\sim\sim\sim}{m\frac{{v_0}^2}{R} - mg(2-3\cos\theta)}\,.$$

(2)　$\theta = \pi$ で $N > 0$ を満たせばよく，

$$N(\theta=\pi) = m\frac{{v_0}^2}{R} - 5mg > 0\,,\qquad \therefore v_0 > \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{5gR}}\,(= v_{\mathrm{m}})\,.$$

II (1)　小球の速度を $\vec{v} = (v_x,\, v_y)$，台の速度を $\vec{V} = (V,\, 0)$ と記す．折り返したことから，小球と台の水平方向の相対的な位置は極値を取り，$v_x = V$ である．よって，運動量保存則より[*56]，

$$mv_1 + 3mv_1 = mv_0\,,\qquad \therefore v_1 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{4}v_0}\,.$$

(2)　運動量・全体のエネルギー保存則より，$V \neq 0$ なので[*57*58]，

$$\begin{cases} mv_2 + 3mV_2 = mv_0\,, \\ \dfrac{1}{2}m({v_2}^2 + 0^2) + \dfrac{1}{2}\cdot 3m{V_2}^2 = \dfrac{1}{2}m{v_0}^2\,, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_2 + 3V_2 = v_0\,, \\ 3{V_2}^2 = {v_0}^2 - {v_2}^2 = (v_0 - v_2)(v_0 + v_2)\,, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_2 + 3V_2 = v_0\,, \\ V_2 = v_0 + v_2\,, \end{cases}\qquad \therefore v_2 = \underset{\sim\sim\sim}{-\frac{1}{2}v_0}\,,\quad V_2 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}v_0}\,.$$

(3)　束縛条件まで考慮して，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ を代入すれば，

$$\begin{cases} mv_x + 3mV = mv_0\,, \\ \dfrac{1}{2}m({v_x}^2 + {v_y}^2) + \dfrac{1}{2}\cdot 3mV^2 + \dfrac{1}{2}mgR = \dfrac{1}{2}m{v_0}^2\,, \\ v_y = \sqrt{3}\,(v_x - V)\,, \end{cases}$$

---

*56 以下，小球，台，重力場を 1 つの系と見る．

*57 2 つ目から 3 つ目の計算では，$3V = v_0 - v_x$ を利用．

*58 全体で見たとき垂直抗力は仕事をせず系のエネルギーは保存するため（詳しくは**【補足 5】**），この状況を弾性衝突と見なして始めから 3 つ目の式を立てても良い．というのも，3 つ目の第 2 式は，

$$V - v_x = -1\cdot(0 - v_0)$$

とはね返り係数 1 の式と同値となっている．

運動量保存則から v_x を V で表し，束縛条件から v_y を V で表し，エネルギー保存則を解いて[*59]，

$$
\begin{aligned}
(v_0-3V)^2+\{\sqrt{3}\,(v_0-4V)\}^2+3V^2+gR={v_0}^2 \\
60V^2-30v_0V+3{v_0}^2+gR=0 \\
\therefore V=\frac{v_0}{4}\left(1\pm\sqrt{\frac{1}{5}-\frac{4gR}{15{v_0}^2}}\right).
\end{aligned}
$$

このとき，v_y は

$$
v_y=\mp v_0\sqrt{\frac{3}{5}-\frac{4gR}{5{v_0}^2}}
$$

であり，一回目に通過することから $v_y>0$ となる解を選んで，

$$
V=\underline{\frac{v_0}{4}\left(1+\sqrt{\frac{1}{5}-\frac{4gR}{15{v_0}^2}}\right)}.
$$

(4)　$\theta=\pi$ では，

$$
\begin{cases}
mv_x+3mV=mv_0\,, \\
\dfrac{1}{2}m({v_x}^2+{v_y}^2)+\dfrac{1}{2}\cdot 3mV^2+2mgR=\dfrac{1}{2}m{v_0}^2\,, \\
v_y=0\,,
\end{cases}
$$

$$
\therefore v_x=\frac{v_0}{4}\left(1-3\sqrt{1-\frac{8gR}{3{v_0}^2}}\right),\quad V=\frac{v_0}{4}\left(1+\sqrt{1-\frac{8gR}{3{v_0}^2}}\right).
$$

また，$\theta=\pi$ での台の運動方程式から $A=0$ であり，台上から観測した小球の運動方程式より，

$$
\begin{aligned}
N&=m\frac{(v_x-V)^2}{R}-mg \\
&=m\frac{{v_0}^2}{R}\left(1-\frac{8gR}{3{v_0}^2}\right)-mg\geq 0\,,\qquad \therefore v_0\geq\underline{\sqrt{\frac{11}{3}gR}}\,(=v_{\mathrm{m}})\,.
\end{aligned}
$$

【補足 1】運動方程式の接線成分と力学的エネルギー保存則

設問 I において，運動方程式は，

$$
\begin{cases}
m\dfrac{v^2}{R}=N-mg\cos\theta\,, \\
m\dfrac{dv}{dt}=-mg\sin\theta\,.
\end{cases}
$$

*59 根号の前の符号が正の解が上り，負の解が下りの解を与えている．

ここでは，第 2 式の接線成分に注目する．両辺に v をかけて，

$$mv\frac{dv}{dt} + mgv\sin\theta = 0\,.$$

ここで，$v = R\omega = R\dfrac{d\theta}{dt}$ より，

$$\begin{aligned} mv\frac{dv}{dt} + mgR\frac{d\theta}{dt}\sin\theta &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 - mgR\cos\theta\right) &= 0 \\ \therefore\ \frac{1}{2}mv^2 - mgR\cos\theta &= \mathrm{const} \end{aligned}$$

を得る．本問では，はじめ $v = v_0$，$\theta = 0$ より，

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgR\cos\theta = \frac{1}{2}m{v_0}^2 - mgR$$

となり，解答で用いた式を得る[*60]．

【補足２】束縛条件

小球の位置を $(x,\,y)$，台の位置を $(X,\,R)$[*61]，小球の速度を $\vec{v} = (v_x,\,v_y)$，台の速度を $\vec{V} = (V,\,0)$ と記す．

このとき，面が変形せず，小球が台にめり込んだり台から離れたりしないことから必ず次の関係を満たす．

$$\begin{cases} x - X = R\sin\theta\,, \\ y - R = -R\cos\theta\,. \end{cases}$$

この式の時間微分を考えて，

$$\begin{cases} v_x - V = R\dot{\theta}\cos\theta\,, \\ v_y - 0 = R\dot{\theta}\sin\theta\,, \end{cases} \qquad \therefore\ v_y - 0 = (v_x - V)\tan\theta\,,$$

を得る[*62]．なお，相対速度の式の 2 乗の和を取ると，

$$(v_x - V)^2 + (v_y - 0)^2 = (R\dot{\theta})^2 = (R\omega)^2$$

*60 この式の両辺を t で微分すれば運動方程式の接線成分が得られる．

*61 y 軸の原点はどこにとっても良いが，今回は台の上面に取る．O の位置を原点とするのが最も単純な気がする．

*62 相対加速度は簡単（キレイ）な形にならないことに注意（速度と三角関数の積の微分による項が生じてしまうため）．相対加速度がキレイな形となるのは面が直線の場合に限る．ということは，面が直線のとき（三角台とか）は，保存則以外にも運動方程式による解法が存在するわけである（例えば，1 学期の中間試験で出したようなやつ）．ここら辺についても詳しく知りたい場合は前期補講の教材で確認を．

となり，台に対する小球の相対速度の大きさは，円運動で用いる $v = R\omega$ の式を満たしていることも確認できる．

また，

$$\begin{pmatrix} v_x - V \\ v_y - 0 \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

より，相対速度は台の曲面の接線方向を向いていることも確認できる[*63]．

*63 $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ は，円弧に接する方向の単位ベクトル．

§2.4 中心力

第 4 章では，中心力場での物体の運動を扱う（主に天体が絡むの運動）．中心力場での物体の運動は時間追跡が困難なため，保存則の頼る他ない[*64]．そこで，系の力学的エネルギーに加えて，中心力場での物体の運動固有の保存量である面積速度という物理量を導入し，力学変数（位置や速度）を決定することとなる．なお，問題 ***1*** のように，天体が絡む運動以外で面積速度保存則を利用する場合，必ず問題文中に断り書きが入る．

■簡単なまとめ

- 天体が絡む運動：

❶ 円軌道の場合：円運動ゆえ円運動と同様例外的に扱う．

$$\begin{cases} \text{運動方程式の中心成分} \\ \text{（力のつりあい）} \end{cases}$$

なお，運動の周期は，速さ v で円周 $2\pi\times$（半径）だけ進む時間を考えればよい．

❷ 円以外の軌道：

$$\begin{cases} \text{力学的エネルギー保存則} \\ \text{面積速度保存則} \end{cases}$$

また，楕円軌道（長半径 a，短半径 b）の場合は周期 T が存在し，その決定は以下の 2 通り存在する（ケプラー第 3 法則を利用するのが一般的）．

$$\begin{cases} \dfrac{T^2}{a^3} = \text{const} = \text{（同一天体周りの別軌道での値）} \quad \leftarrow \quad \text{ケプラー第 3 法則} \\ \dfrac{\pi ab}{T} = \text{（ある地点での面積速度）} \end{cases}$$

- 重力加速度の大きさ g と万有引力定数 G：地表付近の物体のつりあいより以下が成立（R：地球の半径，M 地球の質量）．

$$mg = G\frac{Mm}{R^2}\,, \qquad \therefore g = \frac{GM}{R^2}\,.$$

[*64] 高校範囲での話．

1. 万有引力

地球（質量 M）の周囲を回る人工衛星（質量 m）の運動を考える．万有引力定数を G とする．以下の設問に答えよ．なお，各設問においてすべての軌道は地球の内側を通らないものとする．

(1)　人工衛星が半径 r の円軌道をしている場合を考える．人工衛星の速さ v_0 を，G，M，r を用いて表せ．

(2)　円軌道をしている人工衛星を，適当な操作によって加速させた（この間の人工衛星の質量変化は無視）．地球の中心と近地点（地球から最も近い点）までの距離を r，遠地点（地球から最も遠い点）までの距離を R，近地点での人工衛星の速さを v_{P}，遠地点での人工衛星の速さを v_{Q} とする．v_{P}，v_{Q} を，G，M，R，r を用いて表せ．

【メモ】

円軌道→運動方程式，楕円軌道（一般に，円以外の軌道）→面積速度・力学的エネルギー保存則．

【解答】

(1)　運動方程式（中心方向）より，

$$m\frac{{v_0}^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2}\,,\qquad \therefore v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}}\,.$$

(2)　面積速度・力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}rv_{\mathrm{P}} = \dfrac{1}{2}Rv_{\mathrm{Q}}\,, \\ \dfrac{1}{2}m{v_{\mathrm{P}}}^2 + \left(-G\dfrac{Mm}{r}\right) = \dfrac{1}{2}m{v_{\mathrm{Q}}}^2 + \left(-G\dfrac{Mm}{r}\right)\,, \end{cases}$$

$$\therefore v_{\mathrm{P}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}\frac{R}{R+r}}\,,\quad v_{\mathrm{Q}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}\frac{r}{R+r}}\,.$$

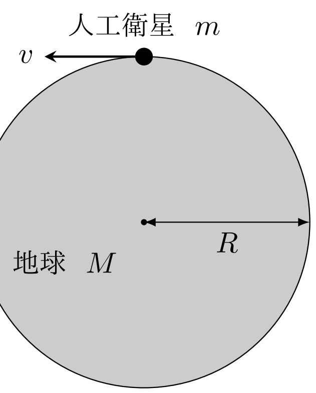
2. g と G，第〇宇宙速度

図のように，地球（質量 M，半径 R）から人工衛星（質量 m）を打ち上げる．万有引力定数を G，重力加速度の大きさを g とする．以下の設問に答えよ．

(1)　重力加速度の大きさ g を，G，M，R を用いて表せ．

(2)　速さ v_1 で打ち上げたとき，地上上空を周回した．この軌道は円軌道とみなせ，その半径は R としてよい．v_1 を，g，R を用いて表せ[*65]．

(3)　ある速さ v_2 より大きな速さで打ち上げたとき，人工衛星は無限遠へ飛び去った．v_2 を，g，R を用いて表せ[*66]．



*65 この速さ v_1 を第 1 宇宙速度と呼ぶ．
*66 この速さ v_2 を第 2 宇宙速度と呼ぶ．

【メモ】

地表における物体に働く重力から，万有引力定数 G を重力加速度の大きさ g で書き換える．

【解答】

(1)　地球表面において物体に働く重力から，

$$mg = G\frac{Mm}{R^2}\,, \qquad \therefore g = \frac{GM}{R^2}\,.$$

(2)　運動方程式（中心方向）より，

$$m\frac{{v_1}^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2}\,, \qquad \therefore v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR}\,.$$

(3)　力学的エネルギー保存則より，

$$K_\infty + U_\infty = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{Mm}{R}\right)\,.$$

ここで，無限遠へ到達するためには，$K_\infty > 0$ が必要．$U_\infty = 0$ であるから，

$$K_\infty = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{Mm}{R}\right) > 0\,, \qquad \therefore v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR}\,.$$

3. ケプラー第 1 法則・第 2 法則，万有引力の法則から，第 3 法則を導く

太陽（質量 M）を不動と見なし，その周囲を公転する惑星について考える．惑星は，太陽からの万有引力のみを受けて運動するものとし，万有引力定数を G，太陽と近日点の距離を r，太陽と遠日点の距離を R とする．以下では，ケプラー第 1 法則，ケプラー第 2 法則を前提とする．

(1)　惑星の太陽を中心とした面積速度を h とする．近日点での惑星の速さ v，および遠日点での惑星の速さ V を，それぞれ h，r，R の中から必要なものを用いて表せ．

(2)　惑星の太陽を中心とした面積速度 h を，それぞれ r，R を用いて表せ．

(3)　楕円の性質を利用し，惑星の楕円軌道の長半径 a，および短半径 b を，それぞれ r，R を用いて表せ．

(4)　ケプラー第 2 法則を前提とすると，惑星の公転周期は，

$$T = \frac{\pi ab}{h}$$

を満たす．このことを用いて，$\dfrac{T^2}{a^3}$ の値を求め，ケプラー第 3 法則の成立を確認せよ．

【解答】

(1)　面積速度保存則（ケプラー第 2 法則）より，

$$v = \frac{2h}{r}\,,\quad V = \frac{2h}{R}\,.$$

(2)　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{2h}{r}\right)^2 + \left(-G\frac{Mm}{r}\right) = \frac{1}{2}m\left(\frac{2h}{R}\right)^2 + \left(-G\frac{Mm}{R}\right)\,, \qquad \therefore h = \sqrt{\frac{GMRr}{2(R+r)}}\,.$$

(3)　楕円の性質より，

$$2a = r + R\,, \qquad \therefore a = \frac{r+R}{2}\,.$$

また，

$$2a = 2\sqrt{b^2 + \left(\frac{R-r}{2}\right)^2}\,, \qquad \therefore b = \sqrt{Rr}\,.$$

(4)　前問の結果より，面積速度は，

$$h = \sqrt{\frac{GMRr}{2(R+r)}} = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{GM}{a}}\,.$$

よって[*67]，

$$T = \frac{\pi ab}{b/2\sqrt{GM/a}} = 4\pi a\sqrt{\frac{a}{GM}}\,, \qquad \therefore \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}\,.$$

*67 $\dfrac{T^2}{a^3}$ の値は太陽（中心にある天体）の質量で決まることから，太陽の周囲を公転する天体では共通の値を取る．

4. ケプラー則

地球（質量 M，半径 R）の周囲を回る静止衛星（周回軌道の半径 R，質量 m）を考える．万有引力定数を G とする．以下の設問に答えよ．

(1)　静止衛星の周期 T_1 を，G，M，R を用いて表せ．

(2)　続いて，人工衛星を適当な方法によって加速し（この間の質量変化は無視する），軌道を楕円軌道に移した．地球の中心から近地点（地球から最も近い点）までの距離は R，地球の中心から遠地点（地球から最も遠い点）は $3R$ である．この周回軌道における周期 T_2 を，G，M，R を用いて表せ．

(3)　近地点における人工衛星の速さ v，遠地点における人工衛星の速さ u を，G，M，R を用いて表せ．

【解答】

(1)　運動方程式（中心方向）より，

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2}\,, \qquad \therefore v = \sqrt{\frac{GM}{R}}\,.$$

今，等速円運動ゆえ 1 周（円周 $2\pi R$）に要する時間 T_1 は，

$$T_1 = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}}\,.$$

(2)　ケプラー第 3 法則より，

$$\frac{{T_2}^2}{(2R)^3} = \frac{{T_1}^2}{R^3}\,, \qquad \therefore T_2 = 4\pi R\sqrt{\frac{2R}{GM}}\,.$$

(3)　面積速度・力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}Rv = \dfrac{1}{2}\cdot 3Ru\,, \\ \dfrac{1}{2}mv^2 - G\dfrac{Mm}{R} = \dfrac{1}{2}mu^2 - G\dfrac{Mm}{3R}\,, \end{cases} \qquad \therefore v = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{GM}{6R}}\,, \quad u = \sqrt{\frac{GM}{6R}}\,.$$

5. 天体の運動・計算ドリル

xy 平面上の原点 O に質量 M の大天体がある．大天体からの万有引力のみを受けて運動する質量 m の小天体の運動について考えよう．大天体の質量 M は，小天体の質量 m に比べて十分大きく，大天体は動かないものとする．小天体は，点 A$(-r_0, 0)$ から，初速 $(0, v_0)$ で運動を始めた（ただし，$r_0 > 0$，$v_0 > 0$）．万有引力定数を G とする．以下の設問に答えよ．

I　$v_0 = v_1$ のとき，小天体は半径 r_0 の円軌道をとる．また，$v_0 > v_2$ のとき，小天体は無限遠へ飛び去る．v_1，v_2 をそれぞれ G，M，r_0 を用いて表せ．

II　v_0 が $v_0 < v_2$ を満たす場合を考える．このとき，小天体は楕円軌道をとり，小天体が大天体から最も遠ざかった点を点 B$(\alpha r_0, 0)$（$\alpha > 1$）とする．なお，解答には G，M，r_0，α 以外の文字を用いてはならず，円周率を π とせよ．

(1)　小天体が点 B を通過する瞬間の速さを v とする．v_0，v をそれぞれ求めよ．

(2)　小天体が x 軸から最も遠い点 D$\left(\dfrac{\alpha-1}{2}r_0, b\right)$，または点 E$\left(\dfrac{\alpha-1}{2}r_0, -b\right)$ を通過する瞬間の速さを V とする．b，V をそれぞれ求めよ．

(3)　運動の周期 T を，ケプラーの第 3 法則を利用して求めよ．

(4)　運動の周期 T を，面積速度保存則を利用して求めよ．

III　v_0 が $v_0 > v_2$ を満たす場合を考える．このとき，小天体は双曲線軌道をとり，双曲線の漸近線を ℓ とする．無限遠での小天体の速さを v_∞，漸近線 ℓ と原点 O（大天体）の距離 c とする．v_∞，c をそれぞれ求めよ．

I　（おまけ）

(1)　図 1 のように，楕円軌道上の適当な点 P と，楕円の中心 C 対して点 P と点対称な位置にあるような点 Q をとる．小天体が点 P，および点 Q の位置にあるときの小天体の速度ベクトルをそれぞれ $\vec{v}_\mathrm{P}$，$\vec{v}_\mathrm{Q}$，その大きさをそれぞれ v_P，v_Q とする．v_P と v_Q の積 $v_\mathrm{P}v_\mathrm{Q}$ を求めよ．

(2)　小天体の速度ベクトルの先端が描く軌跡（ホドグラフ）について考える．ホドグラフを，その概形の図形的な特徴を与える量を記し図示せよ．

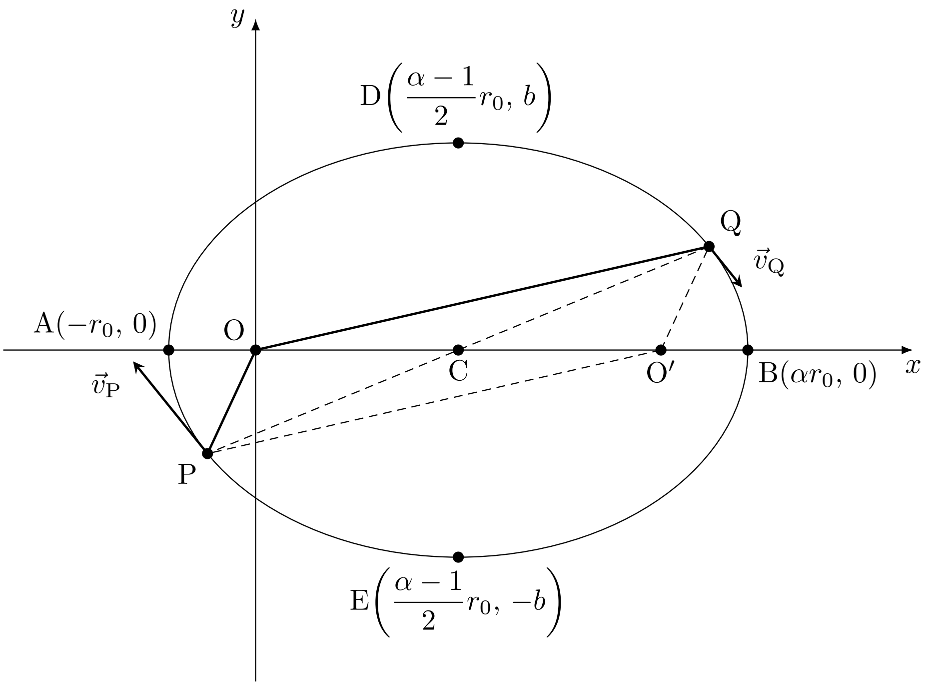

y
D$\left(\dfrac{\alpha-1}{2}r_0,\ b\right)$
Q
$\vec{v}_\mathrm{Q}$
A$(-r_0,\ 0)$
O
C
O$'$
B$(\alpha r_0,\ 0)$
x
$\vec{v}_\mathrm{P}$
P
E$\left(\dfrac{\alpha-1}{2}r_0,\ -b\right)$

図 1

【メモ】

円軌道→運動方程式，楕円軌道（より一般に，放物線（設問 I），双曲線軌道（設問 III））→面積速度・力学定期エネルギー保存則.

【解答】

I　$v_0 = v_1$ のとき，小天体は円運動を行うため，

$$m\frac{{v_1}^2}{r_0} = G\frac{Mm}{{r_0}^2}\,, \quad \therefore v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}\,.$$

$v_0 > v_2$ のとき，小天体は無限遠へ到達することから，

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 - G\frac{Mm}{r_0} = K_\infty + 0 = 0\,, \quad \therefore v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}\,.$$

II (1)　面積速度・力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}r_0 v_0 = \dfrac{1}{2}\alpha r_0 v\,, \\ \dfrac{1}{2}m{v_0}^2 - G\dfrac{Mm}{r_0} = \dfrac{1}{2}mv^2 - G\dfrac{Mm}{\alpha r_0}\,, \end{cases}$$

$$\therefore v_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}\frac{2GM}{r_0}}\,, \quad v = \sqrt{\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\frac{2GM}{r_0}}\,.$$

(2)　楕円の性質から，

$$2\sqrt{\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)^2{r_0}^2 + b^2} = r_0 + \alpha r_0\,, \quad \therefore b = \sqrt{\alpha}\,r_0\,.$$

面積速度・力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}r_{\mathrm{D}}V\sin\theta = \dfrac{1}{2}r_0 v_0\,, \\ \left(\dfrac{1}{2}mV^2 - G\dfrac{Mm}{r_{\mathrm{D}}} = \dfrac{1}{2}m{v_0}^2 - G\dfrac{Mm}{r_0}\right)\,. \end{cases}$$

ここで，$r_{\mathrm{D}} = \sqrt{\left(\dfrac{\alpha-1}{2}\right)^2{r_0}^2 + b^2}$ であり，$\sin\theta$ は図より $\sin\theta = \dfrac{b}{r_{\mathrm{D}}}$ ゆえ，II(1) の結果を利用し v_0 を消去すれば，

$$V = \sqrt{\frac{1}{\alpha+1}\frac{2GM}{r_0}}\,.$$

(3)　円軌道での周期は $T_0 = 2\pi r_0\sqrt{\dfrac{r_0}{GM}}$ なので，ケプラー第 3 法則より，

$$\frac{T^2}{(\alpha+1)^3{r_0}^3/8} = \frac{T_0^2}{{r_0}^3}\,, \quad \therefore T = \pi(\alpha+1)r_0\sqrt{\frac{(\alpha+1)r_0}{2GM}}\,.$$

(4)　面積速度保存則より，

$$\frac{\pi\dfrac{\alpha+1}{2}b}{T}=\frac{1}{2}r_0v_0\,,\quad \therefore T=\pi(\alpha+1)r_0\sqrt{\frac{(\alpha+1)r_0}{2GM}}\,.$$

III　面積速度・力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}r_0v_0=\dfrac{1}{2}cv_\infty\,,\\[4pt] \dfrac{1}{2}m{v_0}^2-G\dfrac{Mm}{r_0}=\dfrac{1}{2}m{v_\infty}^2\,,\end{cases}\qquad \therefore v_\infty=\sqrt{{v_0}^2-\frac{2GM}{r_0}}\,,\quad c=\frac{v_0}{\sqrt{{v_0}^2-\dfrac{2GM}{r_0}}}r_0\,.$$

IV (1)　原点 O から点 P までの距離を r_{P}，点 Q までの距離を r_{Q}，位置ベクトルと速度ベクトルのなす角をそれぞれ θ_{P}，θ_{Q} とする．面積速度・力学的エネルギー保存則より，

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}r_{\mathrm{P}}v_{\mathrm{P}}\sin\theta_{\mathrm{P}}=\dfrac{1}{2}r_{\mathrm{Q}}v_{\mathrm{Q}}\sin\theta_{\mathrm{Q}}\,,\\[4pt] \dfrac{1}{2}m{v_{\mathrm{P}}}^2-G\dfrac{Mm}{r_{\mathrm{P}}}=\dfrac{1}{2}m{v_{\mathrm{Q}}}^2-G\dfrac{Mm}{r_{\mathrm{Q}}}\,.\end{cases}$$

ここで，一般に楕円の性質として $\theta_{\mathrm{P}}+\theta_{\mathrm{Q}}=\pi$ が成り立つ[*68]ので，$\sin\theta_{\mathrm{Q}}=\sin(\pi-\theta_{\mathrm{P}})=\sin\theta_{\mathrm{P}}$ が成り立つ．ゆえに，面積速度保存則は，

$$\frac{1}{2}r_{\mathrm{P}}v_{\mathrm{P}}=\frac{1}{2}r_{\mathrm{Q}}v_{\mathrm{Q}}$$

と書ける．以上 2 式を解いて，

$$v_{\mathrm{P}}=\sqrt{\frac{2GM}{r_{\mathrm{P}}+r_{\mathrm{Q}}}\frac{r_{\mathrm{Q}}}{r_{\mathrm{P}}}}\,,\quad v_{\mathrm{P}}=\sqrt{\frac{2GM}{r_{\mathrm{P}}+r_{\mathrm{Q}}}\frac{r_{\mathrm{P}}}{r_{\mathrm{Q}}}}\,.$$

したがって，これらの積を取れば，

$$v_{\mathrm{P}}v_{\mathrm{Q}}=\frac{2GM}{r_{\mathrm{P}}+r_{\mathrm{Q}}}=\frac{2GM}{(\alpha+1)r_0}\,.$$

(2)　II(5) より，逆向きのベクトルの大きさの積が一定値となることから，方べきの定理の逆よりベクトルの先端の点は円状に並ぶ．したがって，ホドグラフは円となる．また，その半径を R とすると，$R=\dfrac{v_0+v}{2}=\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)\dfrac{GM}{2r_0}}$ である．

*68 図を考えれば明らか．

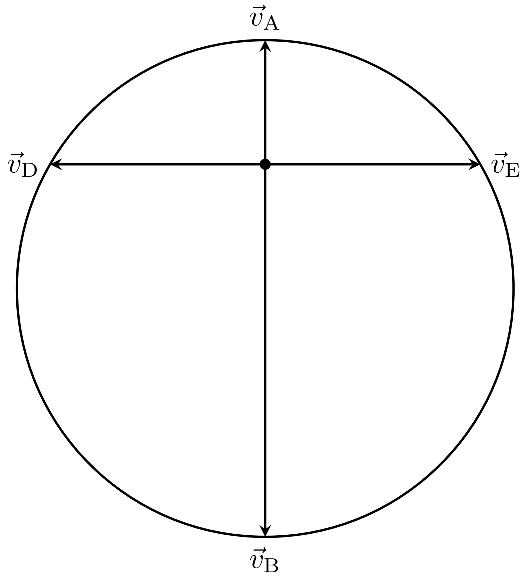


図　ホドグラフ

各点での速度を $v_k\,(k=\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D})$ としてある.

6. 面積速度保存則

図 1 のように，なめらかで十分に広い水平板に小穴 O をあけ，質量の無視できる伸び縮みしない糸を通し，その両端に質量 m の小物体 P と質量 M の小さいおもり Q を付ける．おもり Q，小穴 O は同一鉛直線上にあり，Q は鉛直方向にのみ動けるものとする．小物体 P は水平板上にあり，糸は十分に長く，おもり Q が水平板に衝突することはない．小穴 O と糸との間の摩擦，空気抵抗は無視する．重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えよ．

I　P に水平板上で O から距離 a だけ離れた位置で，糸に直交する方向に大きさ v の初速度を与えたところ，P は半径 a の等速円運動をした．v を，a，M，m，g を用いて表せ．

II　P に水平板上で O から距離 a だけ離れた位置で，糸に直交する方向に大きさ $\sqrt{2}v$ の初速度を与えたところ，Q は上昇を始めた．Q が最も高い位置に達したときの P の速さを u，OP 間の距離を b とする．

(1)　P は中心力のみを受けて運動しているため，P の面積速度は保存する．P の面積速度保存則を表す式を記せ．

(2)　P，Q，糸を合わせた系全体の力学的エネルギー保存則を考えることにより，u，b を，a，M，m，g の中から必要なものを用いて表せ．

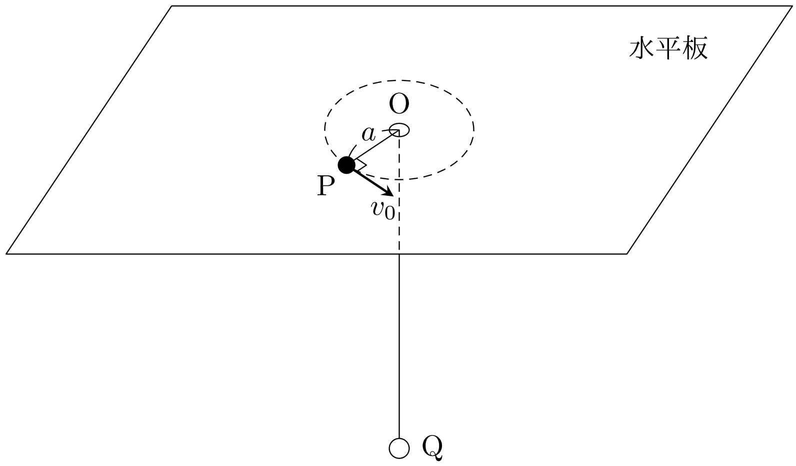


図 1

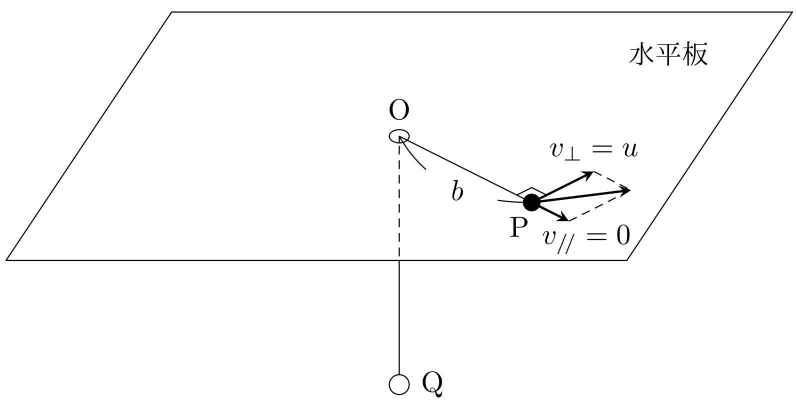


図 2

【メモ】

中心力を受ける物体の運動．「入試物理」において，ケプラー第 2 法則以外での面積速度保存則の利用は，必ず問題文で指示される．

【解答】

I　運動方程式（P は中心方向）より，

$$\begin{cases} \mathrm{P}: m\dfrac{v^2}{a} = T\,, \\ \mathrm{Q}: M\cdot 0 = T - Mg\,, \end{cases} \qquad \therefore v = \sqrt{\frac{M}{m}ga}\,,\quad T = Mg\,.$$

II (1)　面積速度保存則より，

$$\frac{1}{2}bu = \frac{1}{2}a\cdot\sqrt{2}\,v\,.$$

(2)　P，Q 合わせた全体の系における力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}M\cdot 0^2 + Mg(b-a) = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{2}\,v\right)^2 + \frac{1}{2}M\cdot 0^2 + Mg\cdot 0$$
$$\therefore \frac{1}{2}mu^2 + Mg(b-a) = mv^2\,.$$

面積速度保存則，および力学的エネルギー保存則より[*69]，

$$b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a\,,\quad u = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{\frac{2M}{m}ga}\,.$$

[*69] I の結果を利用．

§2.5 動く座標系

第 5 章では，動く座標系内での運動のうち，特に加速運動している座標系内での物体の運動を扱う．加速座標系内部での物体には見かけの力/架空の力（慣性力）が生じる．高校範囲では，並進に対する慣性力と，回転座標系での慣性力のうち遠心力のみを扱う[*70]．

なお，この章での学習は，どの座標系で考えているかという「視点の固定」が重要であり，扱う問題では，視点を固定し慣性力さえ考慮できればさほど難しくないので，意図的に難しめにした．そのため，全ての問題に手を付ける必要はない（問題タイトルの指示にしたがってくれればよい）．

■簡単なまとめ

- 加速座標系での運動方程式（並進）:

$$ma_{\mathrm{rel}} = f - mA\,.$$

  a_{rel} は加速座標系に対する物体の相対加速度，A は座標系の加速度．

- 回転座標系での運動方程式：

$$ma = f - mr\omega^2\,.$$

  a は回転する座標系に対する動径方向の相対加速度，r は回転軸からの距離，ω は座標系の回転角速度．

- 見かけの重力：見かけの重力加速度の方向に見かけの高さを取ることで通常の重力のように扱える．

[*70] 授業では，コリオリ力，オイラー力についても言及している．

1. 慣性力①

水平面上にある板状の台（質量 M，以後台と呼ぶ）の上の物体（質量 m）の運動を考える．今，2 物体の間にのみ摩擦が生じ，物体間の静止摩擦係数を μ，動摩擦係数を μ' とする．台に，時間に比例して大きくなる外力 $F=kt\,(k>0)$ を加えたところ，時刻 t_1 を超えたところで，物体は台の上をすべり始めた．

(1)　物体間に滑りが生じていないときの物体間の静止摩擦力の大きさを R，2 物体の加速度の大きさを a とする．台固定座標系での物体の運動方程式，および地面固定座標系での台の運動方程式より，a，R を求めよ．

(2)　t_1 を求めよ．

(3)　$t>t_1$ において，台固定座標系における物体の加速度 b を求めよ．動摩擦力がはたらく向きを正とする．

【解答】

(1)　台固定座標系での物体の運動方程式，および地面固定座標系での台の運動方程式より，

$$\begin{cases} m\cdot 0 = R - ma\,, \\ Ma = kt - R\,, \end{cases} \qquad \therefore a = \frac{k}{M+m}t\,,\quad R = \frac{m}{M+m}kt\,.$$

(2)　最大摩擦となる瞬間を考えて，$N=mg$ より，

$$R=\mu N\,,\qquad \therefore t_1 = \frac{\mu(M+m)g}{k}\,.$$

(3)　台固定座標系での物体の運動方程式，および地面固定座標系での台の運動方程式より，

$$\begin{cases} mb = \mu' mg - ma\,, \\ Ma = kt - \mu' mg\,, \end{cases} \qquad \therefore a = -\mu'\frac{m}{M}g + \frac{k}{M}t\,,\quad b = \left(1+\frac{m}{M}\right)\mu' g - \frac{k}{M}t\,.$$

2. 慣性力②　三角台と台上物体の運動（II-(3) まで必答）

図のように，斜面の傾斜角 $\theta\,(0 < \theta < \pi/2)$，質量 M の台形状の台を床に置き，台の斜面上に質量 m の小物体を静かに置いた．水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸，三角台上の斜面下向きに X 軸，斜面垂直上向きに Y 軸を定める．一切の摩擦は無視し，重力加速度の大きさを g とする．

I　台に水平右向きの一定外力を加え加速度 A_0 の等加速度運動をさせたところ，小物体は斜面上に静止したままだった．

(1)　台と小物体の間の垂直抗力の大きさを N，糸の張力の大きさを T とする．台固定系における小物体の X 方向，および Y 方向の運動方程式を立式し，T，N をそれぞれ求めよ．

(2)　小物体が台に対して静止するための A_0 の範囲を求めよ．

II　再び台と小物体を静止させた状態で糸を切断した．この時刻を $t = 0$ とし，このときの小物体の斜面上の位置座標は $(X, Y) = (L, 0)$ である．また，OO$'$ 間の距離は h である．

(1)　台と小物体の間にはたらく垂直抗力の大きさを N，台の x 方向の加速度を A，台から見た小物体の相対加速度を a とする．台の x 方向の運動方程式と，台固定系における小物体の X 方向および Y 方向の運動方程式を立式せよ．

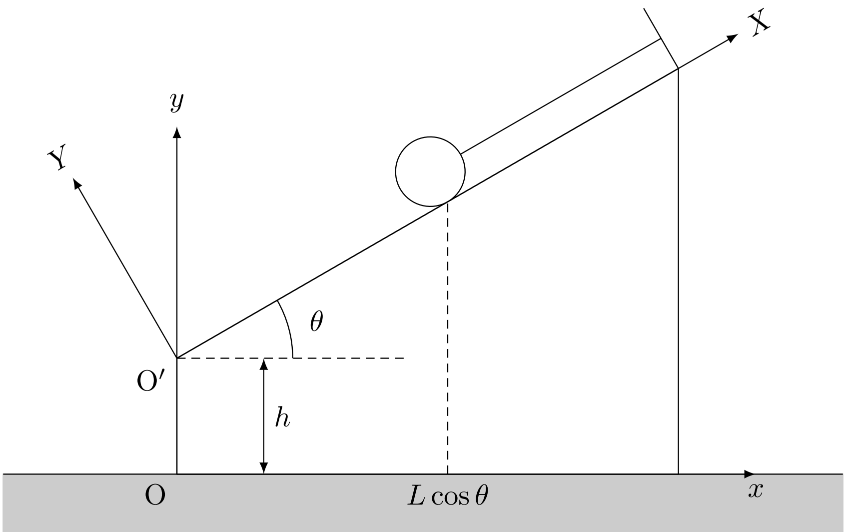
(2)　A，a，N を求めよ．

(3)　小物体の x 方向の加速度を a_x，y 方向の加速度を a_y とする．a_x，a_y を求めよ．

(4)　小物体が台から飛び出す時刻 t_0 を求めよ．

(5)　時刻 t_0 における小物体，および台の速度を求めよ．

(6)　$M = 2m$，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$，$h = \dfrac{4}{3}L$ とする．小物体が床面に落下する時刻 t_1，および落下した位置 x_1 を求めよ．



X
y
Y
θ
O′
h
O
L cos θ
x

【メモ】

よくある 2 体の運動．束縛条件を利用した解き方が基本で，慣性力はあくまでも問題文で指示されたときに考える．

【解答】

I (1)　台固定系での運動方程式より，

$$\begin{cases} X: m\cdot 0 = T - mg\sin\theta - mA_0\cos\theta\,, \\ Y: m\cdot 0 = N + mA_0\sin\theta - mg\cos\theta\,, \end{cases}$$

$$\therefore T = \underline{m(g\sin\theta + A_0\cos\theta)}\,,\quad N = \underline{m(g\cos\theta - A_0\sin\theta)}\,.$$

(2)　$T > 0$ かつ $N > 0$ を満たせばよい．よって，

$$\underline{-g\tan\theta < A_0 < \frac{g}{\tan\theta}}\,.$$

II (1)　運動方程式は，

$$\begin{cases} X: \underline{ma = -mA_x\cos\theta - mg\sin\theta}\,, \\ Y: \underline{m\cdot 0 = N + mA_x\sin\theta - mg\cos\theta}\,, \\ x: \underline{MA_x = N\sin\theta}\,. \end{cases}$$

(2)　運動方程式を解いて，

$$A_x = \underline{\frac{m\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g}\,,\quad a = \underline{-\frac{(M+m)\sin\theta}{M + m\sin^2\theta}g}\,.\quad N = \underline{\frac{Mm\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g}\,.$$

(3)　相対加速度の x 成分，y 成分はそれぞれ，

$$\vec{a}_{\mathrm{rel}} = \begin{pmatrix} a_x - A_x \\ a_y - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \end{pmatrix}.$$

よって，

$$a_x = a\cos\theta + A_x = \underline{-\frac{M\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}g}\,,\quad a_y = a\sin\theta = \underline{-\frac{(M+m)\sin^2\theta}{M + m\sin^2\theta}g}\,.$$

(4)　台固定系での小物体の運動について，$X = 0$ を満たす時刻を考えて，

$$0 = L + \frac{1}{2}at^2\,,\qquad \therefore t_0 = \sqrt{\frac{2L}{-a}} = \underline{\sqrt{\frac{M + m\sin^2\theta}{(M+m)\sin\theta}\frac{2L}{g}}}\,.$$

(5)　地面固定系での小物体の速度，および台の速度は，

$$v_x = a_x t_0 = \underset{\sim\sim\sim}{-M\cos\theta\sqrt{\frac{2gL\sin\theta}{(M+m)(M+m\sin^2\theta)}}}\,,$$

$$v_y = a_y t_0 = \underset{\sim\sim\sim}{-\sin\theta\sqrt{\frac{(M+m)\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}2gL}}\,,$$

$$V = At_0 = \underset{\sim\sim\sim}{m\cos\theta\sqrt{\frac{2gL\sin\theta}{(M+m)(M+m\sin^2\theta)}}}\,.$$

(6)　このとき[*71]，

$$t_0 = \sqrt{\frac{3L}{g}}\,,\quad v_y = -\sqrt{\frac{gL}{3}}\,,\quad a_x = -\frac{2\sqrt{3}}{9}g\,,\quad v_x = a_x t_0 = -\frac{2}{3}\sqrt{gL}\,.$$

飛び出した瞬間を $\tau = 0$ として，

$$h - \sqrt{\frac{gL}{3}}\tau - \frac{1}{2}g\tau^2 = 0\,,\qquad \therefore \tau = -\sqrt{\frac{L}{3g}}\left(-1 + \sqrt{1 + 6\frac{h}{L}}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3L}{g}}\,.$$

よって，

$$t_1 = t_0 + \tau = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{5}{3}\sqrt{\frac{3L}{g}}}\,.$$

このとき[*72]，

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}L - \frac{2}{3}\sqrt{gL}\,\tau = \frac{\sqrt{3}}{6}L - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3L}{g}} = \underset{\sim\sim\sim}{-\frac{5\sqrt{3}}{18}L}\,.$$

[*71] 先に共通して出る量を計算しておくとよい．

$$M + m = 3m\,,\quad M + m\sin^2\theta = 2m + \frac{1}{4}m = \frac{9}{4}m\,.$$

[*72] 台から離れた時刻を $\tau = 0$ とすると，このとき $x = \frac{\sqrt{3}}{6}L$ にあり，以降 x 方向には $v_x = -\frac{2}{3}\sqrt{gL}$ で等速運動をする．

3. 慣性力③

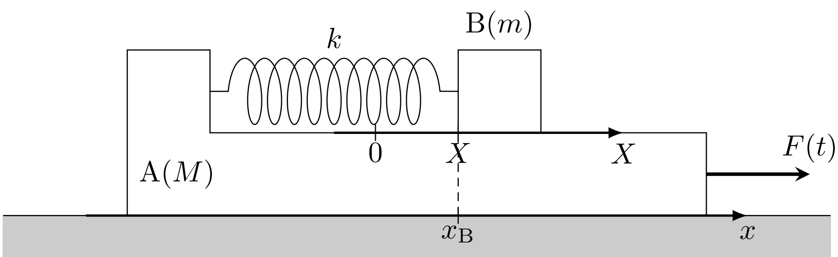
図のように，水平面上に物体 A（質量 M）があり，A の上に物体 B（質量 m）が載せられ，両物体はばね（ばね定数 k，質量無視）で接続されている．静止している物体 A に，時間変化する外力 F を加えることで，物体 A を一定の加速度 A で運動させた．運動を始めた時刻を $t = 0$ とする．物体 A 上に，ばねが自然長の位置を原点とし，右向きに X 軸（台固定座標系と呼ぶ）を定める．また，同様にして地面に固定された座標軸として水平右向きに x 軸（地面固定座標系と呼ぶ）を定める．一切の摩擦を無視する．

(1) B が X 軸上で位置 X にあるとき，台固定座標系での B の加速度を a とする．B の運動方程式を立式せよ．

(2) B は A に対して単振動を行う．単振動の周期 T と，振動中心 X_0 を求めよ．

(3) F を時刻 t の関数として求めよ．ただし，$t = 0$ における A，および B の位置はともに $x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{B}} = 0$ とする．

(4) B の速度 v_{B} を，時刻 t の関数として表せ．また，各物体の $v - t$ グラフの概形を図示せよ．



【解答】

(1)　台固定座標系での運動方程式は，

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{ma = -kX - mA}\,.$$

(2)　運動方程式より，

$$a = -\frac{k}{m}\left(X + \frac{mA}{k}\right).$$

よって，

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,,\quad X_0 = -\frac{mA}{k}\,.$$

(3)　初期条件 $X(0) = 0$，$\dot{X}(0) = 0$ より，

$$X(t) = -\frac{mA}{k} + \frac{mA}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right).$$

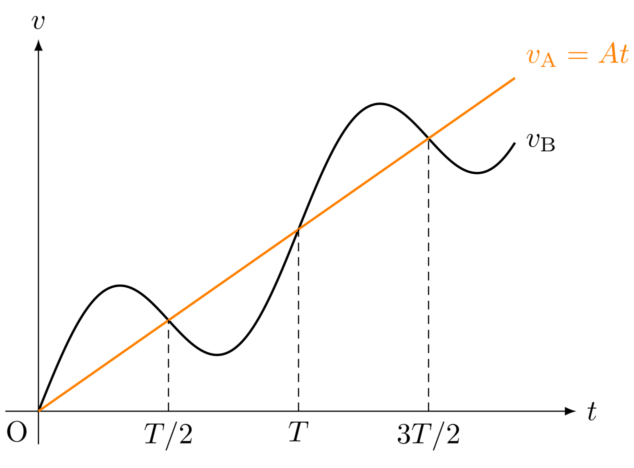
A の運動方程式より，

$$MA = +kX(t) + F(t)\,,\qquad \therefore F(t) = (M+m)A\left\{1 - \frac{m}{M+m}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\right\}.$$

(4)　$V = \dot{X}$ は相対速度ゆえ，

$$V = v_{\mathrm{A}} - v_{\mathrm{B}}\,,\qquad \therefore v_{\mathrm{B}} = A\left\{t + \sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\right\}.$$

グラフは以下のような概形になる．



4. 回転座標系の慣性力①（遠心力）((3) まで必答)

図のように，水平に置かれた円板板の中心を通るようにまっすぐに掘られた溝に小物体（質量 m）があり，小物体は水平板の中心とばね（ばね定数 k，自然長 ℓ，質量無視）で繋がれている．円板の中心を原点とし，中心から溝に沿って円の周に向かう向きに X 軸（台固定座標系と呼ぶ）を定める．また，円板の中心を原点とし，水平面上に xy 平面（xy 平面を地面固定座標系と呼ぶ）を定める．時刻 $t=0$ に，小物体は $(x(0),y(0))=(\ell,0)$ にあり，円板を中心を回転軸に角速度 ω で回転させた．小物体は溝に沿って運動し，一切の摩擦は無視する．

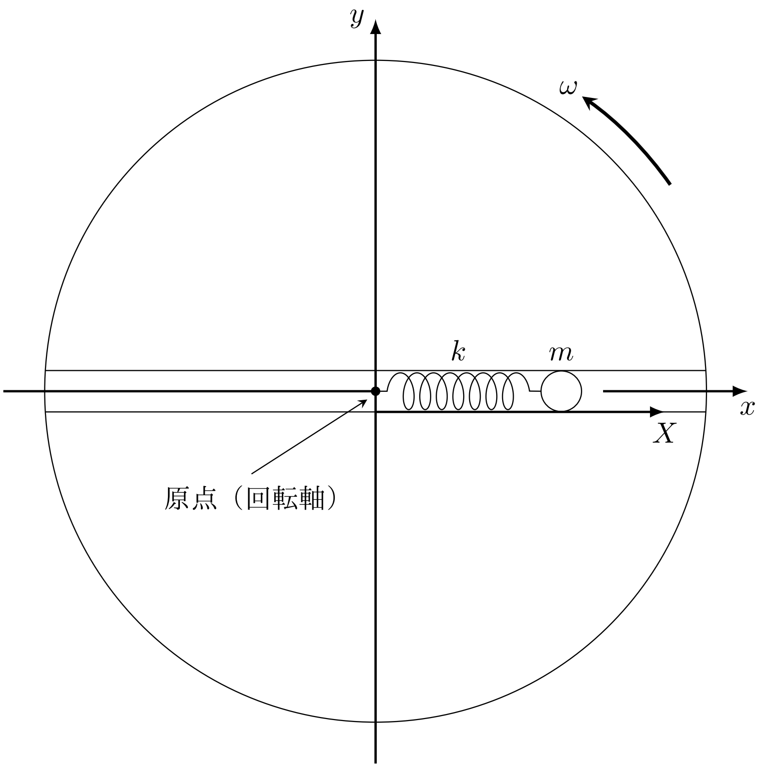
(1)　小物体が X 軸上で位置 X にあるとき，台固定座標系での小物体の加速度を a とする．小物体の運動方程式を立式せよ．

(2)　小物体が X 軸上で単振動を行うために，ω が満たす条件を求めよ．

(3)　ω が上記の条件を満たすとき，単振動の周期 T と，振動中心 X_0 を求めよ．

(4)　地面固定座標系における物体の位置 (x,y) を，時刻 t の関数として表せ．

(5)　円板が 1 周したときに，小物体の軌道が閉じたものとなるために ω が満たすべき条件を求めよ．自然数として n を用いよ．



【解答】

(1)　台固定座標系での運動方程式は，

$$\underset{\sim}{ma = -k(X-\ell) + mX\omega^2}\,.$$

(2)　運動方程式より，

$$a = -\frac{k-m\omega^2}{m}\left(X - \frac{k}{k-m\omega^2}\ell\right).$$

小物体が X 軸上で単振動を行うには，X の比例定数が負であればよく，

$$-\frac{k-m\omega^2}{m} < 0\,, \qquad \therefore\, \omega < \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

(3)　運動方程式より，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k-m\omega^2}}\,, \quad X_0 = \frac{k}{k-m\omega^2}\ell\,.$$

(4)　初期条件 $X(0) = \ell$，$\dot{X}(0) = 0$ より，

$$X(t) = \frac{k}{k-m\omega^2}\ell - \frac{m\omega^2}{k-m\omega^2}\ell\cos\left(\sqrt{\frac{k-m\omega^2}{m}}\,t\right).$$

ここで，

$$\begin{cases} x(t) = X(t)\cos(\omega t)\,, \\ y(t) = X(t)\sin(\omega t)\,, \end{cases}$$

より，

$$\begin{cases} x(t) = \left\{\dfrac{k}{k-m\omega^2}\ell - \dfrac{m\omega^2}{k-m\omega^2}\ell\cos\left(\sqrt{\dfrac{k-m\omega^2}{m}}\,t\right)\right\}\cos(\omega t)\,, \\ y(t) = \left\{\dfrac{k}{k-m\omega^2}\ell - \dfrac{m\omega^2}{k-m\omega^2}\ell\cos\left(\sqrt{\dfrac{k-m\omega^2}{m}}\,t\right)\right\}\sin(\omega t)\,, \end{cases}$$

(5)　小物体の単振動の角振動数を Ω とする．このとき，$\dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\Omega}n$ を満たせばよく，

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{n^2+1}\frac{k}{m}}\,.$$

5. 回転座標系の慣性力②（遠心力）(**(3)** まで必答）

図のように，円形のリング（半径 r）に小球（質量 m）を通してある．リングの中心を通る鉛直線と，小球とリングの中心を結んだ線の間の角度を反時計回りを正に $\theta\,(-\pi < \theta < \pi)$ と定める．リングをその中心を通る鉛直線を回転軸として一定角速度 ω で回転させたときの小球の運動について，リングとともに回転する座標系に乗って考える．重力加速度の大きさを g とし，一切の摩擦を無視する．

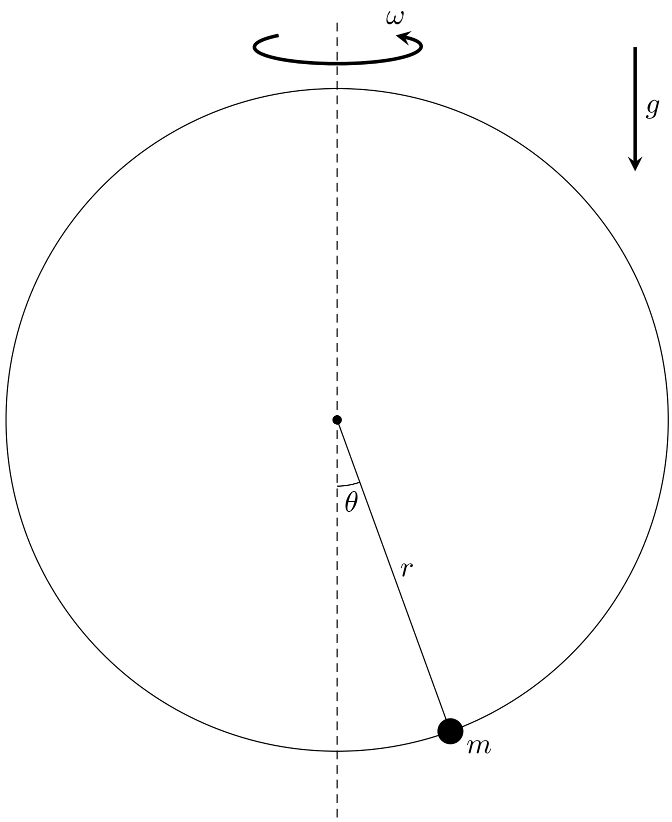
(1)　小球が θ にあるとき，小球にはたらく力の（リングに対する）接線成分 F_θ を求めよ．

(2)　θ が $|\theta| \ll 1$ を満たす場合，小球の運動が単振動と見なせるためには ω は ω_0 より小さい必要がある．ω_0 を求めよ．

(3)　$\omega < \omega_0$ のとき，振動の周期 T を求めよ．

(4)　$\omega > \omega_0$ の場合を考える．$F_\theta = 0$ を満たす角を θ_0 とする．$\cos\theta_0$ を求めよ．

(5)　$\omega > \omega_0$ のとき，$\theta = \theta_0$ にある小球のつりあいが，安定なつりあいか不安定なつりあいかを論ぜよ．


ω
g
θ
r
m

【解答】

(1)　リング固定系では遠心力を考慮する必要があり[*73]，

$$F_\theta = mr\omega^2 \sin\theta\cos\theta - mg\sin\theta\,.$$

(2)　運動方程式（接線成分）より，

$$m\frac{dv}{dt} = mr\omega^2 \sin\theta\cos\theta - mg\sin\theta\,.$$

ここで，$v = r\dfrac{d\theta}{dt}$ であり，微小角では $\sin\theta \fallingdotseq \theta$，$\cos\theta \fallingdotseq 1$ より，

$$mr\frac{d^2\theta}{dt^2} \fallingdotseq mr\omega^2\theta - mg\theta = -mr\left(\frac{g - r\omega^2}{r}\right)\theta\,, \qquad \therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{g - r\omega^2}{r}\right)\theta\,.$$

すなわち，$g - r\omega^2$ が正であれば単振動を行う．よって，

$$g - r\omega^2 > 0\,, \qquad \therefore \omega < \sqrt{\frac{g}{r}}\,(= \omega_0)$$

(3)　運動方程式より，

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g - r\omega^2}}\,.$$

(4)　設問 I より，

$$F_\theta = \sin\theta(mr\omega^2\cos\theta - mg) = 0\,, \qquad \therefore \theta = 0\,,\ \pi\,,\quad \cos\theta_0 = \frac{g}{r\omega^2}\,.$$

(5)　$\theta = \theta_0 + \delta\,(|\delta| \ll 1)$ において，$\cos\theta_0 = \dfrac{g}{r\omega^2}$，$\sin\theta_0 = \dfrac{\sqrt{(r\omega^2)^2 - g^2}}{r\omega^2}$ であるから[*74*75]，

$$\begin{aligned}
F_\theta &= \sin(\theta_0 + \delta)\{mr\omega^2\cos(\theta_0 + \delta) - mg\} \\
&= mr\omega^2(\sin\theta_0\cos\delta + \cos\theta_0\sin\delta)\left(\cos\theta_0\cos\delta - \sin\theta_0\sin\delta - \frac{g}{r\omega^2}\right) \\
&\fallingdotseq mr\omega^2\left(\sin\theta_0 + \frac{g}{r\omega^2}\delta\right)\left(\frac{g}{r\omega^2} - \sin\theta_0\delta - \frac{g}{r\omega^2}\right) \\
&= -mr\omega^2\sin^2\theta_0\delta - mg\sin\theta_0\delta^2 \\
&\fallingdotseq -mr\omega^2\left\{1 - \left(\frac{g}{r\omega^2}\right)^2\right\}\delta\,.
\end{aligned}$$

[*73] 「遠心力」は，回転軸の中心から離れる向きに「生じる」ことに注意せよ．

[*74] 加法定理を利用した後，δ について $\sin\delta \fallingdotseq \delta$，$\cos\delta \fallingdotseq 1$ と 1 次まで近似した．

[*75] δ の 2 次の項は落とした．

ここで，$\dfrac{g}{r\omega^2} < 1$ より，F_θ は復元力の形をとる．すなわち，つりあいの位置から角度 δ だけ回転した位置に変位したとき，変位方向とは逆向きに F_θ が作用する．したがって，$\theta = \theta_0$ は安定なつりあいである[*76]．

[*76] 一方，$\theta = 0, \pi$ では，

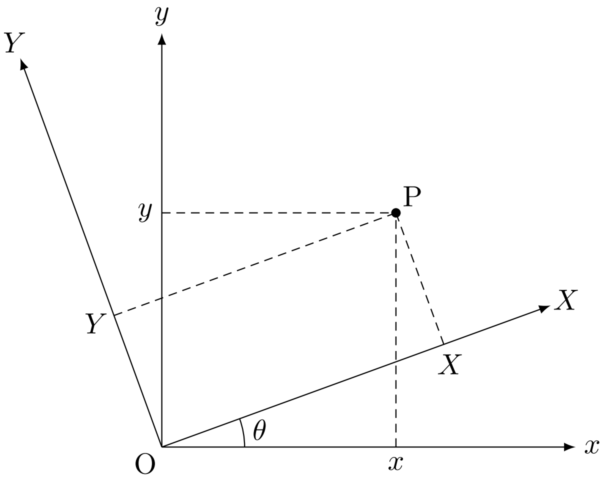
$$F_\theta \simeq mr\omega^2 \left(1 \pm \frac{g}{r\omega^2}\right) \delta > 0$$

となり，F_θ は復元力の形を満たさない．そのため，不安定なつりあいと確認できる．

【参考】遠心力，コリオリ力，オイラー力

ここでは，一般の場合の 2 次元回転座標系における慣性力の導出を行う[*77].

質点 P（質量 m）の静止系での座標を (x,y)，回転座標系での座標を (X,Y) とし，質点にはたらく力の成分は，静止系，および回転座標系において $\vec{F}=(F_x,F_y)=(F_X,F_Y)$ と記す．以下では，回転角 θ，および角速度 $\dot{\theta}$ は，一般に一定とは限らず時間の関数であることに留意せよ．



図より，P の位置 (x,y) を (X,Y) で表現すれば[*78]，

$$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta\,, \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta\,. \end{cases}$$

この式の両辺を，θ が時刻 t の関数であることに留意して時刻 t で微分すれば[*79]，

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{X}\cos\theta - X\dot{\theta}\sin\theta - \dot{Y}\sin\theta - Y\dot{\theta}\cos\theta\,, \\ \dot{y} = \dot{X}\sin\theta + X\dot{\theta}\cos\theta + \dot{Y}\cos\theta - Y\dot{\theta}\sin\theta\,. \end{cases}$$

同様にして，

$$\begin{cases} \ddot{x} = (\ddot{X}\cos\theta - \ddot{Y}\sin\theta) \\ \qquad -2\dot{\theta}(\dot{X}\sin\theta + \dot{Y}\cos\theta) - \dot{\theta}^2(X\cos\theta - Y\sin\theta) - \ddot{\theta}(X\sin\theta + Y\cos\theta)\,, \\ \ddot{y} = (\ddot{X}\sin\theta + \ddot{Y}\cos\theta) \\ \qquad -2\dot{\theta}(\dot{X}\cos\theta - \dot{Y}\sin\theta) - \dot{\theta}^2(X\sin\theta + Y\cos\theta) + \ddot{\theta}(X\cos\theta - Y\sin\theta)\,. \end{cases}$$

*77 授業内では，角速度 $\dot{\theta}=\omega$ が一定かつ $Y=0$ の簡単な場合で計算をした（このとき，オイラー力の項は生じない）．

*78 例えば，X から x 軸に垂線を下ろして，原点 O を頂点とした x 軸と X 軸に挟まれる 2 つの相似な三角形に注目して，

$$x = X\cos\theta - Y\tan\theta\cos\theta = X\cos\theta - Y\sin\theta\,.$$

また，上の y が関与する直角三角形と，y 軸と Y 軸に挟まれる，三角形に注目して，

$$y = \frac{Y}{\cos\theta} + x\tan\theta = X\sin\theta + Y\cos\theta\,.$$

*79 ドット記号は $\dot{O} = \dfrac{dO}{dt}$ を表す．

さて，回転座標系において質点 P にはたらく力の各成分は[*80]，

$$\begin{cases} F_x = F_X \cos\theta - F_Y \sin\theta\,, \\ F_y = F_X \sin\theta + F_Y \cos\theta\,, \end{cases}$$

と表せるので，静止系での質点 P の運動方程式は，

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_X \cos\theta - F_Y \sin\theta\,, \\ m\ddot{y} = F_X \sin\theta + F_Y \cos\theta\,. \end{cases}$$

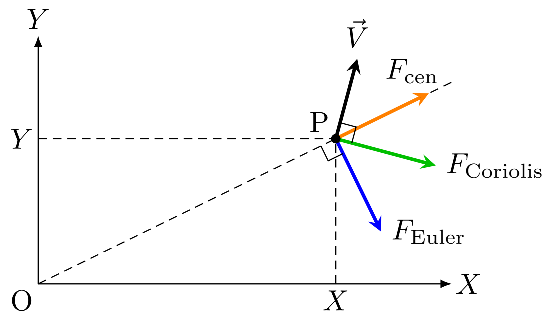
ここに，$\ddot{x}$，$\ddot{y}$ をそれぞれ代入し，$\sin\theta$，$\cos\theta$ をかけるなどをして 2 式の和を取って整理すれば[*81]，

$$\begin{cases} m\ddot{X} = F_X + m\dot{\theta}^2 X + 2m\dot{\theta}\dot{Y} + m\ddot{\theta}Y\,, \\ m\ddot{Y} = F_Y + \underbrace{m\dot{\theta}^2 Y}_{\text{遠心力}} - \underbrace{2m\dot{\theta}\dot{X}}_{\text{コリオリ力}} - \underbrace{m\ddot{\theta}X}_{\text{オイラー力}}\,, \end{cases}$$

を得る．右辺第 2 項から第 4 項はそれぞれ順に，遠心力，コリオリ力，オイラー力と呼ばれる慣性力である．各力の大きさは，$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$[*82]，$V = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2}$ として，

$$F_{\text{cen}} = m\dot{\theta}^2 R\,, \quad F_{\text{Coriolis}} = 2m\dot{\theta}V\,, \quad F_{\text{Euler}} = m\ddot{\theta}R$$

となり，それぞれの向きは，式から読み取れば以下の図のようになる．遠心力は回転座標系における位置ベクトルと同じ向きに，コリオリ力は回転座標系における速度ベクトルを時計回りに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転させた向きに，オイラー力は回転座標系における位置ベクトルを時計回りに $\dfrac{\pi}{2}$ 回転させた向きに生じる．



*80 図を描けばすぐにわかる（書いてみてわからなければノートを参照）．

*81 具体的には，$\ddot{x}$ の式に $\cos\theta$，$\ddot{y}$ の式に $\sin\theta$ をかけて和を取れば $\ddot{X}$ に関する運動方程式が得られる．$\ddot{Y}$ については，かけるのを逆にして差を取ればよい．

*82 回転変換においては長さは不変に保たれ，$r = \sqrt{x^2 + y^2} = R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ を満たす．

6. 見かけの重力

糸（長さ ℓ，伸縮，質量ともに無視）の一端を部屋の天井に繋ぎ，他端を物体に繋いだ．重力加速度の大きさを g とする．

I　部屋を鉛直方向に加速度 α で運動させた．はじめ，部屋内部から観測した物体は静止させた状態にしてあるものとする．

(1)　物体にはたらく張力の大きさ S を求めよ．

(2)　物体をつりあっている状態から少しだけ傾けたところ，単振動と見なせる運動を行った．振動の周期 T を求めよ．

II　部屋を水平方向に加速度 β で運動させた．はじめ，部屋内部から観測した物体は静止させた状態にしてあるものとする．

(1)　部屋の内部から観測した物体がつりあうときの鉛直線と糸の角度の正接 $\tan\theta$ と，物体にはたらく張力の大きさ S を求めよ．

(2)　つりあっている物体につながれている糸を切ったとき，部屋内部から観測した物体の軌道を説明せよ．

(3)　物体をつりあっている状態から少しだけ傾けたところ，単振動と見なせる運動を行った．振動の周期 T を求めよ．

【解答】

I (1)　つりあいより，

$$0 = S - mg - m\alpha\,, \qquad \therefore S = \underset{\sim\sim\sim}{m(g+\alpha)}\,.$$

(2)　回転角を反時計回りを正に θ とする（最下点を原点に定める）．運動方程式より[*83]，

$$m\frac{dv}{dt} = -m(g+\alpha)\sin\theta$$
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \fallingdotseq -\frac{g+\alpha}{\ell}\theta\,, \qquad \therefore T = \underset{\sim\sim\sim}{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g+\alpha}}}\,.$$

II (1)　つりあいより，

$$\begin{cases} 0 = S\cos\theta - mg\,, \\ 0 = S\sin\theta - m\beta\,, \end{cases} \qquad \therefore \tan\theta = \frac{\beta}{\underset{\sim}{g}}\,, \quad S = \underset{\sim\sim\sim}{m\sqrt{g^2+\beta^2}}\,.$$

(2)　部屋内部に貼られた座標系として，部屋の加速方向に x 軸，鉛直方向上向きに y 軸を定める（原点を物体の始状態に定める）．部屋内部に固定された座標系での物体の運動方程式は[*84]，

$$\begin{cases} ma_x = -m\beta\,, \\ ma_y = -mg\,, \end{cases} \qquad \therefore a_x = -\beta\,, \quad a_y = -g\,.$$

よって，初期条件を $v_x(0) = v_y(0) = 0$，$x(0) = y(0) = 0$ とするとそれぞれ $x = -\frac{1}{2}\beta t^2$，$y = -\frac{1}{2}gt^2$ となり，適当な定義域 $x_0 \leq x \leq x_1$ の下での軌跡の方程式は，

$$y = \frac{g}{\beta}x\,, \quad (x_0 \leq x \leq x_1)$$

となる．よって，内部から見た軌跡は直線的になることがわかる．

(3)　運動方程式より[*85]，

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\theta - m\beta\cos\theta = -m\sqrt{g^2+\beta^2}\sin(\theta+\theta_0)$$
$$\therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} \fallingdotseq -\frac{\sqrt{g^2+\beta^2}}{\ell}(\theta+\theta_0)\,.$$

よって，公式より，

$$T = \underset{\sim\sim\sim}{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{g^2+\beta^2}}}}\,.$$

[*83] $v = \ell\dfrac{d\theta}{dt}$，および三角関数の 1 次近似を用いた．

[*84] このとき，運動方程式の左辺にある加速度の成分は，部屋から観測した物体の相対加速度であることに注意せよ．

[*85] 三角関数の合成を利用．このとき $\tan\theta_0 = \dfrac{\beta}{g}$ であり，$\theta = -\theta_0$ が振動中心である．

§2.6 剛体のつりあい

第 6 章では，剛体のつりあいを扱う．剛体のつりあいは定石自体はすごく単純で，滑らない条件などを考える点に注意が必要．なお，本来剛体の重心はこの章で扱うのがキレイな流れだが，剛体の重心は第 2 章多体系の力学の重心のところで触れているので，各自そちらを参照すること．

■**簡単なまとめ**

- 剛体のつりあい：

$$\begin{cases} \text{各方向の力のつりあい（並進しない条件）} \\ \text{ある回転軸まわりの力のモーメントのつりあい（回転しない条件）} \end{cases}$$

- 滑らない条件：

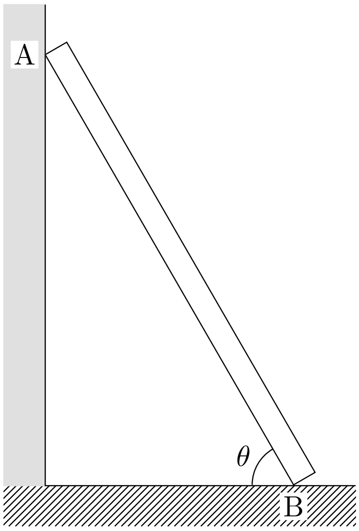
$R < \mu N$（R：静止摩擦力の大きさ，N：垂直抗力の大きさ，μ: 静止摩擦係数）

1. 滑る条件①

図のように，一様で変形の無視できる棒（質量 M，長さ L）を壁に立てかけた．このとき，棒と床とのなす角は θ である．棒と壁との接触点を A，棒と床との接触点を B とする．壁と棒の間には摩擦はなく，床と棒の間の静止摩擦係数を μ，重力加速度の大きさを g とする．

(1)　棒が A で受ける垂直抗力の大きさを N_{A}，B で受ける垂直抗力の大きさを N_{B}，静止摩擦力の大きさを R とする．N_{A}，N_{B}，R を求めよ．

(2)　棒と床面の間に滑りが生じないための μ の条件を求めよ．



【解答】

(1)　力のつりあい，および B まわりの力のモーメントのつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = N_{\mathrm{A}} - R\,, \\ 0 = N_{\mathrm{B}} - Mg\,, \\ 0 = -N_{\mathrm{A}} L \sin\theta + Mg\dfrac{L}{2}\cos\theta\,, \end{cases} \qquad \therefore N_{\mathrm{A}} = R = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{2\tan\theta}Mg}\,,\quad N_{\mathrm{B}} = \underset{\sim\sim}{Mg}\,.$$

(2)　滑らない条件を考えて，

$$R < \mu N_{\mathrm{B}}\,, \qquad \therefore \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{2\tan\theta} < \mu}\,.$$

2. 滑る条件②

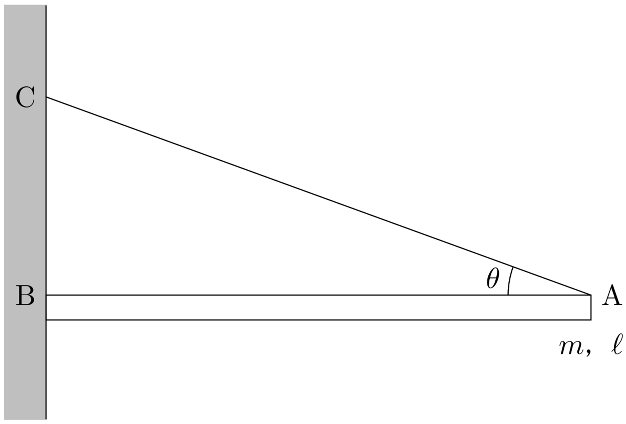
図のように，糸（質量，伸縮ともに無視）の一端を壁に取り付け，他端を一様で変形の無視できる棒（質量 m，長さ ℓ）に取り付けて粗い壁にかけたところ，棒は水平な状態で静止した．棒と糸のなす角を θ とし，棒と糸との接続点を A，棒と壁との接触点を B，糸と壁との接続点を C とする．壁と棒の間の静止摩擦係数を μ，重力加速度の大きさを g とする．

(1)　棒が壁から受ける垂直抗力の大きさを N，静止摩擦力の大きさを R，糸から受ける張力の大きさを T とする．力のつりあい，および適当な点まわりの力のモーメントのつりあいを考えることで，N，R，T を求めよ．

(2)　棒と壁面との間に滑りが生じないための μ の条件を求めよ．

(3)　棒の A 側から距離 x の位置に質量 m_0 のおもり（大きさ無視）を吊るしたところ，棒と壁面の間に滑りが生じた．x を求めよ．

(4)　前問において，任意の位置で滑りが生じないとき，m_0 の取り得る値の範囲を求めよ．ただし，このとき $\mu > \tan\theta$ を満たしているとする．



【解答】

(1)　力のつりあい，A まわりの力のモーメントのつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = N - T\cos\theta\,, \\ 0 = T\sin\theta + R - mg\,, \\ 0 = \dfrac{L}{2}mg - LR\,, \end{cases} \qquad \therefore R = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}mg}\,,\quad T = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{mg}{2\sin\theta}}\,,\quad N = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{mg}{2\tan\theta}}\,.$$

(2)　滑らない条件より，

$$R < \mu N\,, \qquad \therefore \underset{\sim\sim\sim}{\mu > \tan\theta}\,.$$

(3)　力のつりあい，A まわりの力のモーメントのつりあい，静止摩擦が最大摩擦と等しいことより，

$$\begin{cases} 0 = N - T\cos\theta\,, \\ 0 = T\sin\theta + \mu N - (m+m_0)g\,, \\ 0 = \dfrac{L}{2}mg + xm_0g - L\mu N\,, \end{cases} \qquad \therefore x = \underset{\sim\sim\sim}{\left\{\frac{\mu\cos\theta}{\sin\theta + \mu\cos\theta}\left(1 + \frac{m}{m_0}\right) - \frac{1}{2}\frac{m}{m_0}\right\}L}\,.$$

(4)　$x = \alpha L\,(0 \leq \alpha \leq 1)$ とする．A まわりの力のモーメントのつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = N - T\cos\theta\,, \\ 0 = T\sin\theta + R - mg\,, \\ 0 = \dfrac{L}{2}mg + \alpha L m_0 g - LR\,, \end{cases}$$

$$\therefore R = \frac{1}{2}mg + \alpha m_0 g\,,\quad T = \frac{m + 2(1-\alpha)m_0}{2\sin\theta}g\,,\quad N = \frac{m + 2(1-\alpha)m_0}{2\tan\theta}g\,.$$

したがって，$x = L\,(\alpha = 1)$ で静止摩擦力の大きさ R は最大となり，このときに最大摩擦を超えなければ，棒の間の任意の位置 x ですべり出さない[*86]．よって，

$$\frac{1}{2}mg + m_0 g < \frac{\mu}{2\tan\theta}mg\,, \qquad \therefore \underset{\sim\sim\sim}{m_0 < \frac{m}{2}\left(\frac{\mu}{\tan\theta} - 1\right)}\,.$$

[*86] なお，α を残して計算を進めて，

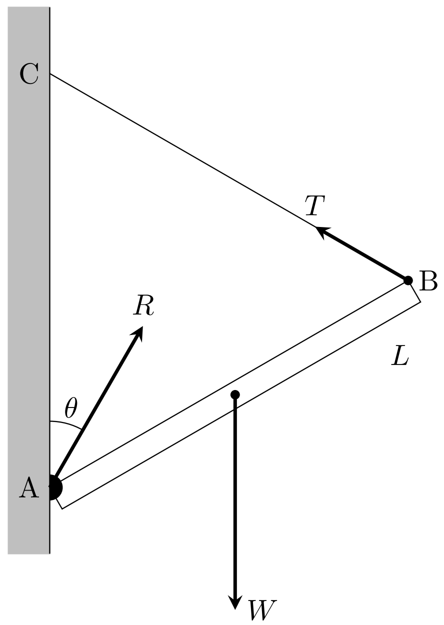
$$R < \mu N\,, \qquad \therefore m_0 < \frac{m}{2}\frac{\mu - \tan\theta}{(\mu + \tan\theta)\alpha - \mu}$$

となり，上記の不等式を $\alpha = 1$ で満たすような m_0 を選べば，$0 \leq \alpha \leq 1$ の任意の α ですべり出さない，としても良い．

3. 蝶番①

図のように，一端を蝶番に取り付けた一様な棒（重さ W，長さ L）の他端に壁に繋いだ糸（長さ L，質量，伸縮ともに無視）を取り付けた．このとき，蝶番と壁の接続点を A，糸と棒の接続点を B，糸と壁の接続点を C としたとき，$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{CA}} = L$ を満たすように蝶番を取り付ける．重力加速度の大きさを g とする．

棒が蝶番から受ける抗力の大きさを R，その抗力と壁面とのなす角を θ，糸から受ける張力の大きさを T とする．R，θ，T を求めよ．



【解答】

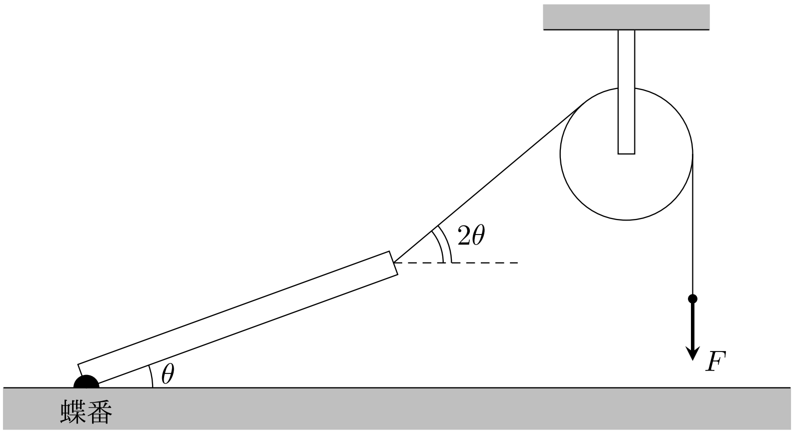
力のつりあい，A まわりの力のモーメントのつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = R\sin\theta - \dfrac{\sqrt{3}}{2}T\,, \\ 0 = \dfrac{1}{2}T + R\cos\theta - W\,, \\ 0 = -\dfrac{L}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2}W + L\dfrac{\sqrt{3}}{2}T\,, \end{cases} \qquad \therefore R = \underset{\sim\sim}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}W}\,,\ \ T = \underset{\sim\sim}{\dfrac{1}{2}W}\,,\ \ \theta = \underset{\sim}{\dfrac{\pi}{6}}\,.$$

4. 蝶番②（復習）

図のように，一様な棒（質量 m，長さ L，変形無視）の一端に糸（伸縮，質量ともに無視）と床に取り付けた蝶番を取り付け，糸を天井に固定された滑車にかけ，大きさ F の力を加え静止させた．このとき，棒と床の間のなす角は θ，糸と水平面とのなす角を 2θ，重力加速度の大きさを g とする．

棒が蝶番から受ける抗力の大きさを R，その抗力の水平面からの角度を反時計回りに α，棒が糸から受ける張力の大きさを T とする．R，$\tan\alpha$，T を求めよ．



【解答】

力のつりあい，蝶番まわりの力のモーメントのつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = R\cos\alpha + T\cos 2\theta\,, \\ 0 = R\sin\alpha + T\sin 2\theta - mg\,, \\ 0 = -\dfrac{L}{2}mg\cos\theta + LT\sin(2\theta-\theta)\,, \end{cases}$$

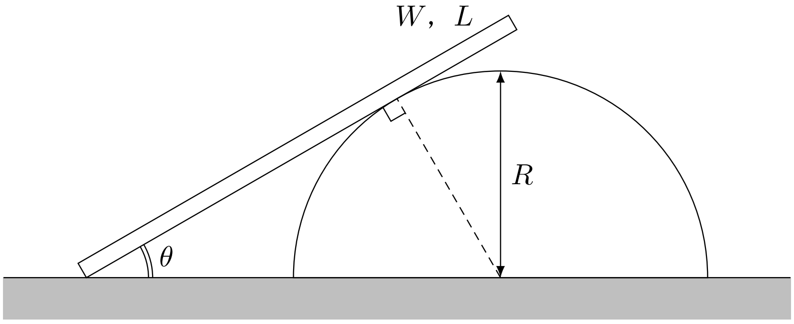
$$\therefore \tan\alpha = \frac{\sin 2\theta - 2\tan\theta}{\cos 2\theta}\,,\quad T = \frac{mg}{2\tan\theta}\,,\quad R = \frac{mg}{2\tan\theta}\sqrt{1+4\tan^2\theta(1-2\cos^2\theta)}\,.$$

5. 滑らず転がる①

図のように，一様な棒（重さ W，長さ L）を，水平面上に固定された半円筒（半径 R）に水平面とのなす角 θ で立てかける．棒と円筒の間には摩擦はなく，棒と床間の静止摩擦力を μ とする．

(1)　棒が床から受ける垂直抗力の大きさを N，静止摩擦力の大きさを F，半円筒から受ける垂直抗力の大きさを N' とする．N，N'，F を求めよ．

(2)　角度 θ の状態で棒がすべり出さないための μ の条件を求めよ．



【解答】

(1)　力のつりあい・力のモーメントのつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = N + +N'\cos\theta - W\,, \\ 0 = F - N'\sin\theta\,, \\ 0 = W\cos\theta\left(\dfrac{R}{\tan\theta} - \dfrac{L}{2}\right) + FR\cos\theta - N\cos\theta\frac{R}{\tan\theta}\,, \end{cases}$$

$$\therefore N' = \underline{\frac{L}{2R}W\sin\theta},\quad N = \underline{\left(1 - \frac{L}{2R}\sin\theta\cos\theta\right)W},\quad F = \underline{\frac{L}{2R}W\sin^2\theta}.$$

(2)　すべらない条件は，

$$\frac{L}{2R}W\sin^2\theta < \mu\left(1 - \frac{L}{2R}\sin\theta\cos\theta\right)W\,,\qquad \therefore \underline{\mu > \frac{L\sin^2\theta}{2R - L\sin\theta\cos\theta}}\,.$$

6. 滑らず転がる①

角度を変えることができる床上に，高さ a，幅 b の直方体状の物体（重さ W）を置き，その上面の頂点に，常に水平方向となるように大きさ F の力を加えた．このとき，物体は静止している．床面と物体の間の静止摩擦係数を μ とする．

I　床が水平な状態（$\theta = 0$ の場合）を考える．

(1)　物体が床から受ける垂直抗力の大きさを N，静止摩擦力の大きさを R，抗力の作用点と頂点 A との距離を x とする．N，R，x を求めよ．

(2)　物体が滑らず回転するための μ の条件を求めよ．

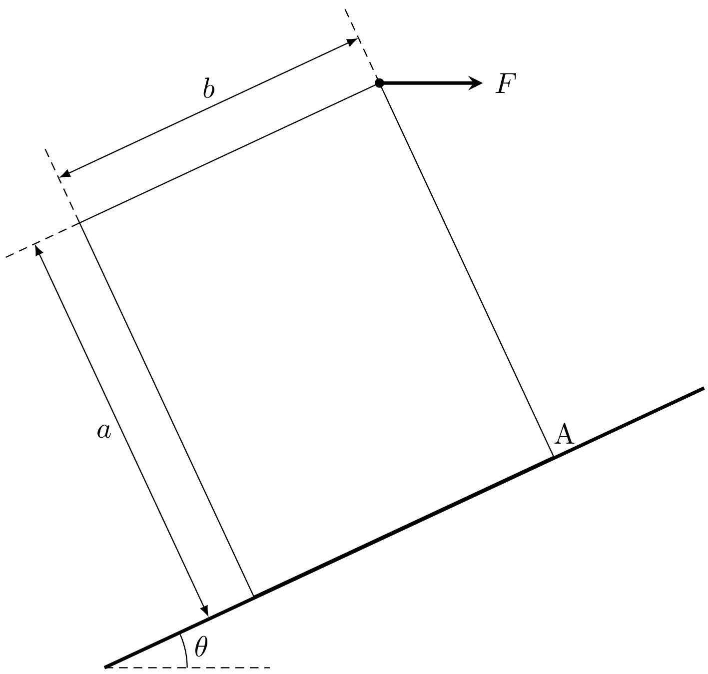
(3)　F を大きくしていき，F_0 を超えたところで，物体は滑らずに回転し始めた．F_0 を求めよ．

II　床を角度 θ だけ傾けた状態を考える（図 2）．

(1)　物体が床から受ける垂直抗力の大きさを N，静止摩擦力の大きさを R，抗力の作用点と頂点 A との距離を x とする．N，R，x を求めよ．

(2)　F を大きくしていき，F_0 を超えたところで，物体は滑らずに回転し始めた．F_0 を求めよ．

(3)　このような運動が実現されるための μ の条件を求めよ．



【解答】

I (1)　力のつりあい，A まわりの力のモーメントのつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = F - R\,, \\ 0 = N - W\,, \\ 0 = \dfrac{b}{2}W - xN - aF\,, \end{cases} \qquad \therefore R = F\,,\quad N = W\,,\quad x = \frac{b}{2} - \frac{F}{W}a\,.$$

(2)　滑らない条件は，

$$R < \mu N\,, \qquad \therefore F < \mu W\,.$$

ここで，抗力の存在条件は $x \geq 0$ より，

$$x = \frac{b}{2} - \frac{F}{W}a \geq 0\,, \qquad \therefore F \leq \frac{b}{2a}W\,.$$

抗力の存在範囲が滑らない条件を常に満たせばすべり出すことはないので，

$$\frac{b}{2a}W < \mu W\,, \qquad \therefore \mu > \frac{b}{2a}\,.$$

(3)　転がり始めるとき $x = 0$ ゆえ，

$$F_0 = \frac{b}{2a}W\,.$$

なお，前問において $F = F_0$ のとき $R = F < \mu N$ を満たすと考えるのがシンプルだが，今回はすごく丁寧に（回りくどく）やった．以降の同様の問題の解答はこのように計算する．

II (1)　力のつりあい，A まわりの力のモーメントのつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = F\cos\theta - W\sin\theta - R\,, \\ 0 = N - F\sin\theta - W\cos\theta\,, \\ 0 = \dfrac{b}{2}W\cos\theta + \dfrac{a}{2}W\sin\theta - xN - aF\cos\theta\,, \end{cases}$$

$$\therefore R = F\cos\theta - W\sin\theta\,,\quad N = F\sin\theta + W\,,$$

$$x = \frac{1}{2}\frac{(a\sin\theta + b\cos\theta)W - 2aF\cos\theta}{W\cos\theta + F\sin\theta}\,.$$

(2)　$x = 0$ の下で力のつりあい，A まわりの力のモーメントのつりあいを解いて，

$$F_0 = \left(\tan\theta + \frac{b}{a}\right)\frac{W}{2}\,.$$

(3)　$F = F_0$ で滑らない条件を満たしていればよいので，

$$R < \mu N$$

$$F_0 \cos\theta - W \sin\theta < \mu(F_0 \sin\theta + W \cos\theta)\,, \qquad \therefore \mu > \frac{\cos\theta(b\cos\theta - a\sin\theta)}{a(1+\cos^2\theta) + b\sin\theta\cos\theta}\,.$$

なお $b > a$ の場合，

$$\frac{\cos\theta(b\cos\theta - a\sin\theta)}{a(1+\cos^2\theta) + b\sin\theta\cos\theta} \leq 0\,, \qquad \therefore \tan\theta \geq \frac{b}{a}$$

を満たすような角度 θ であれば，μ の値によらずにこのような運動が実現される．

7. 滑らず回転②（復習：難しめ）

図のように，質量 M の水平な板の上に，高さ a，幅 b，質量 m の物体を置く．板には，ばね定数 k のばね（質量無視）の一端が取り付けられており，ばねの他端は固定された壁に取り付けられている．水平右向きに x 軸を定め，ばねが自然長な状態での板の位置を原点に定める．

原点にある板と物体に，向きと大きさの等しい初速度を与える実験を行う．与える初速は，x 正方向とし，その大きさを徐々に大きくしていく．はじめ，2 物体がは一体となって単振動をしていたが，速さ v_0 の初速を与えたときに物体は板上で転倒した．板と物体の間の摩擦のみを考えるものとし，その静止摩擦係数を μ とする．重力加速度の大きさを g とする．

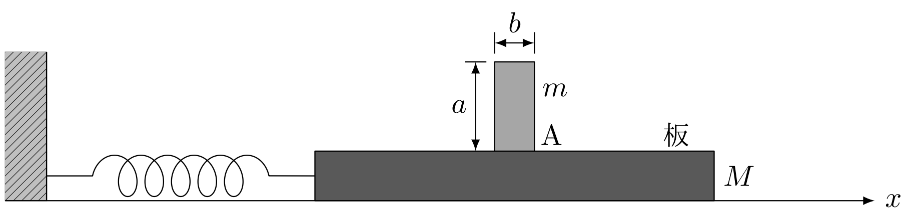
(1)　板が位置 x にあるときの板の加速度を a とする．このとき，物体が板から受ける垂直抗力の大きさ N，および静止摩擦力の大きさ R を求めよ．

(2)　物体と板の接地面において，x 正側の角（カド）を点 A とする．板が位置 x にあるとき，物体にはたらく抗力の作用点の点 A からの距離 c を求めよ．

(3)　物体が転倒する瞬間の板の位置 x を求めよ．

(4)　v_0 を，a，b を含む式で表せ．

(5)　このような運動が実現するための μ の条件を，a，b を用いて表せ．



【解答】

(1)　運動方程式より，

$$\begin{cases} ma = R\,, \\ m\cdot 0 = N - mg\,, \\ Ma = -kx - R\,, \end{cases} \qquad \therefore a = \frac{-k}{M+m}x\,,\quad N = \underset{\sim\sim}{mg}\,,\quad R = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{-\frac{m}{M+m}kx}\,,$$

(2)　台固定系では，物体は板に対して静止している．台固定系での力のモーメントのつりあいより，

$$0 = \frac{b}{2}mg - cN - \frac{a}{2}\frac{m}{M+m}kx\,, \qquad \therefore c = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{b}{2} - \frac{kx}{2(M+m)g}a}\,.$$

(3)　x が最大の値を取ったとき物体は転倒する．よって，単振動の振幅を計算して[*87]，

$$x = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{v_0\sqrt{\frac{M+m}{k}}}\,.$$

(4)　$x = v_0\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}$ で $c = 0$ より，

$$\frac{b}{2} - \frac{k}{2(M+m)g}av_0\sqrt{\frac{M+m}{k}} = 0\,, \qquad \therefore v_0 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{bg}{a}\sqrt{\frac{M+m}{k}}}\,.$$

(5)　$R = -\dfrac{m}{M+m}kx$ より，$x = v_0\sqrt{\dfrac{M+m}{k}} = \dfrac{b}{a}\dfrac{(M+m)g}{k}$ で $|R|$ は最大の値を取る．このとき，滑り出さないかつ回転することから[*88]，

$$\left| -\frac{m}{M+m}k\frac{b}{a}\frac{(M+m)g}{k} \right| < \mu mg\,, \qquad \therefore \underset{\sim\sim\sim}{\mu > \frac{b}{a}}\,.$$

[*87] 単に公式として（振幅）$= \dfrac{v_0}{\omega}$ としても良いし，力学的エネルギー保存則を用いて計算しても良い．

[*88] 滑り出さない条件は $|R| < \mu N$，回転する条件は設問 IV．

3
電磁気前半

第 3 部電磁気前半では，電磁気分野のうち電気分野を扱う．第 1 章では，新しく導入した電場，電位に関する設定として，クーロン力を含む力学，電場の決定，導体表面に帯電する電荷の決定を行う．後者 2 つは完全に新しい内容となる．第 2 章では，回路素子の中身を論じる．特に平行平板コンデンサの中身について重点的に扱う（第 1 章でも軽く扱っている）．第 3 章では，電池，抵抗，コンデンサ，例外素子（電球，ダイオード）からなる直流回路について扱う．なお，コイルを含む回路（こちらは授業内では扱う），交流回路については第 7 部電磁気後半で扱うが，いずれもキルヒホッフの法則，電荷保存則，素子の性質により回路の状態が一意に決まることを見る（つまり，それ以外のことを考える必要はない）．

§3.1 静電場

この章では，荷電粒子の運動，電場・電位の計算，および金属板表面の帯電量の計算（コンデンサの内部構造の簡単な話）を扱う．新しく覚える公式が半分，これまでの力学の知識が半分といった内容である．

■簡単なまとめ

- 電場の決定：
  ❶ 点電荷　→　公式 $E = k\dfrac{Q}{r}$
  ❷ 形状をもつ物体　→　ガウス則
  ❸ 等電位線（面）から計算
- 平行一様電場：
  $$V = Ed$$
  V は電位差の大きさ，E は電場の大きさ，d は距離を表し，電場の向きに電位が下がる．
- 導体の電荷分布：以下の 3 式で一意に決まる．
  $$\begin{cases} \text{静電誘導} \\ \text{電荷保存則} \\ \text{電位差の関係（キルヒホッフ則）} \end{cases}$$
- 金属板の作る電場：$E = \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}$
  ε_0 は真空の誘電率，S は極板の面積，Q は極板に帯電する電荷．
- 誘電体内部の電場 E_{pol}：$E_{\mathrm{pol}} = \dfrac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}}E$
  E は真空中の電場，$\varepsilon_{\mathrm{r}} = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ は比誘電率（ε_0：真空の誘電率，ε：誘電率）．
- コンデンサの容量決定：以下の決定手順を覚える．
  $$\begin{cases} \text{ガウス則（}E\text{ と }Q\text{ の対応）} \\ \text{キルヒホッフ則（}E\text{ と }V\text{ の対応）} \end{cases}$$
  → Q と V の関係式を作り，その比例定数を読み取る．

  平行平板コンデンサについては，公式 $C = \varepsilon\dfrac{S}{d}$ を覚える．

1. 点電荷の電場・電位の計算

クーロンの比例定数を k_0，電位の基準点を無限遠点とする．

(1)　固定された電荷 $Q\,(>0)$ の点電荷から距離 r 離れた地点での電場の大きさ（強さ）E，および電位 ϕ を求めよ．

(2)　xy 平面上で，点 $(0,\,L)\,(L>0)$，点 $(0,\,-L)$ にそれぞれ電荷 $Q\,(>0)$ を固定する．x 軸上の点 $(\sqrt{3}\,L,\,0)$ における電場の x 成分 E_x，y 成分 E_y，および電位 ϕ を求めよ．

(3)　xy 平面上で，点 $(0,\,L)\,(L>0)$ に電荷 $+Q\,(Q>0)$，点 $(0,\,-L)$ に電荷 $-Q$ を固定する．x 軸上の点 $(x,\,0)$ における電場の x 成分 E_x，y 成分 E_y，および電位 ϕ を求めよ．

【解答】

(1)　公式より[*1]，

$$E = \underset{\sim\sim}{k_0\frac{Q}{r^2}}\,,\quad \phi = \underset{\sim\sim}{k_0\frac{Q}{r}}\,.$$

(2)　公式・図（各自）より，

$$E_x = k_0\frac{Q}{(2L)^2}\cos 30^\circ \times 2 = \underset{\sim\sim}{\frac{\sqrt{3}\,k_0Q}{4L^2}}\,,\quad E_y = \underset{\sim}{0}\,,\quad \phi = k_0\frac{Q}{2L} + k_0\frac{Q}{2L} = \underset{\sim\sim}{k_0\frac{Q}{L}}\,.$$

(3)　公式・図（各自）より，

$$E_x = \underset{\sim}{0}\,,\quad E_y = -k_0\frac{Q}{x^2+L^2}\sin\theta \times 2 = \underset{\sim\sim}{\frac{2k_0QL}{(L^2+x^2)^{3/2}}}\,,$$

$$\phi = k_0\frac{Q}{\sqrt{L^2+x^2}} + k_0\frac{-Q}{\sqrt{L^2+x^2}} = \underset{\sim}{0}\,.$$

[*1] 電場は，単位電荷（1〔C〕）を想定し，単位電荷が受ける力を，電位は，単位電荷によって生じる位置エネルギーを考えればよい．

2. 点電荷の運動①

水平右向きに x 軸を定める．位置 $x=0$ に点電荷 A（質量 m，電荷 $-Q\,(<0)$）に固定した．クーロンの比例定数を k_0，電位の基準点を無限遠点とする．

(1)　点電荷 A が位置 x に作る電場 E，およびこのとき生じる電位 ϕ を，それぞれ位置 x の関数として表せ．

(2)　点電荷 B（質量 m，電荷 Q）を位置 $x=a\,(>0)$ に固定した．点電荷 B を固定するのに必要な外力の大きさ $F_{\rm ex}$ を求めよ．

(3)　点電荷 B の固定を外し，x 正方向に大きさ v_0 の初速度を与えた．点電荷 B が点電荷 A から最も遠ざかる位置 x_1 を，k_0，Q，a，v_0，m を用いて表せ．

(4)　点電荷 B の固定を外し，x 正方向に初速度を与えた．初速度の大きさが $v_0>v_2$ を満たすとき，点電荷 B は無限遠に達した．v_2 を，k_0，Q，a，m を用いて表せ．

(5)　点電荷 B に外力を加え，位置 $x=a$ から位置 $x=2a$ までゆっくり運んだ．この間に，外力のした仕事 $W_{\rm ex}$ を，k_0，Q，a を用いて表せ．

【メモ】

時間追跡ができないため，エネルギー保存則を利用する．エネルギー保存則を利用する際は，どこまでを系と見るか，特に注意する．

【解答】

(1)　公式より，

$$E=\underset{\sim\sim\sim}{-k_0\frac{Q}{x^2}}\,,\quad \phi=\underset{\sim\sim\sim}{-k_0\frac{Q}{x}}\,.$$

(2)　B の力のつりあいより，

$$m\cdot 0=F_{\mathrm{ex}}-k_0\frac{Q^2}{x^2}\,,\quad F_{\mathrm{ex}}=\underset{\sim\sim\sim}{k_0\frac{Q^2}{x^2}}\,.$$

(3)　力学的エネルギー保存則[*2]より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2+k_0\frac{Q\cdot(-Q)}{x_1}=\frac{1}{2}m{v_0}^2+k_0\frac{Q\cdot(-Q)}{a}\,,\qquad \therefore x_1=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{2k_0Q^2}{2k_0Q^2-m{v_0}^2a}a}\,.$$

(4)　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m\cdot{v_\infty}^2+0=\frac{1}{2}m{v_0}^2+k_0\frac{Q\cdot(-Q)}{a}\,.$$

ここで，無限遠に到達するためには $\dfrac{1}{2}m{v_\infty}^2>0$ が必要．したがって，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2+k_0\frac{Q\cdot(-Q)}{a}>0\,,\qquad \therefore v_2=\underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{2k_0Q^2}{ma}}}\,.$$

(5)　B と電場を合わせて 1 つの系と見て，エネルギー収支の式[*3]より[*4]，

$$\left\{\frac{1}{2}m\cdot 0^2+k_0\frac{Q\cdot(-Q)}{2a}\right\}-\left\{\frac{1}{2}m\cdot 0^2+k_0\frac{Q\cdot(-Q)}{a}\right\}=W_{\mathrm{ex}}\,,\qquad \therefore W_{\mathrm{ex}}=\underset{\sim\sim\sim}{k_0\frac{Q^2}{2a}}\,.$$

[*2] B，電場を合わせて 1 つの系と見ている．

[*3]（系のエネルギー変化）=（された仕事）．

[*4] B のみを 1 つの系と見て，エネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2-\frac{1}{2}m\cdot 0^2=\int_a^{2a}\left(-k_0\frac{Q^2}{x}+F_{\mathrm{ex}}\right)dx\,,\qquad \therefore W_{\mathrm{ex}}=\underset{\sim\sim\sim}{k_0\frac{Q^2}{2a}}\,.$$

3. 点電荷の運動②

鉛直上向きに x 軸を定める．位置 $x=0$ に点電荷 A（電荷 $Q\,(>0)$）に固定した．x 軸上には，もうひとつの点電荷 B（質量 m，電荷 $q\,(>0)$）があり，x 軸上のみを自由に動くできるものとする．重力加速度の大きさを g，クーロンの比例定数を k_0，電位の基準点を無限遠点とし，$x>0$ の領域ので B の運動について考える．

(1)　B に働く重力とクーロン力がつりあう位置 $x=x_0$ を求めよ．

(2)　B を $\dfrac{1}{2}x_0$ の位置で静かに放したところ，B は $\dfrac{1}{2}x_0 \leq x \leq \beta x_0$ の範囲で往復運動を行った．β を求めよ．

【解答】

(1)　B のつりあいより，

$$m\cdot 0 = k_0\frac{Qq}{{x_0}^2} - mg\,, \qquad \therefore x_0 = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{k_0Qq}{mg}}}\,.$$

(2)　位置 x での B の速度を v とする．B，重力場，電場を系と見て，力学的エネルギー保存則より[*5]，

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgx + k_0\frac{Qq}{x} = mg\frac{x_0}{2} + k_0\frac{Qq}{x_0/2}\,.$$

$x=\beta x_0$ の位置で $v=0$ となって引き返すので[*6]，

$$mg\cdot\beta x_0 + k_0\frac{Qq}{\beta x_0} = mg\frac{x_0}{2} + k_0\frac{Qq}{x_0/2}\,, \qquad \therefore \beta = \underset{\sim}{2}\,.$$

[*5] B のみを 1 つの系と見て，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = \int_{x_0/2}^{x}\left(k_0\frac{Qq}{x^2} - mg\right)dx\,.$$

[*6] $\beta \neq \dfrac{1}{2}$ である．

4. 点電荷の運動③

水平右向きに x 軸を定める．位置 $x=0$ に点電荷 A（質量 m，電荷 $q\,(>0)$）を，位置 $x=a$ に点電荷 B（質量 M，電荷 $Q\,(>0)$）を静かに置いたところ，両点電荷は運動を始めた．点電荷 A の速度を v，点電荷 B の速度を V，このときの 2 つの点電荷間の距離を r とする．クーロンの比例定数を k_0，電位の基準点を無限遠点とする．

(1)　全体を 1 つの系と見たとき，この系には外力が働かないことから x 方向の運動量は保存する．系の運動量保存則を表す式を記せ．

(2)　全体を 1 つの系と見たとき，この系の力学的エネルギーは保存する．系の力学的エネルギー保存則を表す式を記せ．

(3)　v，V を，k_0，Q，q，M，m，r を用いて表せ．

【メモ】

複数物体の取り扱いは，運動量・力学的エネルギー保存則の連立が基本である．

【解答】

(1)　運動量保存則より，

$$mv + MV = 0$$

(2)　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + k_0\frac{Qq}{r} = \frac{1}{2}m\cdot 0^2 + \frac{1}{2}M\cdot 0^2 + k_0\frac{Qq}{a}\,.$$

(3)　以上 2 式より，

$$v = -\sqrt{\frac{2k_0Qq}{M+m}\frac{M}{m}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)},\quad V = \sqrt{\frac{2k_0Qq}{M+m}\frac{m}{M}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)}\,.$$

5. 平行一様電場

真空中に定めた x 軸に沿って，x 軸の負の向きに大きさ E の平行一様電場がかけてある．この電場中における点電荷（質量 m，電荷 q）の x 軸に沿った運動を考えよう．ただし，$E>0$，$q>0$ とし，クーロン力以外の力は考えない．

原点において，点電荷に x 軸の正の向きに初速 v_0 を与えた．

(1) 点電荷が位置 x に達したときの速度を v とする．そのときの速さ $|v|$ を，x の関数として表せ．

(2) x の最大値を求めよ．

(3) 位置 x の電位 $\phi(x)$ を求めよ．ただし，$x=x_0$ の位置を電位の基準点とする．

【メモ】

平行一様電場では，〔電位差（電圧）〕=〔電場の強さ〕×〔電場に沿った距離〕が成り立つ[*7]．平行一様電場はコンデンサで繰り返し現れるため，一旦整理しておきたい．

【解答】

(1)　力学的エネルギー保存則より[*8*9]，

$$\frac{1}{2}mv^2 + qEx = \frac{1}{2}m{v_0}^2\,, \qquad \therefore |v| = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{{v_0}^2 - \frac{2qE}{m}x}}\,.$$

(2)　x が最大となるとき $v = 0$ ゆえ，

$$x_{\max} = \frac{m{v_0}^2}{2qE}\,.$$

(3)　位置 x における電荷 q の位置エネルギーは，適当な定数 U_0 を用いて，

$$U(x) = qEx + U_0$$

と書ける．基準の位置 $x = x_0$ で $U(x_0) = 0$ より

$$U_0 = -qEx_0$$

と定まる．電位 ϕ は単位電荷の位置エネルギーを考えればよく，

$$\phi(x) = \frac{1}{q}U(x) = E(x - x_0)\,.$$

*7 平行一様電場以外では，微小部分に対し近似的に成り立つ．

*8 運動方程式より，

$$ma = -qE\,, \qquad \therefore a = -\frac{qE}{m}\,.$$

加速度一定より，等加速度運動の位置・速度は，

$$\begin{cases} x(t) = 0 + v_0 t + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{qE}{m}\right)t^2\,, \\ v(t) = v_0 + \left(-\dfrac{qE}{m}\right)t\,, \end{cases}$$

と表され，この 2 式から t を消去すれば同じ結果を得る．

*9 物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = \int_0^x (-qE)\,dx = -qEx\,.$$

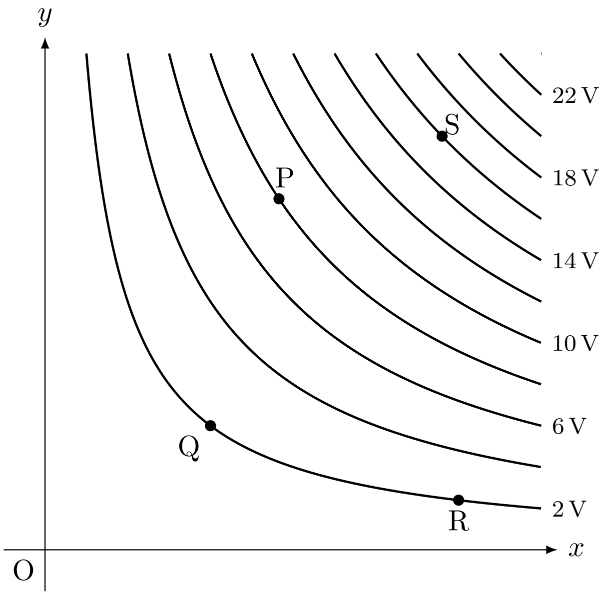
6. 等電位線

xy 平面上の電位分布を測定し，2 V 間隔で等電位線を描いたところ，図のようになった．等電位線の横に添えた数値は，等電位線上での電位の値である．原点において，点電荷に x 軸の正の向きに初速 v_0 を与えた．

(1)　$e = 1.6 \times 10^{-19}$ C の電荷を，クーロン力に逆らってゆっくりと運ぶとする．点 P から点 Q へと運ぶのに必要な仕事 W_{PQ}，点 Q から点 R へと運ぶのに必要な仕事 W_{QR}，点 R から点 S へと運ぶのに必要な仕事 W_{RS} をそれぞれ求めよ．

(2)　点 P を通る電気力線の概略を描け．

(3)　点 P 付近に図示してある等電位線の間隔は大体 0.25 m 程度である．このことから，点 P における電場の強さ E_{P} の近似値を求めよ．



【メモ】

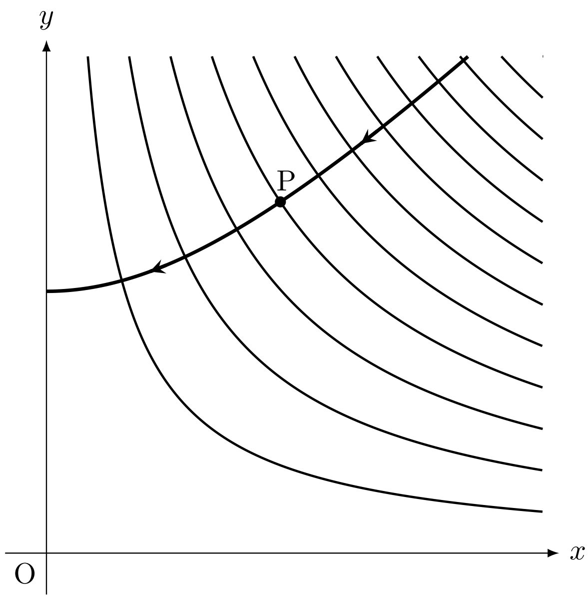
等電位線（面）と電気力線の性質の確認．また，力が先に在り，それに対して仕事や位置エネルギーが定義される．電気分野ではエネルギーありきで，力を逆算することも多く，等電位線はその典型的な例である．

【解答】

(1)　運ぶ際の電位の変化を $\Delta\phi$ とすれば，電荷の位置エネルギーの変化 $e\Delta\phi$ に等しい仕事が必要である[*10]．

$$W_{\mathrm{PQ}} = 1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}\times(2-8)\,\mathrm{V} = \underline{-9.6\times10^{-19}\,\mathrm{J}}\,,$$
$$W_{\mathrm{QR}} = 1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}\times(2-2)\,\mathrm{V} = \underline{0\,\mathrm{J}}\,,$$
$$W_{\mathrm{RS}} = 1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}\times(16-2)\,\mathrm{V} \fallingdotseq \underline{2.2\times10^{-18}\,\mathrm{J}}\,.$$

(2)　電気力線は等電位線に直交し，高電位から低電位へ向かう向きである．



(3)　電場は電位の空間勾配に等しいので，

$$E_{\mathrm{P}} \fallingdotseq \frac{2.0\,\mathrm{V}}{0.25\,\mathrm{m}} = \underline{8.0\,\mathrm{V/m}}$$

*10 電荷の運動エネルギーに変化はないので，位置エネルギー変化が外力のする仕事と等しくなる．

7. ガウスの法則

空間に拡がる電場の様子は，次のような性質を満たす「電気力線」を用いて表すことができる．

① 接線の向きが，電場の向きを表す．

② 垂直な面を単位面積あたりに貫く本数が，電場の強さを表す．

(1) 電荷 $Q\,(>0)$ を持つ点電荷の周囲の電場について考えよう．この点電荷を中心とした半径 r の球面を貫く電気力線の本数を求めよ．ただし，クーロンの法則の比例定数を k_0 とする．

この結果を一般化して，

③ 電荷 Q から $\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ 本の電気力線が湧き出す《ガウスの法則》

と言ってよいことがわかっている．ここで，ε_0 は真空の誘電率である．

(2) k_0 を，ε_0 を用いて表せ．

さらに，電気力線には，

④ 弛まず，同じ向きの電気力線同士は互いに反発する

という性質がある．

(3) 真空中において，十分に長い長さ ℓ の直線状に一様に電荷が分布していて，その電荷の総量は Q である．この場合，直線に十分近い点では，電気力線は直線に垂直に一様に出ていると見なせる．このことから，直線から距離 r の地点における電場の強さ $E(r)$ を求めよ．

(4) 真空中において，十分に広い面積 S の平面上に一様に電荷が分布していて，その電荷の総量は Q である．この場合，平面に十分近い点では，電気力線は平面に垂直に一様に出ていると見なせる．このことから，周囲の電場の強さ E を求めよ．

【メモ】

等電位線（面）と電気力線の性質の確認．また，力学が先に在り，それに対して仕事や位置エネルギーが定義される．電気分野ではエネルギーありきで，力を逆算することも多く，等電位線はその典型的な例である．

ガウス則に関して，一様に帯電した球の作る電場は授業内で扱ったものを参照．電位の計算や球殻コンデンサの容量などは，後期の補講で扱う．

【解答】

(1)　半径 r の球面上における電場は，球面に垂直に $E(r) = k_0 \dfrac{Q}{r^2}$ ゆえ，貫く電気力線の本数は，

$$4\pi r^2 \times E(r) = \underline{4\pi k_0 Q}\,.$$

(2)　$4\pi k_0 Q = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ より，

$$k_0 = \underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}\,.$$

(3)　この直線を中心軸として内部に含む円柱（半径 r，高さ ℓ）を考える．側面を貫く電気力線の本数を単位面積あたりに直すことにより，

$$E(r) = \frac{Q/\varepsilon_0}{2\pi\ell r} = \underline{\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\ell}}\frac{1}{r} = \underline{\frac{2k_0 Q}{\ell}}\frac{1}{r}\,.$$

(4)　電気力線が両面合わせて $\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ 湧き出すことから，両面の面積 $S+S$ に注意して，

$$E = \frac{Q/\varepsilon_0}{2S} = \underline{\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}} = \underline{\frac{2\pi k_0 Q}{S}}\,.$$

【補足】ガウスの法則の別の言い回し

ガウスの法則は，本文のように電気力線の本数によって導入し，それにより連続的な電荷分布の作る電場を計算するが，その計算結果は次のようにも解釈される[*11]：

$$（閉曲面上における電場の強さ）\times（閉曲面の面積）= \frac{（閉曲面内にある電荷の総量）}{（物質の誘電率）}$$

[*11] 物理の専門書では，「電気力線の本数」のような直接的な表現を持ち出さず，むしろこの【補足】によってガウスの法則が説明されることが多い．

8. 電荷分布の計算①

真空中において，等しい面積 S で動径の 2 枚の金属極板 A，B を平行に狭い間隔 d で向き合わせて固定してある．一般に，極板の各表面に分布する電荷を，A の上面は q_1，A の下面は q_2，B の上面は q_3，B の下面は q_4 とする．また，真空の誘電率を ε_0 とし，端の効果は無視する．

I　静電誘導によって，q_1，q_2，q_3，q_4 の間に成り立つべき関係式を求めよ．また，A の上方，A と B の間，および B の下方の電場の大きさを，それぞれ q_1，もしくは q_2 を用いて表せ．

金属板 A には電荷 Q_{A} を，金属板 B には電荷 Q_{B} を与えて，安定するまで待った．

II　$Q_{\mathrm{A}} = +Q$，$Q_{\mathrm{B}} = -Q$ のとき，q_1，q_2，q_3，q_4 を決定せよ．また，このときの AB 間の電場の大きさ E_{in}，および電位差（電圧）V_{AB} を求めよ．さらに，この系をコンデンサと見なしたときの静電容量（電気容量）C を求めよ．

III　続いて，AB 間のちょうど半分を比誘電率 ε_{r} の誘電体で満たした（図 1）．

(1)　A の真空の側に帯電している電荷を Q' とする．真空側に生じる AB 間の電場の大きさ E を求めよ．

(2)　Q' を求めよ．

(3)　このコンデンサの電気容量 C を求めよ．

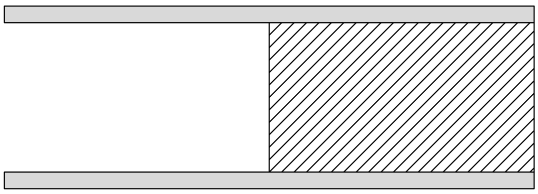


図 1

【メモ】

導体の電荷分布は，

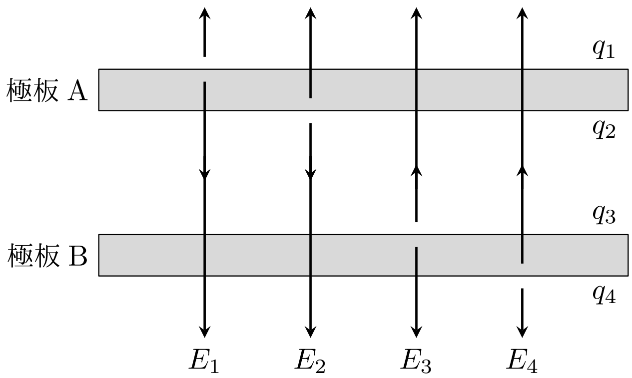
- 静電誘導
- 電荷保存則
- 電位差の関係（キルヒホッフ則）

に対応する条件式を必要なだけ立てれば一意に定まる．

コンデンサの容量は，電荷が極板間の電位差に比例する式を作ったときの比例定数から読み取る[*12]．ただし，コンデンサの容量のうち，平行平板コンデンサの容量はほとんど公式として暗記する．

【解答】

I　各電荷 q_i がつくる電場 $E_i = \dfrac{q_i}{2\varepsilon_0 S}$ の向きは下図のようになる．



静電誘導により，金属板 A，B 内の電場がゼロになるためには，

$$\begin{cases} \mathrm{A}: 0 = E_1 - E_2 - E_3 - E_4 = \dfrac{1}{2\varepsilon_0 S}(q_1 - q_2 - q_3 - q_4)\,, \\ \mathrm{B}: 0 = E_1 + E_2 + E_3 - E_4 = \dfrac{1}{2\varepsilon_0 S}(q_1 + q_2 + q_3 - q_4)\,. \end{cases}$$

これらから，

$$q_1 = q_4\,,\quad q_2 = -q_3\,.$$

II　$4\pi k_0 Q = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ より，

$$k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,.$$

[*12] ガウスの法則より電場と電荷の対応が取れ，キルヒホッフの法則（電場と電位の関係）より，電場と電位差の対応が取れる．この 2 式から電荷と電位差の対応関係が得られる．

III　電荷保存則より，

$$\begin{cases} \mathrm{A}: q_1 + q_2 = +Q\,, \\ \mathrm{B}: q_3 + q_4 = -Q\,. \end{cases}$$

したがって，

$$q_1 = \underset{\sim}{0}\,,\quad q_2 = \underset{\sim\sim\sim}{+Q}\,,\quad q_3 = \underset{\sim\sim\sim}{-Q}\,,\quad q_4 = \underset{\sim}{0}\,.$$

このとき，

$$E_{\mathrm{in}} = E_1 + E_2 - E_3 - E_4 = \frac{q_2 - q_3}{2\varepsilon_0 S} = \underset{\sim\sim}{\frac{Q}{\varepsilon S}}$$

となり，

$$V_{\mathrm{AB}} = E_{\mathrm{in}} d = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{Qd}{\varepsilon S}}\,.$$

したがって，

$$Q = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \times V_{\mathrm{AB}}\,,\qquad \therefore C = \underset{\sim\sim\sim}{\varepsilon_0 \frac{S}{d}}\,.$$

IV (1)　ガウスの法則から，

$$E = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{2Q'}{\varepsilon_0 S}}\,.$$

(2)　誘電体側に生じている電場の大きさ E' はガウスの法則から，

$$E' = \frac{2(Q - Q')}{\varepsilon_{\mathrm{r}} \varepsilon_0 S}\,.$$

ここで電荷保存則を用いた．

電場と電位の関係から，

$$V_{\mathrm{AB}} = \frac{2Q'd}{\varepsilon_0 S} = \frac{2(Q - Q')d}{\varepsilon_{\mathrm{r}} \varepsilon_0 S}\,.$$

したがって，

$$Q' = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{1 + \varepsilon_{\mathrm{r}}}} Q\,.$$

(3)　(2) より，

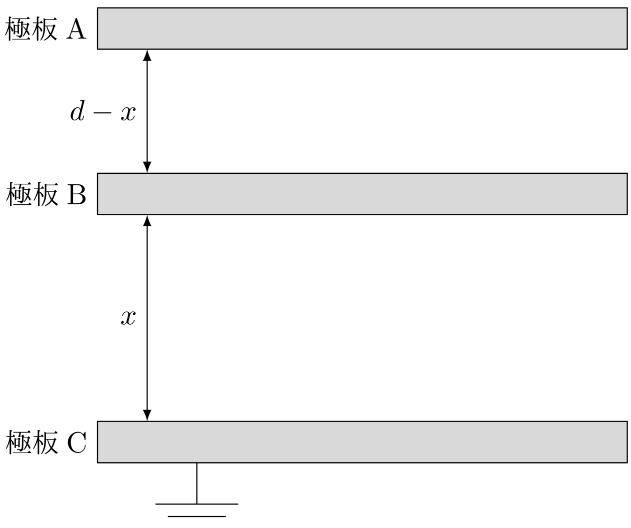
$$C_3 = \frac{Q}{V_{\mathrm{BA}}} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\varepsilon_0 (1 + \varepsilon_{\mathrm{r}}) \frac{S}{2d}}\,.$$

9. 電荷分布の決定②

図のように，真空中において，等しい面積 S で動径の 3 枚の金属極板 A，B，C を平行に狭い間隔で向き合わせてある．極板 A と極板 B の間隔は $d-x$，極板 B と極板 C の間隔は x であり，極板 B を他の極板と平行な状態を保ちながら動かすことにより，x の値を $0<x<d$ の範囲で変えることができる．また，極板 C は接地（アース）されており，はじめ，全ての極板は帯電していない．真空の誘電率を ε_0 とし，端の効果は無視する．

(1)　$x=x_0\,(0<x_0<d)$ となる位置に B を固定し，B に電荷 $Q_0\,(>0)$ を与えたところ，B の下側表面に電荷 $+Q_0$，C の上側表面に電荷 $-Q_0$ が分布した．このときに B と C の間に生じている電場の強さ E_0，および BC 間の電位差（電圧）V_0 を求めよ．

(2)　極板 B を $x=x_0$ となる位置に固定したまま，極板 A と C を導線でつなぎ，安定するまで待った．このとき，極板 A に蓄えられた電荷 $q_{\rm A}$，および極板 C に蓄えられた電荷 $q_{\rm C}$ を求めよ．



【メモ】

金属板が何枚になろうとも，電荷分布の決定の原理は変わらない．なお，回路上の 2 点間を導線でつなぐことは，つないだ 2 点間の電位差をゼロにする（等電位にする）ことを意味する．また，アース（接地）とは，地球（巨大で帯電の無視できる導体）と導線でつなぐことを指し，アースした点を電位の基準点に定める慣習がある．

【解答】

(1)　ガウスの法則，および電場と電位の関係（キルヒホッフ則）より，

$$E_0 = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 S}\,,\quad V_0 = E_0 x_0 = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 S}x_0\,.$$

(2)　このとき，静電誘導により，A の下側表面に電荷 q_{A}，B の上側表面に電荷 $-q_{\mathrm{A}}$，B の下側表面に電荷 $-q_{\mathrm{C}}$，C の上側表面に電荷 q_{C} が分布する[*13]．B に関する電荷保存則より，

$$-q_{\mathrm{A}} - q_{\mathrm{C}} = Q_0\,.$$

また，A と C が等電位になるため $V_{\mathrm{BA}} = V_{\mathrm{BC}}$ より，

$$\frac{q_{\mathrm{A}}}{\varepsilon_0 S}(d - x_0) = \frac{q_{\mathrm{C}}}{\varepsilon_0 S}x_0\,.$$

よって，

$$q_{\mathrm{A}} = -\frac{x_0}{d}Q_0\,,\quad q_{\mathrm{C}} = -\frac{d - x_0}{d}Q_0\,.$$

【補足】(2) の電荷分布をテイネイに計算する

極板 A，B，C の上面，下面に帯電する電気量をそれぞれ q_1，q_2，q_3，q_4，q_5，q_6 とし，AB の間隔を x，BC の間隔を y とする．

電荷保存則から，

$$q_3 + q_4 = Q_0\,.$$

導体内部の電場が 0 であることから，

$$\begin{cases} \mathrm{A}: \dfrac{1}{2\varepsilon_0 S}(-q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6) = 0\,, \\ \mathrm{B}: \dfrac{1}{2\varepsilon_0 S}(-q_1 - q_2 - q_3 + q_4 + q_5 + q_6) = 0\,, \\ \mathrm{C}: \dfrac{1}{2\varepsilon_0 S}(-q_1 - q_2 - q_3 - q_4 - q_5 + q_6) = 0\,. \end{cases}$$

*13 コンデンサを形成するため，電荷が対となって現れる．実際に計算して確かめたものは補足を参照．

AB 間の電位差と BC 間の電位差が等しいことから[*14]，

$$\frac{1}{2\varepsilon_0 S}(-q_1 - q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6)x = \frac{1}{2\varepsilon_0 S}(q_1 + q_2 + q_3 + q_4 - q_5 - q_6)y\,.$$

極板 C にアース（ここではこれを地面とする）を接続していることから，C と地面は等電位であり，極板 C と地面の間の距離を z として，この間の電場から電位差を考えれば，

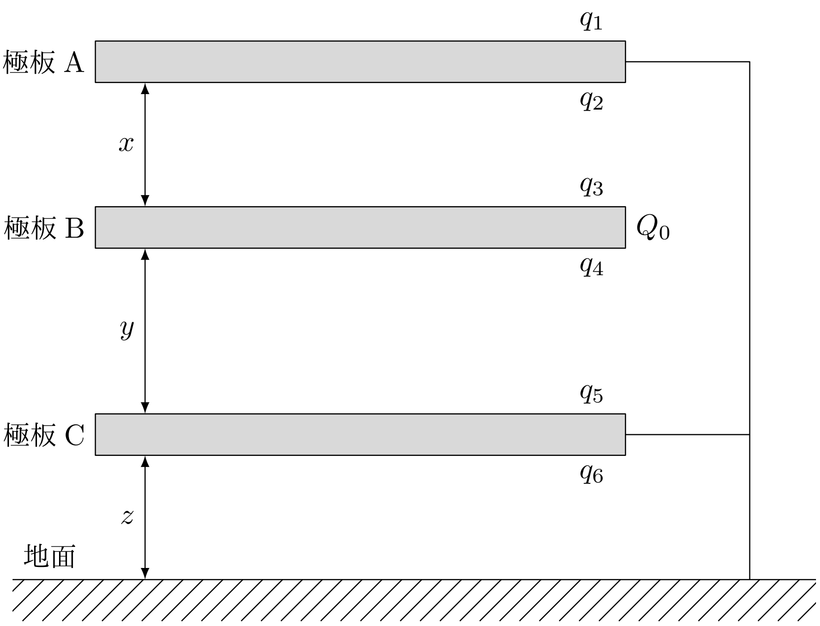
$$\frac{1}{2\varepsilon_0 S}(q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6)z = 0\,.$$

以上より[*15]，

$$\begin{cases} q_3 + q_4 = Q_0\,, \\ -q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 = 0\,, \\ -q_1 - q_2 - q_3 + q_4 + q_5 + q_6 = 0\,, \\ -q_1 - q_2 - q_3 - q_4 - q_5 + q_6 = 0\,, \\ -q_1 - q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 = \dfrac{y}{x}(q_1 + q_2 + q_3 + q_4 - q_5 - q_6)\,, \\ q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 = 0\,. \end{cases}$$

$$\therefore q_1 = q_6 = 0\,,\quad q_3 = -q_2 = \frac{y}{x+y}Q_0 \quad q_4 = -q_5 = \frac{x}{x+y}Q_0\,.$$

結果から，極板の向かい合う面には，大きさの等しい異符号の電荷が帯電していることを確認できる．



[*14] B から A，または C に向かう向きの電場で計算している．

[*15] $x = d - x_0$，$y = x_0$ とすれば解答を再現する．

§3.2 回路素子の中身

この章では，回路素子の中身として，電気抵抗の抵抗のモデル，コンデンサの内部構造（こちらが主）について扱う．ここでは，平行平板コンデンサに関する公式を覚えたい（次章にすべての素子に関するまとめを載せる）．

■簡単なまとめ

- コンデンサに関する諸々：
  - ❶ 静電容量：$C = \varepsilon \dfrac{S}{d}$
  - ❷ 電位降下：$V = \dfrac{Q}{C}$
  - ❸ 蓄える（静電）エネルギー：$U = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$
  - ❹ 帯電金属板の作る電場：$E = \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}$
- 起電力が一定の電池のする仕事：$W =$（通過電荷）$\times$（起電力）

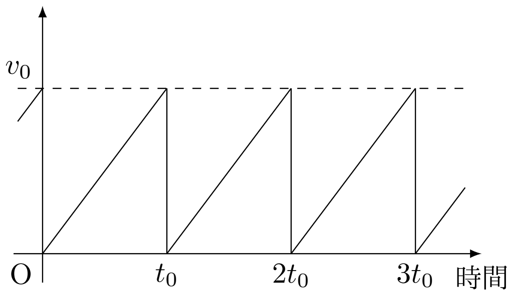
  起電力が時間に依存する場合は次章の表を参照.

1. 抵抗

電気回路に用いる抵抗器にはオームの法則が成り立っている．オームの法則を電子の運動によって考察してみよう．

断面積 S，長さ ℓ の導体棒の両端に電圧 V をかける．導体棒に起電力をかけることで導体棒内部には導体棒に沿った方向に電場が生じ，その電場の強さ E は $E = \boxed{\text{ア}}$ である．導体内部の自由電子（質量 m，電荷 $-e<0$，電子数密度[*16]n）は，この電場から静電気力を受けることで初速度 0，加速度の大きさ $a = \boxed{\text{イ}}$ の等加速度運動を始める．

今，図のように，加速された自由電子は一定の時間間隔 t_0 で陽イオンと衝突し，再び速度が 0 となる運動を繰り返していると考える．このとき，導体内を流れる電子集団の速度 $\langle v \rangle$ は各電子の平均速度に等しく $\langle v \rangle = \boxed{\text{ウ}}$ であり，導体棒には大きさ $I = \dfrac{V}{\boxed{\text{エ}}}$ の電流が流れる．以上より，電流 I と導体棒の両端の電位差 V は比例関係にあり，その比例定数 $R = \boxed{\boxed{\text{エ}}}$ を電気抵抗（または単に抵抗）と呼び，R は $R = \boxed{\text{オ}}\,\dfrac{\ell}{S}$ のように書くことができる．この $\rho = \boxed{\boxed{\text{オ}}}$ を抵抗率と呼ぶ．



【解答】

電場と電位の関係から $E = \underset{\text{ア}}{\dfrac{V}{\ell}}$ であり，運動方程式より，

$$ma = eE\,, \qquad \therefore a = \underset{\text{イ}}{\frac{eV}{m\ell}}\,.$$

したがって，等加速度運動より，このモデルでの電子集団の速度は，

$$\langle v \rangle = \frac{0+v_0}{2} = \underset{\text{ウ}}{\frac{eVt_0}{2m\ell}}\,.$$

以上から，電流の定義より，

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{eS\langle v \rangle t_0 n}{t_0} = \frac{e^2 S n t_0 V}{2m\ell}\,, \qquad \therefore R = \underset{\text{エ}}{\frac{2m}{e^2 n t_0}\frac{\ell}{S}}\,,\quad \rho = \underset{\text{オ}}{\frac{2m}{e^2 n t_0}}\,.$$

[*16] 単位体積当たりの電子数．

2. コンデンサ①

真空中において，等しい面積 S で同形の 2 枚の金属極板 A，B を平行に狭い間隔 d で向き合わせて固定してある．金属板 A には電荷 $Q\,(>0)$ を，金属板 B には電荷 $-Q$ を与えて，安定するまで待った．真空の誘電率を ε_0 とし，端の効果は無視する．また，極板と垂直な方向に y 軸を定め，金属板 B を $y=0$，金属板 A を $y=d$ とし，金属板 B の電位 ϕ を $\phi_{\mathrm{B}}=\phi(0)=0$ とする．

I　AB 間の電場の大きさ E，および電位差（電圧）V_{AB} を求めよ．さらに，この系をコンデンサと見なしたときの静電容量（電気容量）$C(d)$，コンデンサが蓄える静電エネルギー $U(d)$ を求めよ．

II　極板に外力を加え，極板間隔を $d+\varDelta d$ とした．

(1)　この系をコンデンサと見なしたときの静電容量（電気容量）$C(d+\varDelta d)$ を求めよ．

(2)　コンデンサが蓄えている静電エネルギー $U(d+\varDelta d)$ を求めよ．

(3)　外力がした仕事 W_{ex} を求めよ．

(4)　全問の結果を利用して，極板間引力の大きさ f を求めよ．

III　極板間に，面積 S，厚さ $x\,(0<2x<d)$ の帯電していない金属板を，極板 B との間隔が x となる位置に挿入した．

(1)　この系をコンデンサと見なしたときの静電容量（電気容量）C を求めよ．また，コンデンサが蓄えている静電エネルギー U を求めよ．

(2)　金属板を挿入するのに要した仕事 W_{ex} を求めよ．

(3)　極板と垂直な方向に y 軸を定める．極板間の電場の強さ E，および電位 ϕ について，$E-y$ グラフ，$\phi-y$ グラフを図示せよ．

IV　極板間に，面積 S，厚さ $x\,(0 < x < d)$ の誘電体（誘電率 ε）を，極板 B との間隔が x となる位置に挿入した．

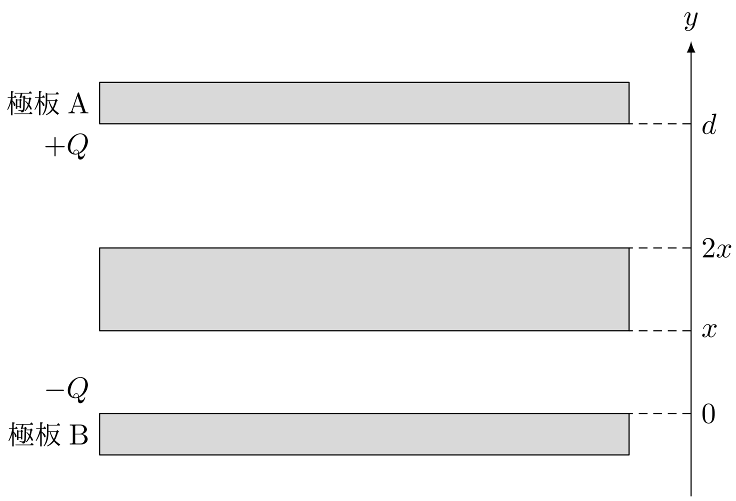
(1)　誘電体内部では誘電分極が起こり，誘電体内部の電場は，分極電荷によって生じた電場と外部電場の合成電場となる．誘電体内部の電場の強さ E_{pol} を，Q，S，ε を用いて表せ．

(2)　分極電荷 δ を，ε_0，ε，Q を用いて表せ．

(3)　この系をコンデンサと見なしたときの静電容量（電気容量）C を求めよ．また，コンデンサが蓄えている静電エネルギー U を求めよ．

(4)　誘電体を挿入するのに要した仕事 W_{ex} を求めよ．

(5)　極板と垂直な方向に y 軸を定める．極板間の電場の強さ E，および電位 ϕ について，$E-y$ グラフ，$\phi- y$ グラフを図示せよ．



【メモ】

金属板は孤立しているため，電荷は保存する（常に一定の値となる）．コンデンサの容量の決定はその形状に依らず，「ガウス則から E を決定」→「電場と電位の関係から電荷 Q と電位差 V の関係式を作る」→「係数が C」で行う．なお，平行平板コンデンサの容量については公式も覚える．

【解答】

I　静電誘導より，電荷は向かい合う面の表面に分布する．ガウスの法則より，

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\,.$$

電位差は，電場と電位の関係から，

$$V_{\mathrm{AB}} = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}\,.$$

よって，

$$Q = \varepsilon_0 \frac{S}{d} V_{\mathrm{AB}}\,, \qquad \therefore C(d) = \varepsilon_0 \frac{S}{d}\,.$$

また，公式より，

$$U(d) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(d)} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} d\,.$$

II (1)　公式より，

$$C(d+\Delta d) = \varepsilon_0 \frac{S}{d+\Delta d}\,.$$

(2)　公式より，

$$U(d+\Delta d) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C(d+\Delta d)} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}(d+\Delta d)\,.$$

(3)　系のエネルギー収支より，

$$W_{\mathrm{ex}} = \Delta U = U(d+\Delta d) - U(d) = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\Delta d\,.$$

(4)　仕事の定義より，外力 f_{ex} は，

$$f_{\text{ex}}\mathit{\Delta} d = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\mathit{\Delta} d\,, \qquad \therefore f_{\text{ex}} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\,.$$

外力は極板間引力とつりあっているので，

$$f = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}}\,.$$

III (1)　静電誘導より，電荷は向かい合う面の表面に分布し，全てその絶対値は Q となる．したがって，極板間の電場の強さ E は等しく，ガウスの法則より，

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\,.$$

電位差は，電場と電位の関係から，

$$V_{\text{AB}} = E\cdot(d-2x) + E\cdot x = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}(d-x)\,.$$

よって[*17]，

$$Q = \varepsilon_0\frac{S}{d-x}V_{\text{AB}}\,, \qquad \therefore C = \underset{\sim\sim\sim}{\varepsilon_0\frac{S}{d-x}}\,.$$

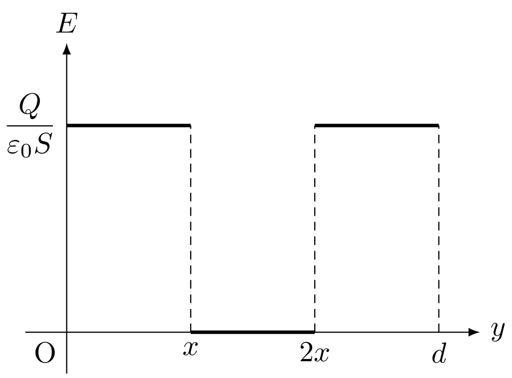
静電エネルギーは公式より，

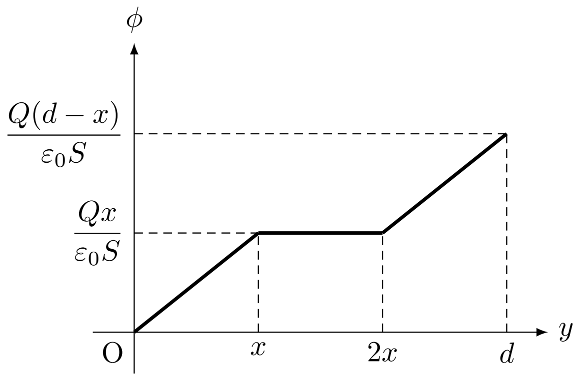
$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}(d-x)\,.$$

(2)　系のエネルギー収支より，

$$W_{\text{ex}} = \mathit{\Delta} U = \underset{\sim\sim\sim}{-\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}x}\,.$$

(3)　グラフは，それぞれ以下のようになる．





[*17] 一般に，極板間に帯電していない金属板を挿入した場合，コンデンサの容量は，金属板の厚さを除いた部分で容量の公式を利用した値となる．

IV (1)　公式より[*18]，

$$E = \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}}\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}\cdot 2 = \frac{Q}{\varepsilon S}\,.$$

(2)　分極電荷 δ は極板とは正負逆に帯電し，その電場は y 軸正の向きに生じる．よって，

$$-\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}\cdot 2 + \frac{\delta}{2\varepsilon_0 S}\cdot 2 = -\frac{Q}{\varepsilon S}\,, \qquad \therefore\ \delta = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)Q\,.$$

(3)　極板間の電位差は，

$$V = E\cdot(d-2x) + E_\mathrm{pol}\cdot x + E\cdot x = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}(d-x) + \frac{Q}{\varepsilon S}x = \frac{Q}{S}\left(\frac{d-x}{\varepsilon_0} + \frac{x}{\varepsilon}\right)\,.$$

よって，

$$C = \varepsilon_0\varepsilon\frac{S}{\varepsilon(d-x)+\varepsilon_0 x}\,.$$

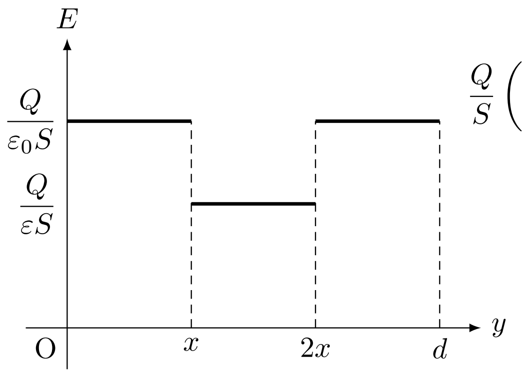
静電エネルギーは公式より，

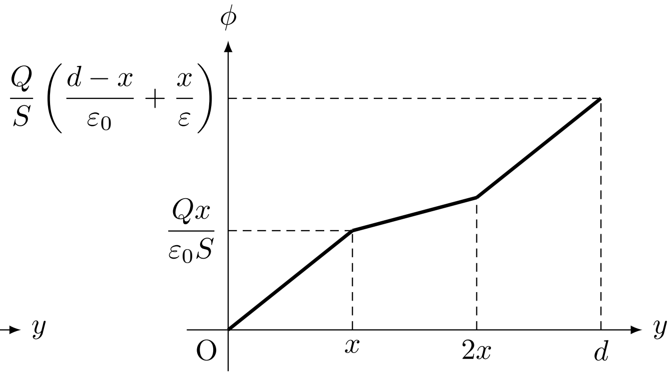
$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2\{\varepsilon(d-x)+\varepsilon_0 x\}}{2\varepsilon_0\varepsilon S}\,.$$

(4)　系のエネルギー収支より，

$$W_\mathrm{ex} = \mathit{\Delta} U = -\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)Q^2 x}{2\varepsilon_0\varepsilon S}\,.$$

(5)　グラフは，それぞれ以下のようになる．





[*18] 電場 E 中に置いた誘電体内部の電場は，$E_\mathrm{pol} = \dfrac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}}E$（ただし $\varepsilon_\mathrm{r} = \varepsilon/\varepsilon_0$）となる．

3. コンデンサ②

真空中において，等しい面積 S で同形の 2 枚の金属極板 A，B を平行に狭い間隔 d で向き合わせて固定してある．両金属板に，A 側が高電位でかつ極板間の電位差が V となるように起電力を接続した．真空の誘電率を ε_0 とし，端の効果は無視する．

I　AB 間の電場の大きさ $E(d)$，および極板 A に帯電している電気量 $Q_{\mathrm{A}}(d)$ を求めよ．さらに，この系をコンデンサと見なしたときの静電容量（電気容量）$C(d)$，コンデンサが蓄える静電エネルギー $U(d)$ を求めよ．

II　極板に外力を加え，極板間隔を $d+\mathit{\Delta}d\,(\mathit{\Delta}d \ll d)$ とした．

(1)　この系をコンデンサと見なしたときの静電容量（電気容量）$C(d+\mathit{\Delta}d)$ を求めよ．

(2)　極板間隔を拡げる間のコンデンサが蓄えている静電エネルギーの変化量 $\mathit{\Delta}U$ を $\mathit{\Delta}d$ に比例する形で表せ．

(3)　極板間隔を拡げる間に電池がした仕事 W_{ba} を $\mathit{\Delta}d$ に比例する形で表せ．

(4)　外力がした仕事 W_{ex} を $\mathit{\Delta}d$ に比例する形で表せ．

(5)　全問の結果を利用して，極板間引力の大きさ f を求めよ．

III　極板間に，面積 S，厚さ $x\,(x \ll d)$ の帯電していない金属板を挿入した．

(1)　この系をコンデンサと見なしたときの静電容量（電気容量）C を求めよ．

(2)　金属板を挿入した間のコンデンサが蓄えている静電エネルギーの変化量 $\mathit{\Delta}U$ を x に比例する形で表せ．

(3)　金属板を挿入した間に電池がした仕事 W_{ba} を x に比例する形で表せ．

(4)　金属板を挿入するのに外力がした仕事 W_{ex} を x に比例する形で表せ．

(5)　金属板を挿入する際，金属板は引きずり込まれるか，押し出されるか，理由とともに述べよ．

IV　極板を正方形（面積 $S=a^2$）とし，x 軸を極板の左端を原点に水平右向きに定める．極板間に，面積が等しく厚さ d の正方形の誘電体（比誘電率 ε_{r}）に外力を加え，原点から位置 x までゆっくりと挿入した（図参照）．

(1)　A の真空の側に帯電している電荷を q_1，誘電体側に帯電している電荷を q_2 とする．q_1，q_2 を求めよ．

(2)　この系をコンデンサと見なしたときの静電容量（電気容量）$C(x)$ を求めよ．

(3)　コンデンサが蓄えている静電エネルギー $U(x)$ を求めよ．

(4)　誘電体を位置 x から $x+\Delta x$ まで挿入するのに要した仕事 W_{ex} を求めよ．

(5)　誘電体がコンデンサから受ける力を f とする．$f-x$ グラフを，$0 \leq x \leq 2d$ の範囲で図示せよ．

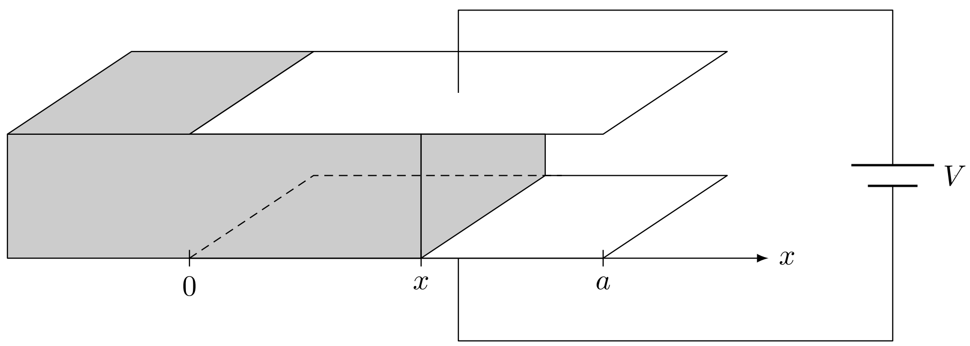


図 1

【メモ】

金属板両端の電位差（電圧）は V で保たれる[*19]．

【解答】

I　静電誘導より，電荷は向かい合う面の表面に分布する．ガウスの法則より，

$$E(d) = \frac{Q_{\mathrm{A}}}{\varepsilon_0 S}\,.$$

キルヒホッフ則より（電位差を 2 通りで表現して）[*20]，

$$V = Ed = \frac{Q_{\mathrm{A}} d}{\varepsilon_0 S}\,, \qquad \therefore E(d) = \underset{\sim\sim}{\frac{V}{d}}\,,\quad Q_{\mathrm{A}}(d) = \underset{\sim\sim\sim}{\varepsilon_0 \frac{S}{d} V}\,,\quad C(d) = \underset{\sim\sim}{\varepsilon_0 \frac{S}{d}}\,.$$

また，公式より，

$$U(d) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{\varepsilon_0 S V^2}{2d}}\,.$$

II (1)　公式より，

$$C(d+\Delta d) = \underset{\sim\sim\sim\sim}{\varepsilon_0 \frac{S}{d+\Delta d}}\,.$$

なお，この結果よりコンデンサに帯電している電気量はキルヒホッフ則より，

$$V = \frac{Q}{C}\,, \qquad \therefore Q = \varepsilon_0 \frac{S}{d+\Delta d} V\,.$$

(2)　公式より，

$$\Delta U = U(d+\Delta d) - U(d) = \frac{\varepsilon_0 S V^2}{2d}\left\{\left(1+\frac{\Delta d}{d}\right)^{-1} - 1\right\} \fallingdotseq \underset{\sim\sim\sim\sim}{-\frac{\varepsilon_0 S V^2}{2d^2}\Delta d}\,.$$

(3)　電池のする仕事 W_{ba} は，

$$W_{\mathrm{ba}} = \Delta Q V = \varepsilon_0 \frac{S}{d} V^2 \left\{\left(1+\frac{\Delta d}{d}\right)^{-1} - 1\right\} \fallingdotseq \underset{\sim\sim\sim\sim}{-\frac{\varepsilon_0 S V^2}{d^2}\Delta d}\,.$$

(4)　系のエネルギー収支より，

$$W_{\mathrm{ex}} + W_{\mathrm{ba}} = \Delta U\,, \qquad \therefore W_{\mathrm{ex}} = \underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{\varepsilon_0 S V^2}{2d^2}\Delta d}\,.$$

[*19] コンデンサの中身を見るような問題は，Q か V のどちらかが一定で設定が与えられる．
[*20] B には $-Q_{\mathrm{A}}$ 帯電する．

(5)　仕事の定義より，外力 f_{ex} は，

$$f_{\mathrm{ex}}\mathit{\Delta} d=\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2d^2}\mathit{\Delta} d\,,\qquad \therefore f_{\mathrm{ex}}=\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2d^2}\,.$$

外力は極板間引力とつりあっているので[*21]，

$$f=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2d^2}}\,.$$

III (1)　静電誘導より，電荷は向かい合う面の表面に分布し，その絶対値を Q とする．極板間の電場の強さ E は等しく，ガウスの法則より，

$$E=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\,.$$

電位差は，電場と電位の関係から，

$$V_{\mathrm{AB}}=V=E\cdot(d-2x)+E\cdot x=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}(d-x)\,.$$

よって[*22]，

$$Q=\varepsilon_0\frac{S}{d-x}V_{\mathrm{AB}}\,,\qquad \therefore C=\varepsilon_0\frac{S}{d-x}\,.$$

(2)　公式より，

$$U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2(d-x)}\,.$$

(3)　電池のする仕事 W_{ba} は，

$$W_{\mathrm{ba}}=\mathit{\Delta} QV=\frac{\varepsilon_0 SV^2}{d-x}-\frac{\varepsilon_0 SV^2}{d}=\frac{\varepsilon_0 SV^2}{d}\left\{\left(1-\frac{x}{d}\right)^{-1}-1\right\}\fallingdotseq\frac{\varepsilon_0 SV^2}{d^2}x\,.$$

(4)　系のエネルギー収支より，

$$W_{\mathrm{ex}}+W_{\mathrm{ba}}=\mathit{\Delta} U\,,\qquad W_{\mathrm{ex}}=-\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2d^2}x\,.$$

(5)　外力のする仕事が負の値を取ることから，引きずり込まれる．

[*21] 各自 2II の結果と整合していることを確認せよ．

[*22] 一般に，極板間に帯電していない金属板を挿入した場合，コンデンサの容量は，金属板の厚さを除いた部分で容量の公式を利用した値となる．

IV (1)　キルヒホッフの法則より，

$$V = \frac{q_1}{\varepsilon_0 a(a-x)}d = \frac{q_2}{\varepsilon_{\rm r}\varepsilon_0 ax}d, \qquad \therefore q_1 = \varepsilon_0\frac{a(a-x)}{d}V\,, \quad q_2 = \varepsilon_{\rm r}\varepsilon_0\frac{ax}{d}V\,.$$

(2)　前問の結果より，

$$Q(x) = q_1 + q_2 = \varepsilon_0\frac{a^2}{d}\left\{1 + (\varepsilon_{\rm r}-1)\frac{x}{a}\right\}V\,, \qquad C(x) = \varepsilon_0\frac{a^2}{d}\left\{1 + (\varepsilon_{\rm r}-1)\frac{x}{a}\right\}.$$

(3)　公式より，

$$U(x) = \frac{1}{2}\frac{Q(x)^2}{C(x)} = \frac{\varepsilon_0 a^2 V^2}{2d}\left\{1 + (\varepsilon_{\rm r}-1)\frac{x}{a}\right\}.$$

(4)　この間の静電エネルギー変化 ΔU は，

$$\Delta U = U(x+\Delta x) - U(x) = (\varepsilon_{\rm r}-1)\varepsilon_0\frac{aV^2}{2d}\Delta x\,.$$

電池のする仕事 $W_{\rm ba}$ は，

$$W_{\rm ba} = \Delta QV = (\varepsilon_{\rm r}-1)\varepsilon_0\frac{aV^2}{d}\Delta x\,.$$

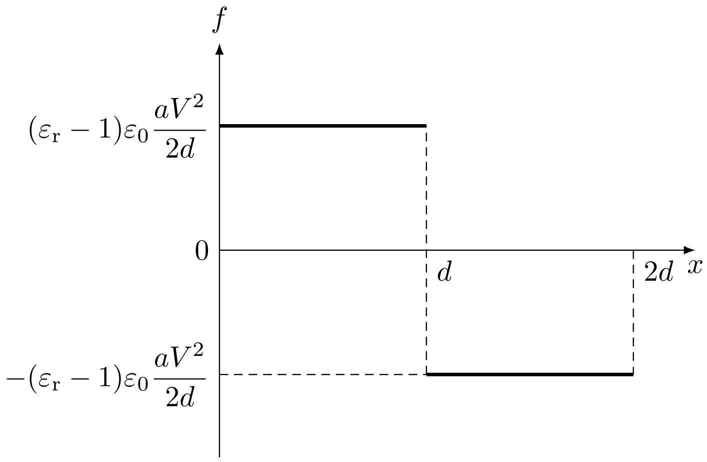
よって，系のエネルギー収支より，

$$W_{\rm ex} + W_{\rm ba} = \Delta U\,, \qquad \therefore W_{\rm ex} = -(\varepsilon_{\rm r}-1)\varepsilon_0\frac{aV^2}{2d}\Delta x\,.$$

(5)　前問の結果より，誘電体が引きずり込まれる力の大きさ $|f|$ は位置 x に依らず，

$$|f| = (\varepsilon_{\rm r}-1)\varepsilon_0\frac{aV^2}{2d}\,.$$

したがって，$f - x$ グラフは以下のようになる．



4. コンデンサ③

真空中に電荷 $Q > 0$ を帯電させた半径 a の導体球 A を置く．導体球の周囲の電場の大きさ E と電位 ϕ について考察する．導体球の中心を O とし，真空の誘電率を ε_0 とする．O からの距離を r としたとき，電位 ϕ の基準点を $r \to \infty$（無限遠）に定め，電位 ϕ は電場の大きさ E から $\phi = -\int_{\text{基準点}}^{r} E\,dr$ と計算できることを用いてよい．

I　導体球 A のみの状態を考える．このとき，O を中心として放射状に電気力線が湧き出している．

(1)　ガウスの法則を考え，位置 r における電場の大きさ E を求め，グラフに図示せよ．なお，導体球の内外で場合分けして考える必要があることに留意せよ．

(2)　位置 r における電位 ϕ を求め，グラフに図示せよ．

II　続いて，導体球 A とその中心を重ねて，内径 $b\,(> a)$，外径 $c\,(> b)$ の球殻状導体 B を A の周りに固定した場合を考える（図 2 − 1）．B は帯電していない．

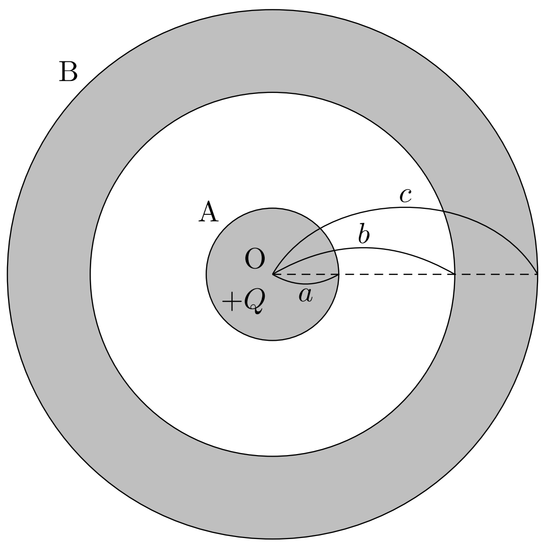
(1)　B の内側表面の帯電量を q_1，外側表面の帯電量を q_2 とする．電荷保存則から q_1，q_2 の間に成り立つ関係式を立式せよ．

(2)　ガウスの法則を考え，位置 r における電場の大きさ E を立式し．導体内部の電場が 0 となることから q_1，q_2 を求めよ．また，q_1，q_2 を電場の大きさ E へ代入し，位置 r における電場の大きさ E を求め，グラフに図示せよ．

(3)　位置 r における電位 ϕ を求め，グラフに図示せよ．

(4)　A と B の内側表面はコンデンサと見なせる．このコンデンサの電気容量 C を求めよ．

III　実は，導体球 A だけでもコンデンサと見なすことができる（無限遠と対をなすと見る）．II(4) の結果を利用し，このコンデンサの容量 C を求めよ．


B
A
O
$+Q$
a
b
c

【解答】

I (1)　O を中心とした半径 r の球面を考える．導体内部は電場がないことから $r \leq a$ では内部電荷 0，$a < r$ では内部電荷 Q ゆえガウス則より，

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{内部}}}{\varepsilon_0}, \qquad \therefore E = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\begin{cases} 0 & (0 < r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & (a \leq r) \end{cases}}.$$

(2)　電場と電位の関係より，$r \geq a$ では，

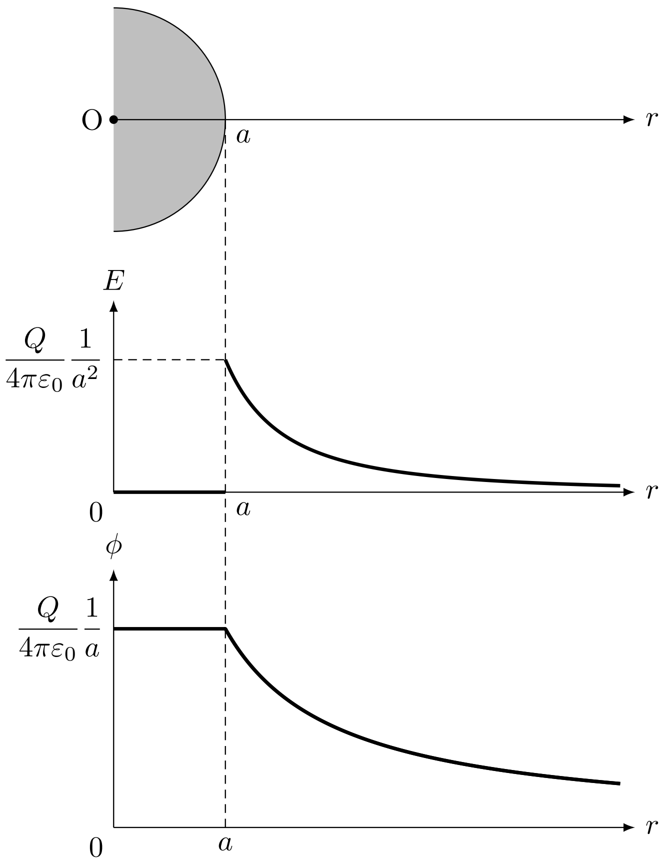
$$\phi = -\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}.$$

同様に $0 < r < a$ では，

$$\phi = -\int_\infty^r E\,dr = -\int_\infty^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr - \int_a^r 0\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}.$$

以上をまとめて，

$$\phi = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{a} & (0 < r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} & (a \leq r) \end{cases}}.$$



II (1)　電荷保存則より，

$$\underline{q_1 + q_2 = 0}\,.$$

(2)　ガウス則より，

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{内部}}}{\varepsilon_0}\,, \qquad \therefore E = \begin{cases} 0 & (0 < r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & (a \leq r < b) \\ \dfrac{Q + q_1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & (b \leq r < c) \\ \dfrac{Q + q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & (c \leq r) \end{cases}\,.$$

導体内部の電場は静電誘導によって 0 となるため，

$$\frac{Q + q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = 0\,, \qquad \therefore q_1 = \underline{-Q}\,.$$

電荷保存則より $q_2 = \underline{Q}$ であり，これを踏まえれば，

$$\underline{E = \begin{cases} 0 & (0 < r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & (a \leq r < b) \\ 0 & (b \leq r < c) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & (c \leq r) \end{cases}}\,.$$

(3)　電場と電位の関係より，$r \geq c$ では，

$$\phi = -\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\,.$$

同様に，$b \leq r < c$ では，

$$\begin{aligned} \phi &= -\int_\infty^r E\,dr \\ &= -\int_\infty^c \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr - \int_c^r 0\,dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c}\,. \end{aligned}$$

$b \leq r < a$ では，

$$\begin{aligned} \phi &= -\int_\infty^r E\,dr \\ &= -\int_\infty^c \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr - \int_c^b 0\,dr - \int_b^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\,. \end{aligned}$$

$0 < r \leq a$ では，

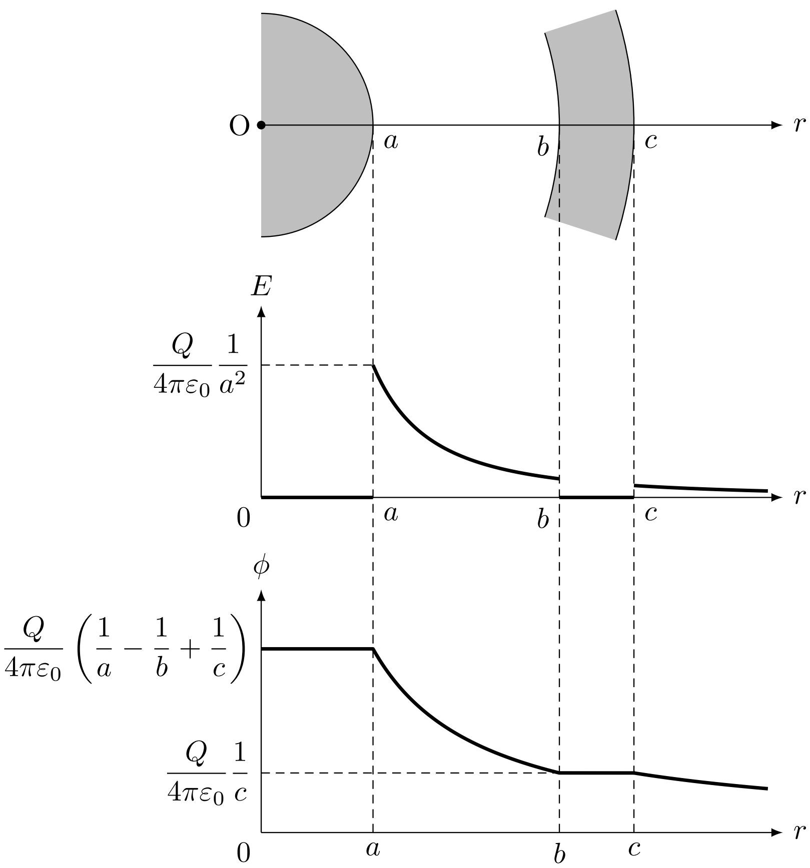
$$
\begin{aligned}
\phi &= -\int_{\infty}^{r} E\,dr \\
&= -\int_{\infty}^{c} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr - \int_{c}^{b} 0\,dr - \int_{b}^{a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,dr - \int_{a}^{r} 0\,dr \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).
\end{aligned}
$$

以上をまとめて，

$$
\phi = \begin{cases}
\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) & (0 < r < a) \\
\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) & (a \leq r < b) \\
\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{c} & (b \leq r < c) \\
\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} & (c \leq r)
\end{cases}.
$$

(4)　A と B 表面の電位差 $\varDelta\phi$ を求めて，

$$
\varDelta\phi = \phi(a) - \phi(b) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}Q, \qquad \therefore C = 4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}.
$$



III　$b \to \infty$ として，

$$C = \lim_{b\to\infty} 4\pi\varepsilon_0 \frac{a}{1 - a/b} = \underset{\sim\sim\sim\sim}{4\pi\varepsilon_0 a}\,.$$

§3.3 電気回路

この章では，電池，抵抗，コンデンサ，例外素子（電球，ダイオード）からなる電気回路を扱う．高校範囲で使う全ての素子の性質については隣のページにすべてまとめてある．

■簡単なまとめ

- 電気回路の状態は，

$$\begin{cases} \text{キルヒホッフ則} \\ \text{電荷保存則} \\ \text{回路素子の性質} \end{cases}$$

によって一意に定まる．方程式の未知数は，コンデンサに蓄えられる電荷 Q，または回路に流れる電流 I を取ればよい．なお，コンデンサに流れ込む電流 I は，コンデンサに蓄えられる電荷 Q と $I = \pm \dfrac{dQ}{dt}$ の関係付く（符号は電流の向きのとり方に依る）．

回路を構成する素子の扱い

■抵抗

- 電位降下　→　$V = RI$　（なお，$R = \rho\dfrac{d}{S}$）
- エネルギー　→　ジュール熱 J として消費

$$J = \begin{cases} RI^2 \times (\text{経過時間}) & (I\text{ 一定のとき}), \\ \text{エネルギー収支から逆算} & (I\text{ 一定でないとき}). \end{cases}$$

■コンデンサ

- 電位降下　→　$V = \dfrac{Q}{C}$　（なお，$C = \varepsilon\dfrac{S}{d}$）
- エネルギー　→　静電エネルギー $U = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$ を蓄える．
- 素子の性質　→　「十分時間経過」で $Q =$（一定），コンデンサに流れ込む $I = 0$.

■コイル

- 電位降下　→　$V = L\dfrac{dI}{dt}$
- エネルギー　→　エネルギー $U = \dfrac{1}{2}LI^2$ を蓄える．
- 素子の性質　→　スイッチの切り替え前後で電流の値が同じ値を取る（電流の連続性の保証）．「十分時間経過」で $I =$（一定），コイルの電位差 $L\dfrac{dI}{dt} = 0$.

■電池

- 電位上昇　→　起電力の分だけ
- エネルギー　→　$W = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} IV\,dt = \int_{Q_1}^{Q_2} V\,dQ$
起電力が時間によらず一定のときは $W =$（通過電荷）×（起電力）$= \varDelta QV$ と計算できる．

■例外的な素子

よく出題されるものだと，ダイオード，電球など．太陽光電池などもある．

- 素子の性質　→　問題文で，(i) 具体的な関数形を指示，(ii) 特性曲線が与えられる，のいずれか．

素子の性質がグラフの場合，キルヒホッフ則と電荷保存則から得られた式をグラフ上に記し，特性曲線との交点を求めることで回路の状態が一意に定まる（連立方程式をグラフ上で解く）．

1. 抵抗のみの回路①

(1)　図 1 のように，電池 E（起電力 V），電気抵抗 R_1（抵抗値 R），R_2（抵抗値 $2R$），R_3（抵抗値 $3R$）からなる電気回路を考える．R_1 を流れる電流 I_1，および R_2 を流れる電流 I_2 を求めよ．

(2)　図 2 のように，電池 E_1（起電力 V），E_2（起電力 $3V$），電気抵抗 R_1（抵抗値 $2R$），R_2（抵抗値 R），R_3（抵抗値 $2R$）からなる電気回路を考える．R_1 を流れる電流 I_1，および R_2 を流れる電流 I_2 を求めよ．

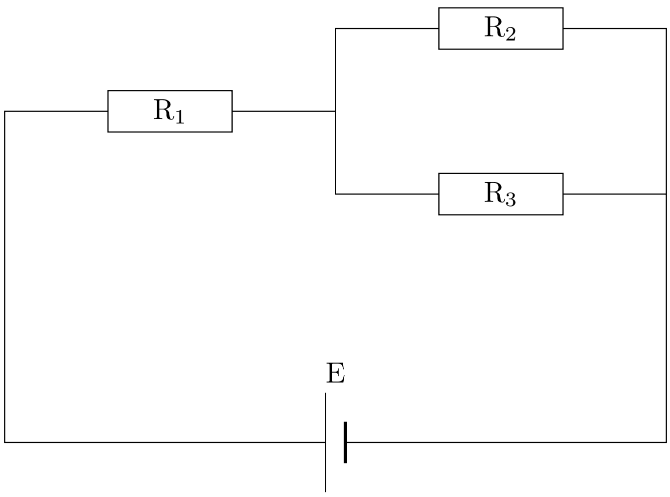


図 1

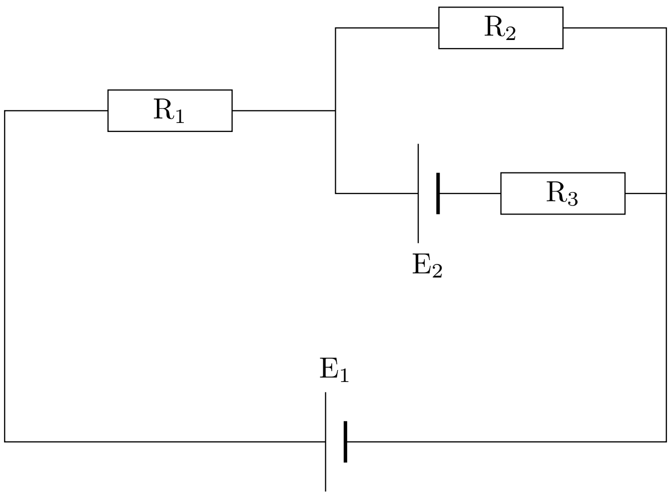


図 2

【解答】

(1)　キルヒホッフ則より[*23],

$$\begin{cases} RI_1 + 2RI_2 = V\,, \\ RI_1 + 3R(I_1 - I_2) = V\,, \end{cases} \qquad \therefore I_1 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{5}{11}\frac{V}{R}}\,,\quad I_2 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{3}{11}\frac{V}{R}}\,.$$

(2)　キルヒホッフ則より,

$$\begin{cases} 2RI_1 + RI_2 = V\,, \\ 2RI_1 + 3V + 2R(I_1 - I_2) = V\,, \end{cases} \qquad \therefore I_1 = \underset{\sim}{0}\,,\quad I_2 = \underset{\sim}{\frac{V}{R}}\,.$$

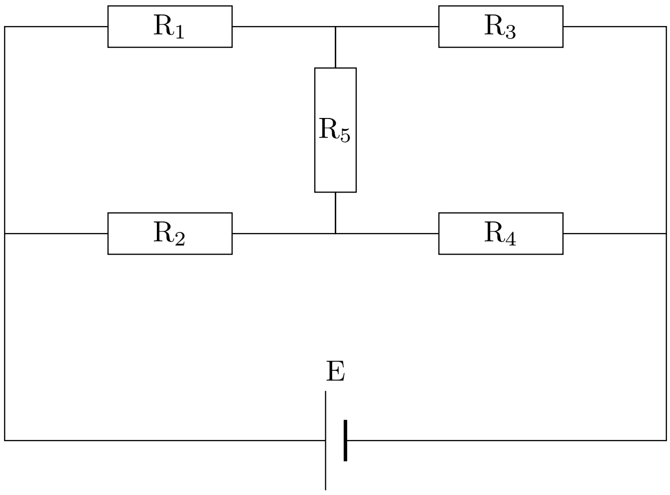
[*23] 電荷保存則から，各分岐点での電流はその瞬間毎に（流入量）=（流出量）を満たす（**キルヒホッフ第 1 法則**）.

2. 抵抗のみの回路②

図のように，電池 E（起電力 V），電気抵抗 $\mathrm{R_1}$（抵抗値 R_1），$\mathrm{R_2}$（抵抗値 R_2），$\mathrm{R_3}$（抵抗値 R_3），$\mathrm{R_4}$（抵抗値 R_4），$\mathrm{R_5}$（抵抗値 R_5）からなる電気回路を考える．

(1)　$V = 10\,\mathrm{V}$，$R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$，$R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}$，$R_3 = 2\,\mathrm{k\Omega}$，$R_4 = 1\,\mathrm{k\Omega}$，$R_5 = 2\,\mathrm{k\Omega}$ とする．各抵抗を流れる電流の大きさを求めよ．

(2)　$\mathrm{R_5}$ に流れる電流の値が 0 であるとき，$\dfrac{R_3}{R_4}$ を，R_1，R_2 を用いて表せ．



【解答】

(1)　$\mathrm{R_1}$，$\mathrm{R_2}$，$\mathrm{R_3}$ を流れる電流をそれぞれ I_1，I_2，I_3 とする．キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} I_1 + 2I_3 = 10\,, \\ 2I_2 + \{(I_1 - I_3) + I_2\} = 10\,, \\ 2(I_1 - I_3) = -1 \cdot \{(I_1 - I_3) + I_3\} + 2I_3\,, \end{cases}$$

$$\therefore I_1 = \underline{4\,\mathrm{mA}}\,,\quad I_2 = \underline{3\,\mathrm{mA}}\,,\quad I_3 = \underline{3\,\mathrm{mA}}\,.$$

(2)　$\mathrm{R_5}$ を流れる電流が 0 のことから，キルヒホッフ則より[*24]，

$$\begin{cases} R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0\,, \\ R_3 I_1 - R_4 I_4 = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore \frac{R_3}{R_4} = \underline{\frac{R_1}{R_2}}\,.$$

*24 この抵抗に関する条件式を，ホイートストン・ブリッジの平衡条件などと呼ぶ．

3. 抵抗のみの回路③，電流計と電圧計

図 1 に示すような，電池と抵抗によって組まれた回路において，抵抗に流れる電流とその抵抗の両端に加わる電圧を電流計と電圧計でそれぞれ測定することで，抵抗値を知ることができる．しかし，実際に電流計や電圧計を用いて，電流値や電圧値を測定する場合，電流計や電圧計の内部抵抗が回路に影響を及ぼし，その結果，真の値とは異なった値となることに注意する必要がある．電池，真の抵抗値が R である抵抗，内部抵抗 r_{A} の電流計，および内部抵抗 r_{V} の電圧計をつないだ，図 2 と図 3 のような回路を組み，電流，電圧の測定を行った．導線の抵抗，電池の内部抵抗は無視できるものとして次の問いに答えよ．

(1)　図 2 の回路で得られる電流，電圧の測定結果から求められる抵抗値 R' を求めよ．また，ここで求めた R' と真の抵抗値 R との大小関係を示せ．

(2)　図 3 の回路で得られる電流，電圧の測定結果から求められる抵抗値 R'' を求めよ．また，ここで求めた R'' と真の抵抗値 R との大小関係を示せ．

(3)　真の抵抗値が $100\,\Omega$ である抵抗を用い，図 2 の回路で電流，電圧を測定した場合，測定値はそれぞれ，$30\,\mathrm{mA}$，$2.94\,\mathrm{V}$ であったとすると，電圧計の内部抵抗 r_{V} の値はいくらか．

(4)　前問に引き続き，電流計，電圧計，電池，抵抗の接続を図 3 のように変更して測定した場合，電圧の測定値が $3.03\,\mathrm{V}$ となったとすると，電流計の内部抵抗 r_{A} の値はいくらか．

(5)　図 2 と図 3 のような電流，電圧の測定方法や，(1)，(2) で求めた R'，R'' から，次のようなことがわかる．空欄に適切な語句を入れ文章を完成させよ．なお，**ア**，**イ**，**オ**，**カ**には「等しい」と「異なる」のいずれかを，**ウ**，**キ**には「電流計」と「電圧計」のいずれかを，**エ**，**ク**には「大きい」と「小さい」のいずれかを入れること．

図 2 において，抵抗の両端に加わる電圧と電圧計の読みは $\boxed{\text{ア}}$ が，抵抗を流れる電流と電流計の読みは $\boxed{\text{イ}}$．また，計算で求められた R' は $\boxed{\text{ウ}}$ の内部抵抗が R に比べて十分に $\boxed{\text{エ}}$ 場合，近似的に R と等しくなる．これに対し，図 3 においては，抵抗を流れる電流と電流計の読みは $\boxed{\text{オ}}$ が，抵抗の両端に加わる電圧と電圧計の読みは $\boxed{\text{カ}}$．また，計算で求められた R'' は $\boxed{\text{キ}}$ の内部抵抗が R に比べて十分に $\boxed{\text{ク}}$ 場合，近似的に R と等しくなる．

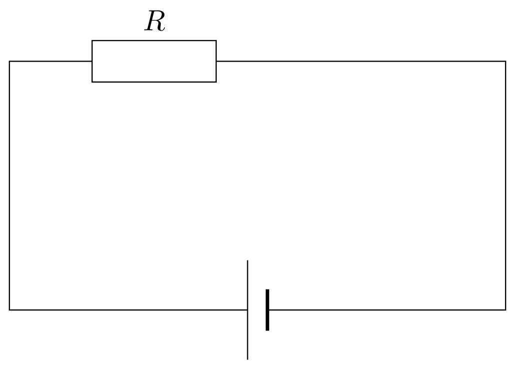


図 1

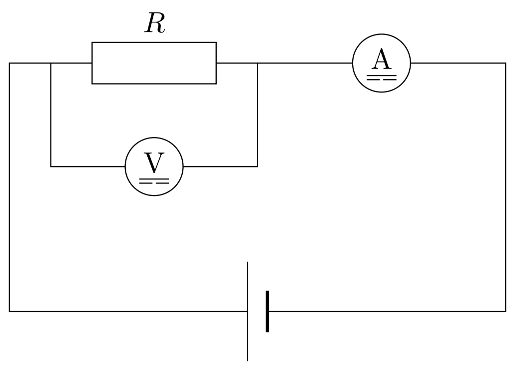


図 2

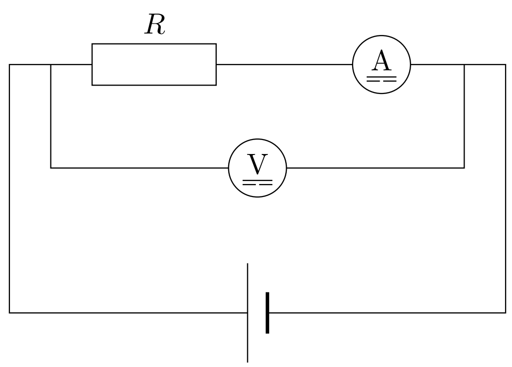


図 3

【メモ】

2007 年愛知教育大より，要点のみ抜粋．電流計と電圧計の接続方法について．物理的な内容は単なる電池と抵抗からなる回路である．

【解答】

(1)　電流計で測定される電流を I_{mes}，電圧計で測定される電圧を V_{mes}，電圧計側に分岐する電流を i とする[*25]．キルヒホッフ則より，

$$\underbrace{r_{\mathrm{V}} i}_{V_{\mathrm{mes}}} - R(I_{\mathrm{mes}} - i) = 0\,.$$

よって，

$$i = \frac{R}{R + r_{\mathrm{V}}} I_{\mathrm{mes}}\,, \quad R' = \frac{V_{\mathrm{mes}}}{I_{\mathrm{mes}}} = \frac{r_{\mathrm{V}} i}{I} = \frac{R r_{\mathrm{V}}}{R + r_{\mathrm{V}}}\,.$$

このとき，

$$R' = \frac{r_{\mathrm{V}}}{\underbrace{R + r_{\mathrm{V}}}_{<1}} R\,, \qquad \therefore R' < R\,.$$

(2)　電流計で測定される電流を I，電圧計で測定される電圧を V，電圧計側に分岐する電流を i とする．キルヒホッフ則より，

$$\underbrace{r_{\mathrm{V}} i}_{V_{\mathrm{mes}}} - R I_{\mathrm{mes}} + r_{\mathrm{A}} I_{\mathrm{mes}} = 0\,.$$

よって，

$$R'' = \frac{V_{\mathrm{mes}}}{I_{\mathrm{mes}}} = R + r_{\mathrm{A}}\,, \qquad \therefore R'' > R\,.$$

(3)　(1) より，

$$R' = \frac{2.94\,\mathrm{V}}{30 \times 10^{-3}\,\mathrm{A}} = \frac{100 r_{\mathrm{V}}}{100 + r_{\mathrm{V}}}\,, \qquad \therefore r_{\mathrm{V}} = 4.9 \times 10^{3}\,\Omega\,.$$

(4)　回路の電池の端子電圧を E とする．図 3 の回路におけるキルヒホッフ則より，

$$E - V_{\mathrm{mes}} = 0\,, \qquad E = V_{\mathrm{mes}} = 3.03\,\mathrm{V}\,.$$

よって，図 2 の回路におけるキルヒホッフ則より，電圧計側に分岐する電流を i とすると，

$$E - \underbrace{r_{\mathrm{V}} i}_{V_{\mathrm{mes}}} - r_{\mathrm{A}} I_{\mathrm{mes}} = 0\,, \qquad \therefore r_{\mathrm{A}} = \frac{E - V_{\mathrm{mes}}}{I_{\mathrm{mes}}} = \frac{(3.03 - 2.94)\,\mathrm{V}}{30 \times 10^{-3}\,\mathrm{A}} = 3\,\Omega\,.$$

[*25] 電圧と電流の測定値には mes の添え字をつけた．測定値から計算される抵抗値には ′ 記号が付いている．

なお，図 2 の回路の別のループを考えて，

$$-R(I_{\mathrm{mes}} - i) + r_{\mathrm{V}} i = 0\,,$$
$$\therefore i = \frac{R}{R + r_{\mathrm{V}}} I_{\mathrm{mes}} = \frac{100\,\Omega}{(4.9 \times 10^3 + 100)\,\Omega} \times 30\,\mathrm{mA} = 0.60\,\mathrm{mA}\,.$$

(5)　**ア**　等しい　**イ**　異なる　**ウ**　電圧計　**エ**　大きい[*26]

　　オ　等しい　**カ**　異なる　**キ**　電流計　**ク**　小さい

[*26] $R' = 1/(1 + R/r_{\mathrm{V}})R$ より．

4. 抵抗のみの回路④，電池の内部抵抗

図 1 のように，起電力 E，内部抵抗 r の電池と，抵抗値 x の抵抗 x をつなぐ．

(1)　この回路に流れる電流を求めよ．

(2)　抵抗 x に加わる電圧を求めよ．

(3)　抵抗 x で消費される電力[*27]を求めよ．

(4)　起電力 $E = 10\,\mathrm{V}$，内部抵抗 $r = 1.0\,\Omega$ の電池につないだ抵抗 x の消費電力が $9.0\,\mathrm{W}$ であった．これを実現できる x の値をすべて求めよ．

(5)　起電力 $E = 10\,\mathrm{V}$，内部抵抗 $r = 1.0\,\Omega$ の電池につないだ抵抗 x の抵抗値 x をさまざまに変えたときに，抵抗 x で消費される電力の最大値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．必要ならば，実数 a，b に対して $(a+b)^2 \geq 4ab$ の関係を用いよ．

電池の内部抵抗と起電力を測定するために，図 2 のような回路を用いて，可変抵抗の抵抗値を変え，電流と電圧を測定した．

(6)　測定に用いる電圧計と電流計をつなぐことによって，電池と可変抵抗を流れる電流の変化を生じさせないためには，図 2 で用いた可変抵抗や電池の内部抵抗に比べて，電圧計と電流計の内部抵抗は非常に大きいか，非常に小さい必要がある．各々の内部抵抗について，「大きい」か「小さい」かで答えよ．

(7)　測定された電圧 V を，起電力 E，内部抵抗 r，測定された電流 I を用いて表せ．ただし，電流計と電圧計をつないだことによる影響はないものとする．

(8)　測定結果を図 3 に示す．このグラフから推定される，電池の起電力と内部抵抗を求めよ．有効数字は 2 桁とする

*27 消費電力は，単位時間あたりに生じるジュール熱のことである．

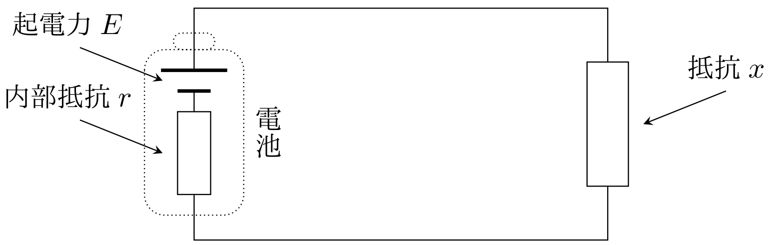

起電力 E
内部抵抗 r
電池
抵抗 x

図 1

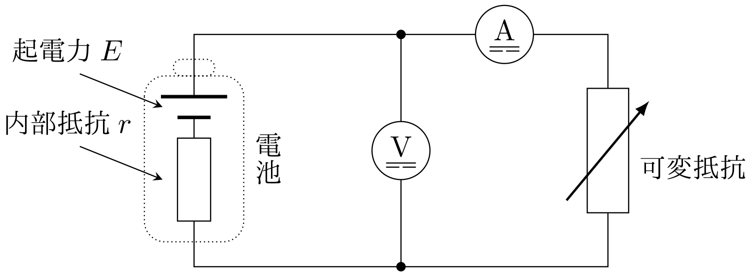

起電力 E
内部抵抗 r
電池
A
V
可変抵抗

図 2

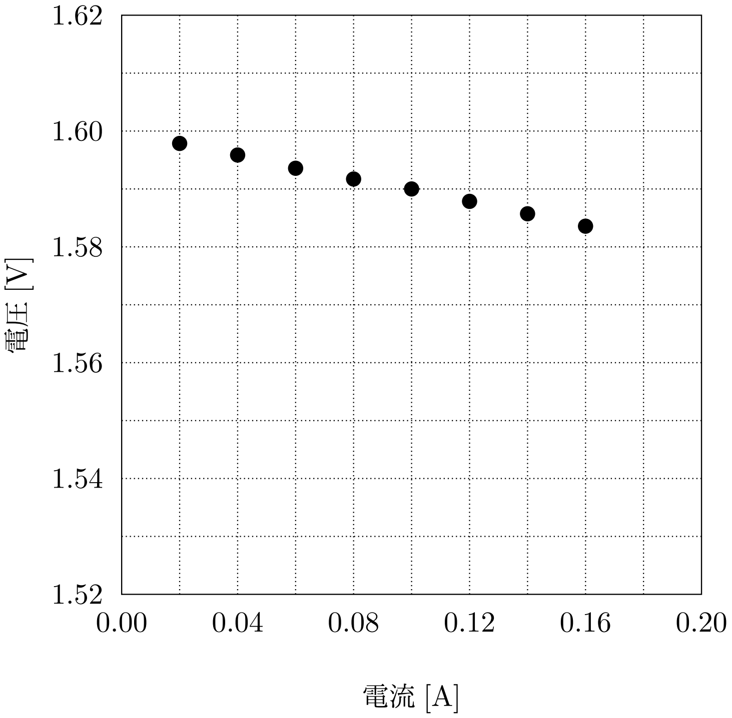

1.62
1.60
1.58
1.56
1.54
1.52
電圧 [V]
0.00
0.04
0.08
0.12
0.16
0.20
電流 [A]

図 3

【メモ】

2008 年金沢大より．電池の内部抵抗について．電流計と電圧計の詳細については 1 つ前の問題で扱っている．物理的な内容は単なる電池と抵抗からなる回路である．

【解答】

(1)　電流を I として，キルヒホッフ則より，

$$E - xI - rI = 0\,, \qquad \therefore I = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{E}{x+r}}\,.$$

(2)　電位降下の大きさを計算して，

$$V_x = xI = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{xE}{x+r}}\,.$$

(3)　抵抗 x の消費電力は，

$$P_x = xI^2 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{xE^2}{(x+r)^2}}\,.$$

(4)　P_x に与えられた数値を代入して，

$$9.0 = \frac{10^2 \cdot x}{(x+1.0)^2}\,, \qquad \therefore x = \underset{\sim\sim\sim}{9.0\,\Omega}\,,\quad x = \frac{1}{9}\,\Omega \fallingdotseq \underset{\sim\sim\sim}{0.11\,\Omega}\,.$$

(5)　(3) より[*28]，

$$P_x = \frac{E^2}{\left(\sqrt{x} + \dfrac{r}{\sqrt{x}}\right)^2} \leq \frac{E^2}{4r} = \underset{\sim\sim\sim}{25\,\mathrm{W}}\,.$$

また，等号成立時 $\sqrt{x} + \dfrac{r}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{r}$ を考えて，

$$x = \underset{\sim\sim\sim}{1.0\,\Omega}\,.$$

(6)　電圧計に流れる電流を小さくするために，電圧計の内部抵抗は非常に 大きい 必要がある．一方，電流計での電位降下を小さくするために，電流計の内部抵抗は非常に 小さい 必要がある．

[*28] 関数の最大最小を議論しても良い．P_x を x で微分して，

$$\frac{dP_x}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{x}{(x+r)^2}E^2\right\} = \frac{r-x}{(x+r)^3}E^2$$

より，$x = r$ で極大値をとり，$x > r$ において単調減少であることから，$x = r$ で最大値 $\dfrac{E^2}{4r}$ をとることがわかる．

(7)　キルヒホッフ則より，

$$V = E - rI\,.$$

(8)　測定結果を直線で結んで，その電圧側の切片より，

$$E = 1.60\,\mathrm{V}\,.$$

傾きより，

$$r = 0.10\,\Omega\,.$$

5. コンデンサを含む基本的な回路の計算ドリル

図のように，電池 E（起電力 E），電気抵抗 R（抵抗値 R），コンデンサ C_1（容量 C），C_2（容量 $2C$），C_3（容量 C），スイッチ S_1，S_2 からなる電気回路を考える．はじめ，すべてのスイッチは開かれており，すべてのコンデンサは帯電していない．C_1，C_2，C_3 の左側の極板に蓄えられる電気量をそれぞれ Q_1，Q_2，Q_3，R に流れる電流を I と記す．

I　S_1 のみを閉じた回路を考える．

(1)　キルヒホッフ則を立式せよ．

(2)　孤立部分における電荷保存則を立式せよ．

(3)　閉じた直後を考える．I を求めよ．

(4)　十分時間経過した後の状態を考える．Q_1，Q_2，Q_3，I を求めよ．

(5)　C_1 に蓄えられた電気量が前問のちょうど半分の瞬間を考える．I を求めよ．

(6)　R に流れる電流が $\dfrac{E}{4R}$ の瞬間を考える．Q_1，Q_2 を求めよ．

(7)　十分時間経過した後の状態を考える．抵抗で生じたジュール熱 J を求めよ．

II　I に引き続き，S_1 を開いてから S_2 を閉じ，十分時間経過した後の回路の状態について考える．

(1)　キルヒホッフ則を立式せよ．

(2)　孤立部分における電荷保存則を立式せよ．

(3)　Q_1，Q_2，Q_3 を求めよ．

III　II に引き続き，S_2 は閉じたまま，S_1 を閉じた回路を考える．

(1)　独立な 2 つのキルヒホッフ則を立式せよ．

(2)　孤立部分における電荷保存則を立式せよ．

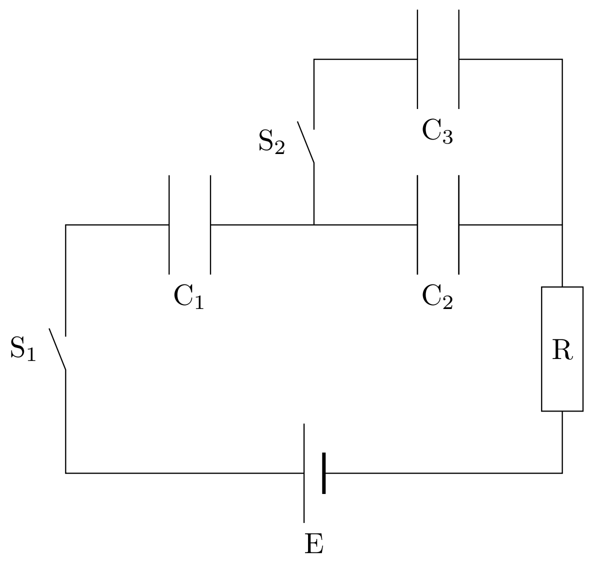
(3)　閉じた直後を考える．I を求めよ．

(4)　十分時間経過した後の状態を考える．Q_1，Q_2，Q_3，I を求めよ．

(5)　C_1 に蓄えられた電気量が前問のちょうど $\dfrac{1}{3}$ 倍の瞬間を考える．Q_2，Q_3，I を求めよ．

(6)　R に流れる電流が $\dfrac{E}{3R}$ の瞬間を考える．Q_1，Q_2，Q_3 を求めよ．

(7)　2 回目に S_1 を閉じてから十分時間経過するまでに，抵抗で生じたジュール熱 J を求めよ．


C$_3$
S$_2$
C$_1$
C$_2$
S$_1$
R
E

【メモ】

電気回路は，キルヒホッフ則，電荷保存則，回路素子の性質を考えれば，必ず，状態は一意に決定される．

【解答】

I (1)　キルヒホッフ則[*29]より，

$$\underset{\sim\sim\sim}{E - \frac{Q_1}{C} - \frac{Q_2}{2C} - RI = 0}\,.$$

(2)　C_1 の右側極板と C_2 の左側極板，C_3 の右側の極板が孤立していることに注目して，電荷保存則より[*30]，

$$\begin{cases} -Q_1 + Q_2 = 0\,, \\ Q_3 = 0\,. \end{cases}$$

(3)　直後では $Q_1 = Q_2 = 0$ ゆえ，キルヒホッフ則より，

$$E - RI = 0\,, \qquad \therefore I = \frac{E}{R}\,.$$

(4)　十分時間経過ではコンデンサの性質より $I = 0$ ゆえ[*31]，キルヒホッフ則・電荷保存則より，

$$\begin{cases} E - \dfrac{Q_1}{C} - \dfrac{Q_2}{2C} = 0\,, \\ -Q_1 + Q_2 = 0\,, \\ Q_3 = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore Q_1 = \frac{2}{3}CE\,,\quad Q_2 = \frac{2}{3}CE\,,\quad Q_3 = 0\,.$$

(5)　$Q_1 = \dfrac{1}{3}CE$ ゆえ，キルヒホッフ則・電荷保存則より，

$$\begin{cases} E - \dfrac{CE/3}{C} - \dfrac{Q_2}{2C} - RI = 0\,, \\ -\dfrac{1}{3}CE + Q_2 = 0\,, \\ Q_3 = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore I = \frac{E}{2R}\,.$$

[*29] キルヒホッフ則の本来意味するところは電位の一意性であるため，どのように表現（解釈）するかについてはいくつかある．最初分かり易いのは電位差を 2 通りで表してそれらが等しいことを言うことだが，個人的に好きなのは 1 周の電位の上昇・降下を計算して，それらの合計が 0 とするもの．どちらでもよいし，前者の方が移項の手間もないのでおすすめだが，個人的には後者が好きなので，ここでは（おそらく今後も）後者の表現を採用する．

[*30] コンデンサの電荷は必ず正負の対で現れる．

[*31] 今，$I = \dfrac{dQ_1}{dt} = \dfrac{dQ_2}{dt}$ である．

(6)　$I = \dfrac{E}{4R}$ ゆえ，キルヒホッフ則・電荷保存則より，

$$\begin{cases} E - \dfrac{Q_1}{C} - \dfrac{Q_2}{2C} - R \cdot \dfrac{E}{4R} = 0\,, \\ -Q_1 + Q_2 = 0\,, \\ Q_3 = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore Q_1 = \underline{\frac{1}{2}CE}\,,\quad Q_2 = \underline{\frac{1}{2}CE}\,.$$

(7)　コンデンサの蓄える静電エネルギーの変化量 $\mathit{\Delta} U$ は，

$$\mathit{\Delta} U = \left(\frac{1}{2}\frac{{Q_1}^2}{C} + \frac{1}{2}\frac{{Q_2}^2}{2C}\right) - \left(\frac{1}{2}\frac{0^2}{C} + \frac{1}{2}\frac{0^2}{2C}\right) = \frac{1}{3}CE^2\,.$$

この間，電池のした仕事 W は，

$$W = Q_1 E = \frac{2}{3}CE^2\,.$$

よって，回路のエネルギー収支を考えて[*32*33]，

$$\mathit{\Delta} U + J = W\,, \qquad J = \underline{\frac{1}{3}CE^2}$$

II (1)　キルヒホッフ則より，

$$\underline{-\frac{Q_2}{2C} + \frac{Q_3}{C} = 0}\,.$$

(2)　$\mathrm{C_2}$ の左側極板と $\mathrm{C_3}$ の左側極板，$\mathrm{C_1}$ の右側の極板が孤立していることに注目して，電荷保存則より，

$$\begin{cases} \underline{-Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0}\,, \\ \underline{Q_1 = \dfrac{2}{3}CE}\,. \end{cases}$$

(3)　キルヒホッフ則・電荷保存則より，

$$\begin{cases} -\dfrac{Q_2}{2C} + \dfrac{Q_3}{C} = 0\,, \\ -Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0\,, \\ Q_1 = \dfrac{2}{3}CE\,. \end{cases} \qquad \therefore Q_1 = \underline{\frac{2}{3}CE}\,,\quad Q_2 = \underline{\frac{4}{9}CE}\,,\quad Q_3 = \underline{\frac{2}{9}CE}\,.$$

III (1)　キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} \underline{E - \dfrac{Q_1}{C} - \dfrac{Q_2}{2C} - RI = 0}\,, \\ \underline{-\dfrac{Q_2}{2C} + \dfrac{Q_3}{C} = 0}\,. \end{cases}$$

*32 電池のした仕事（電池から供給されたエネルギー）の一部がコンデンサの静電エネルギーとして蓄えられ，残りがその過程で発生したジュール熱として消費される．

*33 設問を通してわかるように I は一定の値を取らないので，ジュール熱の計算はエネルギー収支から逆算する他ない（I を時刻 t の関数として求めて積分しても良いが（実際にできないわけではない），おすすめはしない）．

(2)　C_2 の左側極板と C_3 の左側極板と C_1 の右側の極板の部分が孤立していることに注目して，電荷保存則より，

$$-Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0\,.$$

(3)　$Q_1 = \dfrac{2}{3}CE$，$Q_2 = \dfrac{4}{9}CE$，$Q_3 = \dfrac{2}{9}CE$ ゆえ，キルヒホッフ則より，

$$E - \frac{Q_1}{C} - \frac{Q_2}{2C} - RI = 0\,, \qquad \therefore I = \frac{E}{9R}\,.$$

(4)　各電荷が一定値を取り，$I = 0$[*34]ゆえ，キルヒホッフ則・電荷保存則より，

$$\begin{cases} E - \dfrac{Q_1}{C} - \dfrac{Q_2}{2C} = 0\,, \\ -\dfrac{Q_2}{2C} + \dfrac{Q_3}{C} = 0\,, \\ -Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0\,. \end{cases} \qquad \therefore Q_1 = \frac{3}{4}CE\,,\quad Q_2 = \frac{1}{2}CE\,,\quad Q_3 = \frac{1}{4}CE\,.$$

(5)　$Q_1 = \dfrac{1}{4}CE$ ゆえ，キルヒホッフ則・電荷保存則より，

$$\begin{cases} E - \dfrac{CE/4}{C} - \dfrac{Q_2}{2C} - RI = 0\,, \\ -\dfrac{Q_2}{2C} + \dfrac{Q_3}{C} = 0\,, \\ -\dfrac{1}{4}CE + Q_2 + Q_3 = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore Q_2 = \frac{1}{6}CE\,,\quad Q_3 = \frac{1}{12}CE\,,\quad I = \frac{2E}{3R}\,.$$

(6)　$I = \dfrac{E}{3R}$ ゆえ，キルヒホッフ則・電荷保存則より，

$$\begin{cases} E - \dfrac{Q_1}{C} - \dfrac{Q_2}{2C} - R\cdot\dfrac{E}{3R} = 0\,, \\ -\dfrac{Q_2}{2C} + \dfrac{Q_3}{C} = 0\,, \\ -Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0\,, \end{cases} \qquad \therefore Q_1 = \frac{1}{2}CE\,,\quad Q_3 = \frac{1}{3}CE\,,\quad Q_3 = \frac{1}{6}CE\,.$$

(7)　II での十分時間経過でのコンデンサの静電エネルギーを U_2，III での十分時間経過でのコンデンサの静電エネルギーを U_3 とする．コンデンサの蓄える静電エネルギーの変化量 $\mathit{\Delta} U$ は，

$$\mathit{\Delta} U = U_3 - U_2 = \frac{3}{8}CE^2 - \frac{8}{27}CE^2 = \frac{17}{216}CE^2\,.$$

この間，電池のした仕事 W は，

$$W = \mathit{\Delta} Q_1 E = \frac{1}{12}CE^2\,.$$

よって，回路のエネルギー収支を考えて[*35]，

$$\mathit{\Delta} U + J = W\,, \qquad J = \frac{1}{216}CE^2$$

[*34] 今，$I = \dfrac{dQ_1}{dt} = \dfrac{d}{dt}(Q_2 + Q_3)$ である（2 つ目の等号は電荷保存則に由来する）．

[*35] $216 = 12 \times 18$ である．

6. 過渡現象（微分方程式を学ぶ）

図のように，起電力 E の電池（内部抵抗無視），抵抗値 R の抵抗，容量 C のコンデンサ，スイッチからなる電気回路を考える．はじめ，スイッチは開かれており，コンデンサは帯電していない．コンデンサの左側極板に蓄えられる電気量を Q，R に流れる電流を I と記す．なお，I は図の矢印の向きを正とする．

(1)　キルヒホッフ則を立式せよ．

(2)　コンデンサの極板上の電荷に注目して，I を Q を用いて表せ．

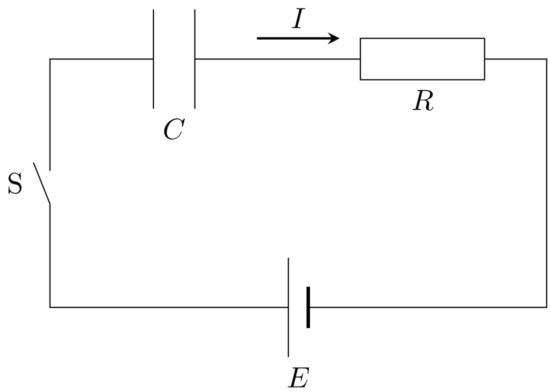
(3)　キルヒホッフ則の微分方程式を解くと，電荷 Q は時刻 t の関数として

$$Q(t) = \alpha\left(1 - e^{-\beta t}\right)$$

と求まる．α，β を求めよ．

(4)　コンデンサの充電が完了するまでに抵抗で生じたジュール熱 J を，回路のエネルギー収支から逆算して求めよ．

(5)　コンデンサの充電が完了するまでに抵抗で生じたジュール熱 J を，I から直接計算し，前問の結果と整合していることを確認せよ．



【メモ】

微分方程式の型を学ぶ.

【解答】

(1)　キルヒホッフ則より,

$$E - \frac{Q}{C} - RI = 0\,.$$

(2)　コンデンサ極板上での電荷に注目すれば，電流の定義より,

$$I = \frac{dQ}{dt}\,.$$

(3)　与えられた Q を時刻 t で微分して,

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha\beta e^{-\beta t}\,.$$

これをキルヒホッフ則に代入し,

$$\alpha\left(\frac{1}{C} - R\beta\right)e^{-\beta t} + \left(E - \frac{\alpha}{C}\right) = 0\,.$$

これが任意の時刻 t で成立するためには,

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{1}{C} - R\beta\right) = 0\,, \\ E - \dfrac{\alpha}{C} = 0\,, \end{cases} \qquad \alpha = CE\,,\quad \beta = \frac{1}{RC}\,.$$

(4)　静電エネルギーの変化量 $\varDelta U$ は,

$$\varDelta U = \frac{1}{2}\frac{(CE)^2}{C} = \frac{1}{2}CE^2\,.$$

この間，電池がした仕事 W は,

$$W = \varDelta QE = CE^2\,.$$

よって，回路のエネルギー収支を考えて,

$$\varDelta U + J == W\,, \qquad \therefore J = \frac{1}{2}CE^2\,.$$

(5)　回路に流れる電流 I は，Q の式より,

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\,.$$

よって，ジュール熱の定義より，

$$J = \int_0^\infty RI^2\,dt = \int_0^\infty \frac{E^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}}\,dt = \left[-\frac{E^2}{R}\frac{RC}{2}e^{-\frac{2t}{RC}}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}CE^2 .$$

【参考】微分方程式を解く（なるべくできた方が良い）

キルヒホッフ則より，A，B を積分定数として[*36][*37]，

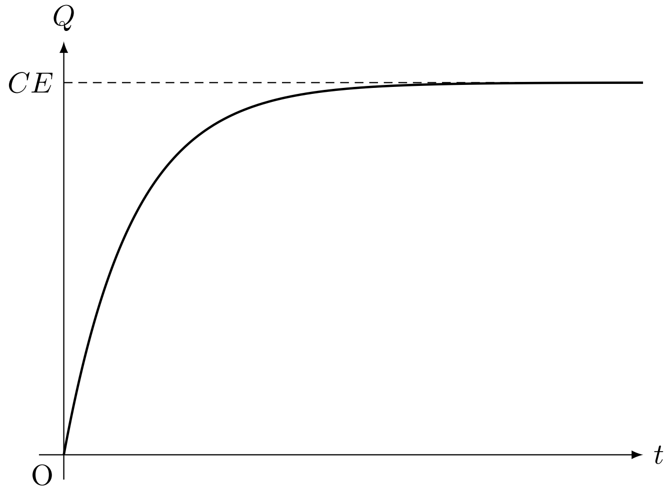
$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= -\frac{1}{RC}(Q - CE) \\ \int \frac{1}{Q-CE}\frac{dQ}{dt}\,dt &= -\frac{1}{RC}\int dt \\ \log|Q(t) - CE| &= -\frac{1}{RC}t + A \\ \therefore Q(t) &= CE + Be^{-\frac{t}{RC}} . \end{aligned}$$

ここで，初期条件 $Q(0) = 0$ より，

$$Q(0) = CE + B = 0\,, \qquad \therefore B = -CE\,.$$

よって，

$$Q(t) = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\,, \qquad \alpha = CE\,,\ \ \beta = \frac{1}{RC}\,.$$



$Q - t$ グラフ

[*36] $B = e^A$ である．

[*37] 積分定数は初期条件 $Q(0)$，または $I(0)$ から決まる．2 階微分を含む微分方程式は初期条件が 2 つ必要である（今回は 1 階微分までなので初期条件は 1 つ（Q に関するもの）で十分である）．

7. 例外的な素子①（電球）

電池 E（起電力 10 V，内部抵抗無視），抵抗 R（抵抗値 10 Ω），コンデンサ C（静電容量 1.0 μF），および図 3 に示す電流・電圧特性を持つ豆電球 A を用いて回路を作成する．C ははじめ帯電していなく，導線の抵抗は無視できる．

I　図 1 の回路を考える．

(1)　豆電球に流れる電流の大きさを求めよ．

(2)　図 1 の R と A 直列接続を並列接続に繋ぎ変えた．このとき，豆電球に流れる電流の大きさを小数第 2 位まで求めよ．

II　図 2 の回路を考える．

(1)　回路に電流が流れ始めた直後，豆電球に流れる電流の大きさを求めよ．

(2)　豆電球に流れる電流の大きさが 0.45 A のとき，コンデンサに蓄えられている電荷を求めよ．

(3)　十分時間が経過したとき，A に流れる電流の大きさは一定となった．このとき，豆電球に流れる電流の大きさ，およびコンデンサに蓄えられている電荷をそれぞれ求めよ．

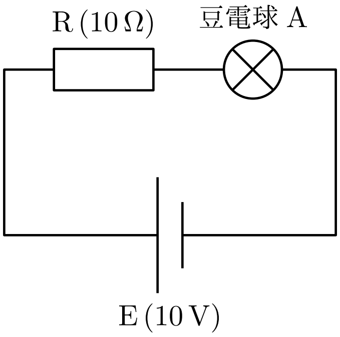

R (10 Ω)
豆電球 A
E (10 V)

図 1

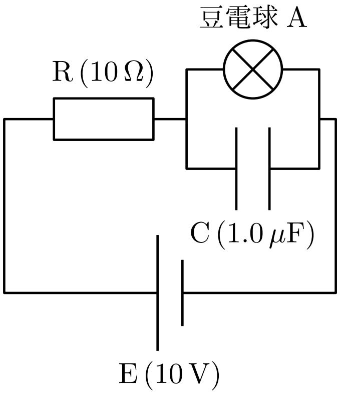

豆電球 A
R (10 Ω)
C (1.0 μF)
E (10 V)

図 2

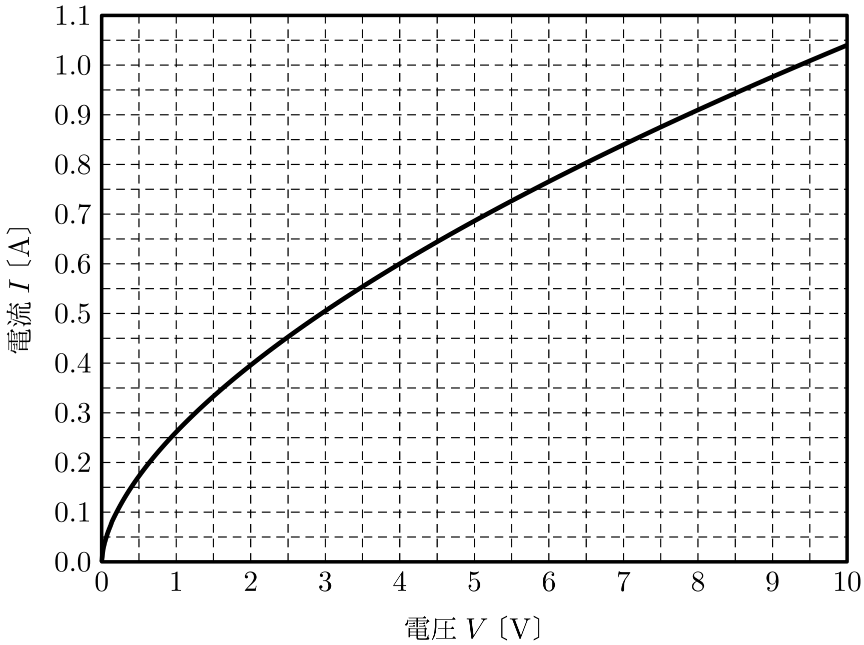

1.1
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
電流 I〔A〕
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
電圧 V〔V〕

図 3

【メモ】

例外素子である電球（非線形抵抗）の扱い．特性曲線が与えられた場合，グラフ上で連立方程式（キルヒホッフ則，電荷保存則，素子の性質）を解く．

【解答】

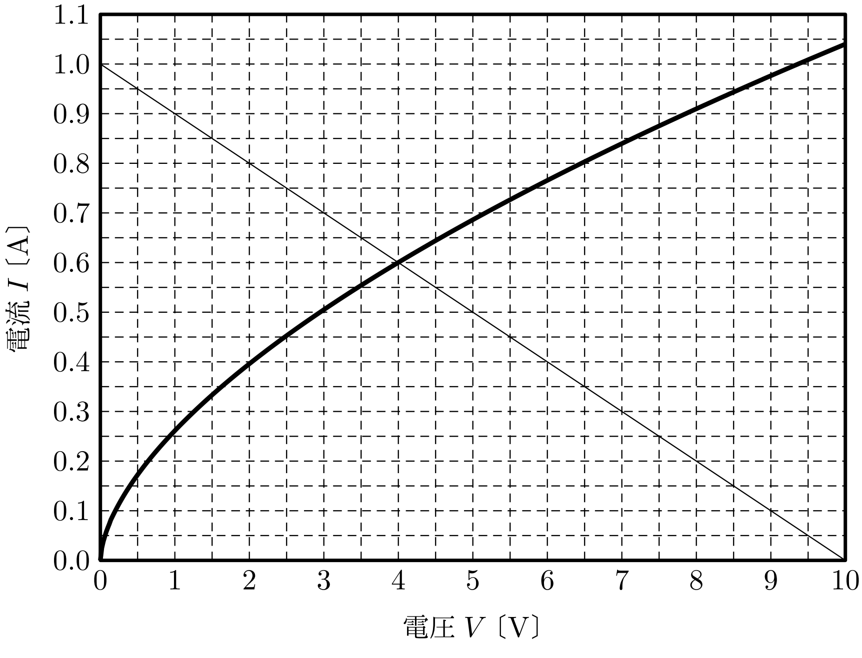
I　I，II において，A に流れる電流を I，電位降下を V とする．

(1)　キルヒホッフの法則より，

$$10 - 10 \times I - V = 0\,.$$

この方程式と特性曲線の解を見て（以下の図を参照），

$$I \fallingdotseq \underset{\sim\sim\sim}{0.60\,\mathrm{A}}\,.$$



(2)　キルヒホッフの法則より，$V = 10\,\mathrm{V}$．よって，特性曲線より，

$$I \fallingdotseq \underset{\sim\sim\sim}{1.04\,\mathrm{A}}\,.$$

II　キルヒホッフの法則・電荷保存則より，

$$\begin{cases} 10 - 10 \times I_{\mathrm{tot}} - V = 0\,, \\ 10 - 10 \times I_{\mathrm{tot}} - 1.0 \times 10^{6} \times Q = 0\,, \\ I_{\mathrm{tot}} = I + I_{\mathrm{C}}\,. \end{cases}$$

(1)　$Q = 0\,\mathrm{C}$ より，$V = 0\,\mathrm{V}$．よって，特性曲線より，

$$I = \underset{\sim\sim}{0\,\mathrm{A}}\,.$$

(2)　$I = 0.45\,\mathrm{A}$ より，特性曲線から $V = 2.5\,\mathrm{V}$．よって，キルヒホッフの法則より，

$$Q = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{2.5 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}}\,.$$

(3)　コンデンサの素子の性質から電荷 Q は一定値，$I_{\mathrm{C}} = 0\,\mathrm{C}$ であるから，キルヒホッフの法則より，

$$\begin{cases} 10 - 10 \times I - V = 0\,, \\ 10 - 10 \times I - 1.0 \times 10^{6} \times Q = 0\,. \end{cases}$$

よって，特性曲線より，

$$I \fallingdotseq \underset{\sim\sim\sim}{0.60\,\mathrm{A}}\,,\quad Q \fallingdotseq \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{4.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}}\,.$$

8. ダイオード

次の文章を読み，$\boxed{}$ に適した式，または数値を解答せよ．なお，$\boxed{\boxed{}}$ は，すでに $\boxed{}$ で与えられたものと同じものを表す．

ダイオードは半導体を用いた電子部品で，電流を一方向にのみ流し，逆向きには流さない性質を持っている．電流が流れる場合も，通常の抵抗とは性質が異なっている．いま，電流と電圧の関係が図 1（b）のグラフで表されるダイオードを考える．このダイオードでは，電圧 V_{D}（図 1（a）の点 A の電位が点 B の電位より高い場合を正とする）がある正の値 v より高いときにのみ，電流 I_{D} は比例関係にあり，r を正の定数として $\varDelta I_{\mathrm{D}} = \dfrac{\varDelta V_{\mathrm{D}}}{r}$ と表されるものとする．

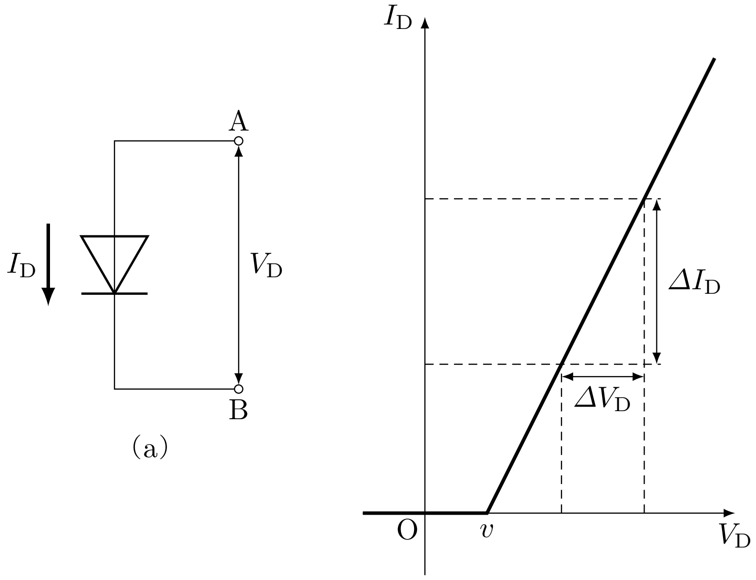
(1)　ダイオードに加える電圧 V_{D} が v より高いとき，流れる電流 I_{D} は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2)　図 2 のように，電池，抵抗，ダイオードおよびスイッチを接続した回路がある．電池の起電力は E であり，その内部抵抗は無視できるものとする．抵抗の抵抗値は R である．スイッチを閉じたとき，E がある値 $\boxed{\text{ロ}}$ より高い場合にのみ回路に電流が流れ，そのときの電流は $\boxed{\text{ハ}}$ である．

(3)　次に，図 2 の回路にコンデンサーを加えて図 3 のような回路とした．コンデンサーの電気容量は C である．最初にスイッチが開かれていたときにコンデンサーに電荷は蓄えられていなかったものとする．スイッチを閉じてから十分に時間が経過した．

(a)　$E <$ $\boxed{\boxed{\text{ロ}}}$ であるとき，ダイオードにかかる電圧は $\boxed{\text{ニ}}$，コンデンサーに蓄えられている電荷は $\boxed{\text{ホ}}$，ダイオードで消費されている電力は $\boxed{\text{ヘ}}$ である．

(b)　$E >$ $\boxed{\boxed{\text{ロ}}}$ であるとき，ダイオードにかかる電圧は $\boxed{\text{ト}}$，コンデンサーに蓄えられている電荷は $\boxed{\text{チ}}$，ダイオードで消費されている電力は $\boxed{\text{リ}}$ である．


A
B
I_{D}
V_{D}
(a)
I_{D}
ΔI_{D}
ΔV_{D}
O
v
V_{D}

(b)

図 1

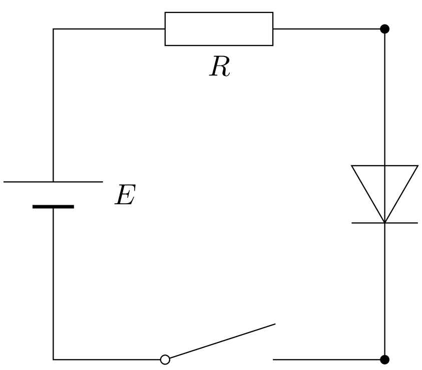

R
E

図 2

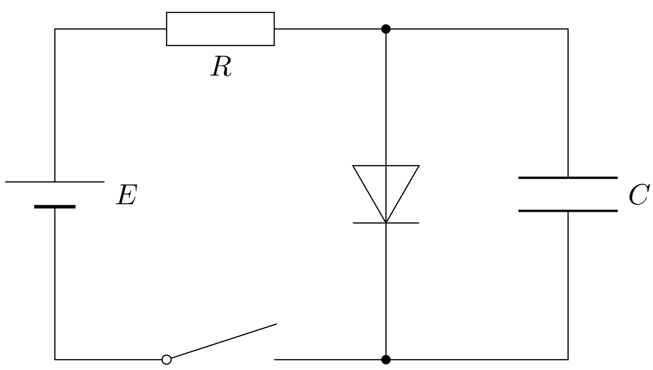

R
E
C

図 3

【メモ】

・電気回路の状態は，以下の 3 式で決定する．

$$\begin{cases} \text{キルヒホッフの法則} \\ \text{電荷保存則} \\ \text{素子の性質} \end{cases}$$

・例外素子の扱いは，(i) 素子の性質をグラフで与えるか (ii) 式で与えるかのどちらかで，(i) の場合はキルヒホッフ則，電荷保存則とをグラフ上で連立して解き，(ii) の場合はキルヒホッフ則，電荷保存則に与えられた素子の性質を代入するだけである．

【解答】

(1)　特性曲線より，

$$I_{\mathrm{D}} = \frac{\Delta I_{\mathrm{D}}}{\Delta V_{\mathrm{D}}}(V_{\mathrm{D}} - v) = \underbrace{\frac{V_{\mathrm{D}} - v}{r}}_{\text{イ}}\,.$$

なお，$V_{\mathrm{D}} \leq v$ も合わせれば，

$$I_{\mathrm{D}} = \begin{cases} 0 & (V_{\mathrm{D}} \leq v)\,, \\ \dfrac{V_{\mathrm{D}} - v}{r} & (V_{\mathrm{D}} > v)\,. \end{cases}$$

(2)　キルヒホッフ則，および素子の性質より，

$$\begin{cases} E - RI_{\mathrm{D}} - V_{\mathrm{D}} = 0\,, \\ I_{\mathrm{D}} = \begin{cases} 0 & (V_{\mathrm{D}} \leq v)\,, \\ \dfrac{V_{\mathrm{D}} - v}{r} & (V_{\mathrm{D}} > v)\,. \end{cases} \end{cases}$$

ここで，$V_{\mathrm{D}} > v$ の下では $I_{\mathrm{D}} = \dfrac{V_{\mathrm{D}} - v}{r} \neq 0$ より，

$$E - \frac{R}{r}(V_{\mathrm{D}} - v) - V_{\mathrm{D}} = 0\,, \qquad \therefore V_{\mathrm{D}} = \frac{rE + Rv}{R + r}$$

であり，前提である $V_{\mathrm{D}} > v$ より，

$$V_{\mathrm{D}} = \frac{rE + Rv}{R + r} > v\,, \qquad \therefore E > \underbrace{v}_{\text{ロ}}\,.$$

このとき，回路に流れる電流はキルヒホッフ則，および素子の性質より，

$$I_{\mathrm{D}} = \frac{(rE + Rv)/(R + r) - v}{r} = \underbrace{\frac{E - v}{R + r}}_{\text{ハ}}\,.$$

(3)　キルヒホッフ則，および素子の性質より[*38]，

$$
\begin{cases}
E - RI_{\mathrm{D}} - V_{\mathrm{D}} = 0\,, \\
E - RI_{\mathrm{D}} - \dfrac{Q}{C} = 0\,, \\
I_{\mathrm{D}} = \begin{cases} 0 & (V_{\mathrm{D}} \leq v)\,, \\ \dfrac{V_{\mathrm{D}} - v}{r} & (V_{\mathrm{D}} > v)\,. \end{cases}
\end{cases}
$$

キルヒホッフ則からダイオード側は問 2 と同じ式となっているため，$E < v$ では電流は流れず $I_{\mathrm{D}} = 0$ となる．この下でキルヒホッフ則を考えて，

$$
\begin{cases}
E - 0 - V_{\mathrm{D}} = 0\,, \\
E - 0 - \dfrac{Q}{C} = 0\,,
\end{cases}
\qquad \therefore V_{\mathrm{D}} = \underbrace{E}_{\text{ニ}}\,, \quad Q = \underbrace{CE}_{\text{ホ}}\,, \quad P = I_{\mathrm{D}} V_{\mathrm{D}} = \underbrace{0}_{\text{ヘ}}\,.
$$

同様に $E > v$ では $I_{\mathrm{D}} = \dfrac{V_{\mathrm{D}} - v}{r}$ となり，この下でキルヒホッフ則を考えて，

$$
\begin{cases}
E - \dfrac{R}{r}(V_{\mathrm{D}} - v) - V_{\mathrm{D}} = 0\,, \\
E - \dfrac{R}{r}(V_{\mathrm{D}} - v) - \dfrac{Q}{C} = 0\,,
\end{cases}
\qquad \therefore V_{\mathrm{D}} = \underbrace{\frac{rE + Rv}{R + r}}_{\text{ト}}\,, \quad Q = \underbrace{\frac{rE + Rv}{R + r}C}_{\text{チ}}\,,
$$

$$
P = I_{\mathrm{D}} V_{\mathrm{D}} = \underbrace{\frac{(E - v)(rE + Rv)}{(R + r)^2}}_{\text{リ}}\,.
$$

[*38] 十分時間経過よりコンデンサに流れ込む電流は 0 となり抵抗を流れる電流はダイオードに流れ込む I_{D} だけとなる．

9. 箔検電器

箔検電器の箔の開きに関する考察について，定性的な検討と定量的な検討を行う．

I　ここでは，定性的に考えて/予想してみよう．

① 極板 P に手を触れる（図 1 のように接地することに相当）．この状態でガラス棒を近付ける．

② ガラス棒の状態を維持したまま，極板 P から手を離す．

③ ガラス棒を箔検電器から遠ざける．

(1)　（間違えてもよい）定性的に考えることで，各操作に対応した箔の開きの変化を予想せよ．

II　続いて，上記の箔の開きの変化を定量的に論じてみよう．この一連の過程における各操作は，次のように解釈することができる．

① 箔検電器の極板とガラス棒，箔と地面がコンデンサを形成し，それぞれの静電容量を C_0，C_1，ガラス棒の帯電量を Q_0，箔の帯電量を Q_1 とする（図 2 − 1）．

② 操作①のときと同様に箔検電器の極板とガラス棒，箔と地面がコンデンサを形成している（図 2 − 2）．

③ 箔検電器の極板と地面，箔と地面がコンデンサを形成し，それぞれの静電容量を C_2，C_1 とする（図 2 − 3）．

(1)　操作①について，Q_1 を求め，箔の様子について述べよ．

(2)　操作②について，Q_1 を求め，箔の様子について述べよ．

(3)　操作③について，Q_1 を求め，箔の様子について述べよ．ただし，C_2 は C_1 に比べて十分小さいことが知られていて，$\dfrac{C_2}{C_1} \fallingdotseq 0$ と近似してよい．

(4)　一連の操作について，箔の様子が定性的な議論と一致していたかどうかを比較してみよ．

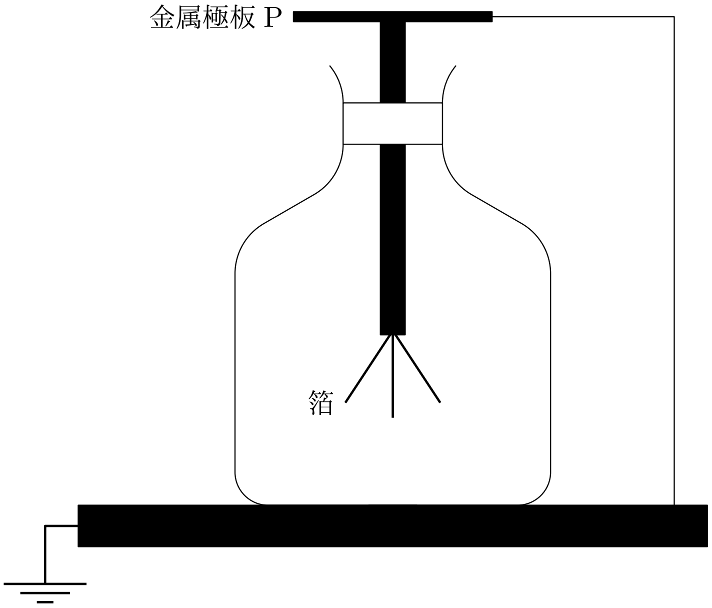


図 1

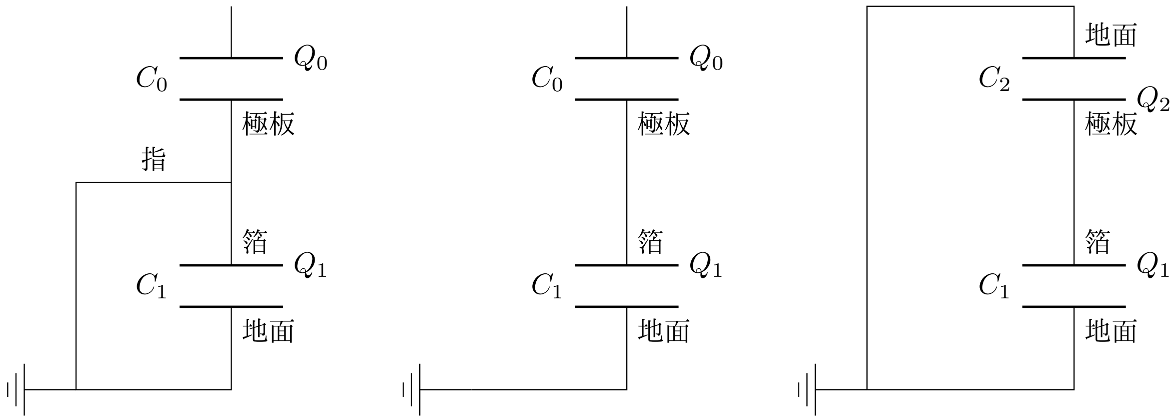


図 2 − 1　　図 2 − 2　　図 2 − 3

【解答】

I (1)　略.

II (1)　キルヒホッフ則より,

$$0 = \frac{Q_1}{C_1}\,, \qquad \therefore Q_1 = 0\,.$$

すなわち，箔は帯電しておらず，箔は閉じたまま である．また，静電誘導によって，極板には $-Q_0$ の電荷が帯電している．

(2)　ガラス棒と極板がコンデンサを形成していることから極板には $-Q_0$ の電荷が帯電しており，電荷保存則から箔の帯電量は 0 と決まる．したがって，箔は閉じたまま である．

(3)　キルヒホッフ則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{Q_1}{C_1} - \dfrac{Q_2}{C_2}\,, \\ Q_1 + Q_2 = -Q_0\,, \end{cases} \qquad \therefore Q_1 = -\frac{C_1}{C_1 + C_2}Q_0\,,\ \ Q_2 = -\frac{C_2}{C_1 + C_2}Q_0\,.$$

ここで，極板と地面からなるコンデンサの容量 C_2 は，箔と地面からなるコンデンサの容量 C_1 に比べると十分に小さいことが知られており，$C_1 \gg C_2$ とすれば，

$$Q_1 = -\frac{1}{1 + C_2/C_1}Q_0 \fallingdotseq -Q_0\,,$$
$$Q_2 = -\frac{C_2/C_1}{1 + C_2/C_1}Q_0 \fallingdotseq 0\,.$$

よって，箔の帯電量は $-Q_0$ となり，箔は開く．

4

電磁気後半

第 4 部電磁気後半では，電磁気分野のうち磁気分野を主に扱う．第 1 章では，荷電粒子の運動（磁場の含んだ力学），電流が磁場から受ける力，電流の作る磁場の決定を扱う．目新しい内容は電流の作る磁場の決定だけであり，はじめの 2 つは基本的には力学と電磁気の内容に磁場が加わっただけである．第 2 章では，電磁誘導を扱う．電磁誘導は，静磁場中を導体が動くことでその導体に誘導起電力が生じるタイプと，磁場が時間変化することで回路 1 周に誘導起電力が生じるタイプの 2 つがある．誘導起電力の決定としては，前者の場合は $vB\ell$ の公式，ファラデイ則ともに計算が可能だが，後者はファラデイ則一択となる．また，電磁誘導は力学系と回路系の間のエネルギーの変換が本質であるということを，問題を通して学習する．第 3 章では，コイルを含んだ電気回路と，交流回路について扱う．時間平均や実効値の定義についてはここで学習する．なお，コイルを含んでも，電源が交流電源に代わっても，立てるべき物理法則は変わらないということを意識したい．

§4.1 静磁場

この章では，静磁場中の荷電粒子，電流が磁場から受ける力，および電流の作る磁場について扱う．荷電粒子の運動については磁場のあるだけの力学であり，等速円運動の定石が身についていれば新しい内容はほとんどない．電流が磁場から受ける力は，簡単な力学と電気回路の知識を要する．電流の作る磁場については，3 つの公式を暗記する．

■簡単なまとめ

- ローレンツ力：$f = qvB$

  q は荷電粒子の電荷，v は荷電粒子の速さ，B は磁束密度の大きさである．v と B が直交していないときは，直交成分のみを取り出して計算する．向きはフレミング左手則で決定する．

- アンペール力：$F = IB\ell$

  I は流れる電流の値，I は電流の流れる領域の長さ，B は磁束密度の大きさである．I と B が直交していないときは，直交成分のみを取り出して計算する．向きはフレミング左手則で決定する．なお，アンペール力は，電流を構成する荷電粒子に生じるローレンツ力の合力と等しい．

- 磁場 H と磁束密度 B の関係（μ は透磁率）：$B = \mu H$

- 電流の作る磁束密度の公式：

  ❶ 十分長い直線電流：$B = \dfrac{\mu I}{2\pi r}$　（r は電流からの半径）
  ❷ 十分長いソレノイドコイルの中：$B = \mu n I$　（n は単位長さ当たりの巻き数）
  ❸ 円電流の中心：$B = \dfrac{\mu I}{2r}$　（n は円電流の半径）

1. 磁場から受ける力①

図のように x 軸，y 軸，z 軸をとる．空間内に，大きさ B の磁束密度を z 軸正の方向に一様にかけた．原点に質量 m，電荷 $q\,(>0)$ の点電荷を置く．原点にある点電荷に，zx 平面内において z 軸正の向きから角度 θ の向きに速さ v の初速を与えた．

I　$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ とき，すなわち x 軸に沿って x 正方向に打ち出した場合を考える．

(1)　点電荷にはたらく力の大きさと向きをそれぞれ求めよ．

(2)　点電荷は xy 平面上で等速円運動をする．円運動の運動方程式から円軌道の半径[*1]を求め，その軌跡を図示せよ．

(3)　円運動の周期を求めよ．

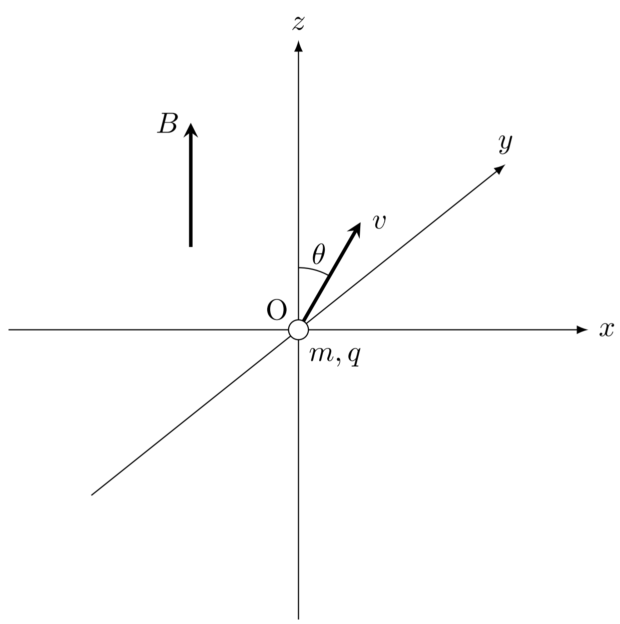
(4)　粒子の運動に対し，磁場が仕事をしないことを確認せよ．

II　$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の場合を考える．

(1)　点電荷にはたらく力の大きさと向きをそれぞれ求めよ．

(2)　点電荷の運動は xy 平面内の等速円運動と，z 軸方向の等速度運動に分解できる．円運動の運動方程式から円軌道の半径を求めよ．

(3)　点電荷が 1 回目に z 軸に戻ってきたときの z 座標を求めよ．



[*1] ラーモア半径と名前が付いている．

【解答】

I (1)　公式より，

$$f = \underset{\sim\sim\sim}{qvB}\,.$$

向きは[*2]，y 負方向.

(2)　運動方程式の中心方向成分より（図略），

$$m\frac{v^2}{r} = qvB\,, \qquad \therefore r = \frac{mv}{qB}\,.$$

(3)　運動の周期 T は，

$$vT = 2\pi r\,, \qquad \therefore T = \frac{2\pi m}{qB}\,.$$

(4)　ローレンツ力は速度と直交することから，ローレンツ力の仕事率は 0．よって，磁場は物体に仕事をしない.

II (1)　公式より，

$$f = qvB\sin\theta\,.$$

向きは，y 負方向.

(2)　運動方程式の中心方向成分より（図略），

$$m\frac{v^2\sin^2\theta}{r} = qvB\sin\theta\,, \qquad \therefore r = \frac{mv}{qB}\sin\theta\,.$$

(3)　点電荷が再び z 軸を通過する時刻 t は，

$$v\sin\theta t = 2\pi r\,, \qquad \therefore t = \frac{2\pi m}{qB}\,.$$

よって，

$$z = v\cos\theta t = \frac{2\pi mv}{qB}\cos\theta\,.$$

[*2] フレミング左手則に従う.

2. 磁場から受ける力②（ホール効果）

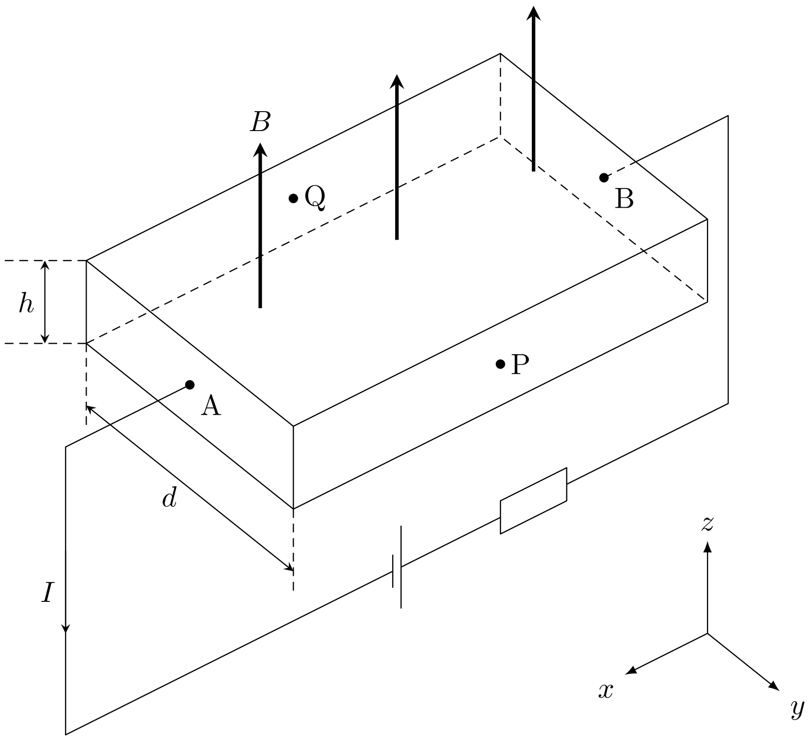
図のように，xyz 空間を定め，z 軸正方向に磁束密度の大きさ B の磁場をかける．xy 平面と平行になるように導体（幅 d，高さ h）を置く．この導体に電位差を与えたとき，側面 PQ 間にも電位差が生じる現象をホール効果と呼ぶ．

導体内部のキャリア[*3]が正孔（ホール）[*4]の場合を考える．ホールの電荷を q，数密度を n，導体を流れる電流の大きさを I とする．導体には，B 側が高電位となるように電位差を与える．

(1)　ホールが受けるローレンツ力の大きさと向きを求めよ．

(2)　定常状態において，y 方向に生じる電場の大きさと向きを求めよ．

(3)　定常状態において，Q に対する P の電位を求めよ．



[*3] 電流の担い手となる荷電粒子．

[*4] ホール効果のホールとは無関係．ホール効果は Hall，正孔（ホール）は hole.

【解答】

(1)　電流の定義より

$$I = qnvhd\,, \qquad \therefore v = \frac{I}{qnhd}\,.$$

公式より，

$$f = qvB = \frac{IB}{nhd}\,, \quad y\text{ 負方向}\,.$$

(2)　つりあいより，

$$0 = qE - qvB\,, \qquad \therefore E = \frac{IB}{qnhd}\,, \quad y\text{ 正方向}\,.$$

(3)　電場と電位の関係より，

$$V_{\mathrm{QP}} = Ed = \frac{IB}{qnh}\,.$$

$\mathit{3}$. 磁場から受ける力③（難しいのでやらなくてもよい）

一様な電場・磁場の存在する xyz 空間内での電子（質量 m，電荷 $-e$）の運動について考える．重力，および空気の影響は考えない．

I　z 軸正の向きに大きさ E の一様な電場のみが存在する場合を考える．時刻 $t=0$ に原点 O で電子を静かに放した後の運動について，電子の座標を時刻 t の関数として表せ．

II　z 軸正の向きに磁束密度の大きさ B の一様な磁場のみが存在する場合を考える．時刻 $t=0$ に原点 O で電子に x 軸正の向きに大きさ v_0 の初速度を与えた後の運動について，電子の座標を時刻 t の関数として表せ．

III　z 軸正の向きに大きさ E の一様な電場が存在し，かつ z 軸正の向きに磁束密度の大きさ B の一様な磁場が存在する場合を考える．時刻 $t=0$ に原点 O で電子に x 軸正の向きに大きさ v_0 の初速度を与えた後の運動について，電子の座標を時刻 t の関数として表せ．

IV　y 軸正の向きに大きさ E の一様な電場が存在し，かつ z 軸正の向きに磁束密度の大きさ B の一様な磁場が存在する場合を考える．時刻 $t=0$ に原点 O で電子を静かに放した後の運動について考える．

(1)　この運動を x 軸方向に一定の速さ u で動く観測者から見ると，等速円運動に見える．u を求めよ．また，その円軌道の半径 r，および角速度 ω を求めよ．

(2)　電子の座標を時刻 t の関数として表せ．

【解答】

I　x 方向，および y 方向は力を受けないため加速度成分は 0．運動方程式の z 成分より，

$$m\ddot{z} = -eE\,, \quad \therefore \ddot{z} = -\frac{eE}{m}\,.$$

加速度一定より，初期条件を考慮して，

$$x = 0\,, \quad y = 0\,, \quad z = -\frac{eE}{2m}t^2\,.$$

II　xy 平面内で等速円運動を行う．その半径を r とすれば，運動方程式の中心方向成分から，

$$m\frac{{v_0}^2}{r} = ev_0B\,, \quad r = \frac{mv_0}{eB}\,.$$

角速度 ω は，

$$\omega = \frac{v_0}{r} = \frac{eB}{m}\,.$$

よって，

$$x = \frac{mv_0}{eB}\sin\left(\frac{eB}{m}t\right), \quad y = \frac{mv_0}{eB}\left\{1 - \cos\left(\frac{eB}{m}t\right)\right\}, \quad z = 0\,.$$

なお，

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -e\dot{y}B\,, \\ m\ddot{y} = +e\dot{x}B\,, \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

を直接解いても求まる．

III　運動方程式より，

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -e\dot{y}B\,, \\ m\ddot{y} = +e\dot{x}B\,, \\ m\ddot{z} = -eE\,. \end{cases}$$

したがって，I，II を組み合わせた運動になっており，

$$x = \frac{mv_0}{eB}\sin\left(\frac{eB}{m}t\right), \quad y = \frac{mv_0}{eB}\left\{1 - \cos\left(\frac{eB}{m}t\right)\right\}, \quad z = -\frac{eE}{2m}t^2\,.$$

IV　運動方程式より，

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -e\dot{y}B\,, \\ m\ddot{y} = +e\dot{x}B - eE = eB\left(\dot{x} - \dfrac{E}{B}\right), \\ m\ddot{z} = 0\,. \end{cases}$$

したがって，x 軸の正方向に速さ $u = \underline{\dfrac{E}{B}}$ で動く観測者から見れば，II と同じ角速度の円運動となる[*5]．よって，

$$\omega = \underline{\frac{eB}{m}}_{(1)} \quad , \quad r = \frac{u}{\omega} = \underline{\frac{mE}{eB^2}}_{(1)} \quad .$$

また，電子の位置座標は，

$$\underline{x = \frac{E}{B}t - \frac{mE}{eB^2}\sin\left(\frac{eB}{m}t\right)}_{(2)} \quad , \quad \underline{y = -\frac{mE}{eB^2}\left\{1 - \cos\left(\frac{eB}{m}t\right)\right\}}_{(2)} \quad , \quad \underline{z = 0}_{(2)} \, .$$

この軌跡はサイクロイドである．

[*5] 運動方程式が同じなので角速度は等しい．しかし，初期条件が異なるので半径は異なる．初期条件は，$x(0) = y(0) = z(0) = 0$，$\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$ であり，等速度で動く観測者を A とすれば，$\dot{x}_{\mathrm{A}\to\text{電子}}(0) = \dot{x}(0) - \dfrac{E}{B}$，$\dot{y}_{\mathrm{A}\to\text{電子}}(0) = \dot{z}_{\mathrm{A}\to\text{電子}}(0) = 0$ である．

4. 電流が磁場から受ける力

図のように x 軸，y 軸，z 軸を定める．ABEF は xy 平面上にあり，AF に接続されている直流電源（内部抵抗無視）の起電力を E とする．空間内に，z 軸負の方向に磁束密度の大きさ B の磁場を一様にかける．空間は真空とし，真空の透磁率を μ_0，重力加速度の大きさを g とする．

I　図 1 の状況を考える．BC 間，DE 間には長さ ℓ の導線（質量・抵抗無視）を，EB 間には電流が流れないよう長さ ℓ の絶縁体棒を固定し，CD 間には質量 m，長さ ℓ，抵抗値 R の導体棒を接続した．なお，EB 間の絶縁体棒のみ固定してある．このとき，回路には電流が流れ始め，十分時間がたった後，CD 間の導線は y 軸正の向きから見て z 軸に対し反時計回りに角度 θ_0 だけ傾き静止した．

(1)　キルヒホッフ則より，CD 間に流れる電流の大きさを求めよ．

(2)　CD 間に流れる電流が磁場から受ける力の大きさと向きをそれぞれ求めよ．

(3)　全体が静止していることから，$\tan\theta_0$ を求めよ．

(4)　CD 間の導体棒を，静止している状態から更に微小な角度 ϕ だけ動かし静かに手を放したところ，近似的に単振動をした．この単振動の周期を求めよ．

II　図 2 の状況を考える．BC 間，CD 間，DE 間，BC と ED の中点を結ぶ位置のそれぞれに質量 m，長さ ℓ，抵抗値 R の導体棒を接続した．なお，EB 間には電流が流れないよう長さ ℓ の絶縁体棒を固定してある．このとき，回路には電流が流れ始め，十分時間がたった後，CD 間の導線は y 軸正の向きから見て z 軸に対し反時計回りに角度 θ_1 だけ傾き静止した．導体棒は一様であり，その抵抗値は長さに比例するものとする．

(1)　CD 間に流れる電流の大きさを求めよ．

(2)　$\tan\theta_1$ は $\tan\theta_0$ の何倍か．

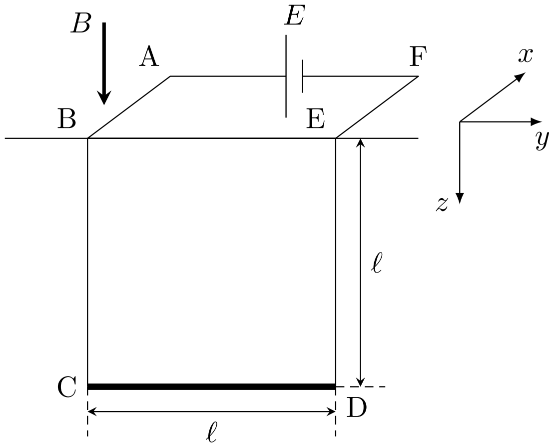


図 1

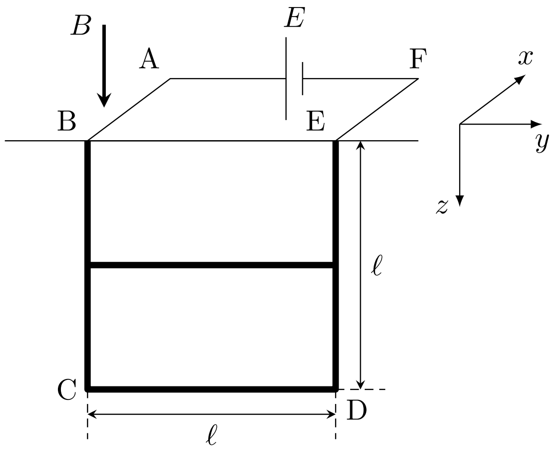


図 2

【解答】

I (1)　キルヒホッフ則より，

$$E - RI = 0\,, \qquad I = \underset{\sim\sim}{\frac{E}{R}}\,.$$

(2)　公式より[*6]，

$$F = IB\ell = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{EB\ell}{R}}\,.$$

(3)　張力の大きさを T とする．導体棒のつりあいより，

$$\begin{cases} x : 0 = T\sin\theta_0 - IB\ell\,, \\ z : 0 = mg - T\cos\theta_0\,, \end{cases} \qquad \therefore \tan\theta_0 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{EB\ell}{mgR}}\,, \quad T = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{(mg)^2 + \left(\frac{EB\ell}{R}\right)^2}}\,.$$

(4)　角度 θ にあるときの導体棒の運動方程式は，

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = -mg\sin\theta + \dfrac{EB\ell}{R}\cos\theta\,, \\ m\dfrac{v^2}{\ell} = T - mg\cos\theta\,. \end{cases}$$

運動方程式の接線成分より，θ が θ_0 近傍では，

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= -mg\sin\theta + \frac{EB\ell}{R}\cos\theta \\ m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\sqrt{(mg)^2 + \left(\frac{EB\ell}{R}\right)^2}\sin(\theta - \theta_0) \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\omega^2\sin(\theta - \theta_0) \\ \therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} &\fallingdotseq -\omega^2(\theta - \theta_0)\,. \end{aligned}$$

となり，導体棒は近似的に $\theta = \theta_0$ を振動中心とした単振動をすることが確認できる[*7]．ここで，$\omega^2 = \sqrt{\left(\frac{g}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{EB}{mR}\right)^2}$ とした．よって，その周期は，

$$T = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{2\pi\left\{\left(\frac{g}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{EB}{mR}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{4}}}\,.$$

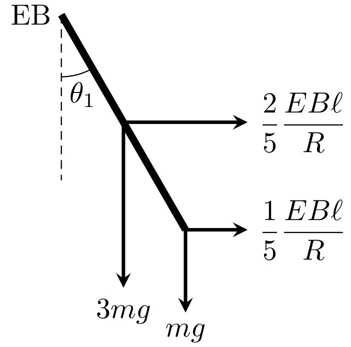
[*6] 向きはフレミング左手則に従う．

[*7] $\phi = \theta - \theta_0$ である．

II (1)　キルヒホッフ則より，中点を結ぶ導体棒を流れる電流を i_1，CD 間を流れる電流を i_2 として，

$$\begin{cases} E-\dfrac{R}{2}(i_1+i_2)\times 2-Ri_1=0\,, \\ E-\dfrac{R}{2}(i_1+i_2)\times 2-\dfrac{R}{2}i_2\times 2-Ri_2=0\,, \end{cases} \quad \therefore i_1=\frac{2E}{5R}\,,\quad i_2=\frac{E}{5R}\,.$$

(2)　y 軸正の方向から見た力の概略は以下の図の通りである．



EB 軸まわりの力のモーメントのつりあいより，

$$0=\frac{2}{5}\frac{EB\ell}{R}\cdot\frac{\ell}{2}\cos\theta_1+\frac{1}{5}\frac{EB\ell}{R}\cdot\ell\cos\theta_1-3mg\cdot\frac{\ell}{2}\sin\theta_1-mg\cdot\ell\sin\theta_1\,,$$

$$\therefore \tan\theta_1=\frac{4}{25}\frac{EB\ell}{mgR}\,.$$

よって，$\dfrac{4}{25}$倍．

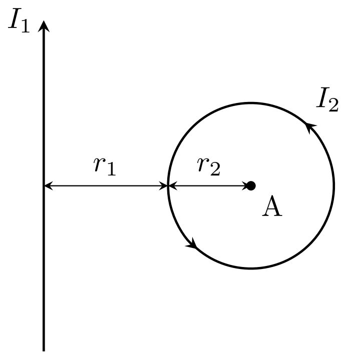
5. 電流の作る磁場①（公式の確認）

図のように xy 平面を定める．図のように電流を流した．空間は真空とし，真空の透磁率を μ_0 とする．

(1)　直線電流が点 A の位置に作る磁束密度の大きさと向きをそれぞれ求めよ．

(2)　円形電流が点 A の位置に作る磁束密度の大きさと向きをそれぞれ求めよ．

(3)　A 点の位置で観測される磁束密度の大きさを，紙面裏側から表側の向きを正として求めよ．



【解答】

(1)　公式より，

$$B_1 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(r_1+r_2)}},\quad \underset{\sim\sim\sim}{\text{紙面表側から裏側向き}}.$$

(2)　公式より，

$$B_2 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{\mu_0 I_2}{2r_2}},\quad \underset{\sim\sim\sim}{\text{紙面裏側から表側向き}}.$$

(3)　A 点で観測される磁束密度は，I，II で求めた磁束密度の重ね合わせであるから，正の向きに注意して，

$$\begin{aligned} B &= -\frac{\mu_0 I_1}{2\sqrt{2}\,\pi(r_1+r_2)} + \frac{\mu_0 I_2}{2\sqrt{2}\,r_2} \\ &= \underset{\sim\sim\sim}{\frac{\mu_0}{2\sqrt{2}\,\pi}\left(-\frac{I_1}{r_1+r_2} + \frac{\pi I_2}{r_2}\right)}. \end{aligned}$$

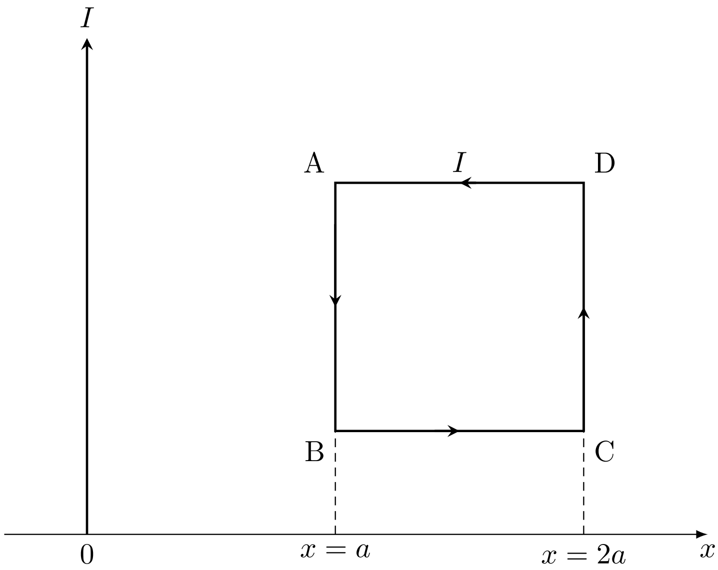
6. 電流が磁場から受ける力・電流の作る磁場②

図のように，十分長い導線に大きさ I の電流 1 を流し，そこから距離 a だけ離れた位置に辺の長さ a の正方形コイルを固定した．正方形コイルには大きさ I の電流 2 が流れている．x 軸を図の右向きに定める．空間は真空とし，真空の透磁率を μ_0 とする．

(1)　辺 AB を流れる電流 2 が，電流 1 の作る磁束密度から受ける力の大きさと向きをそれぞれ求めよ．

(2)　辺 CD を流れる電流 2 が，電流 1 の作る磁束密度から受ける力の大きさと向きをそれぞれ求めよ．

(3)　コイルの固定を外した．コイルの質量を m，辺 CD の位置を $x\,(> a)$ としたとき，コイルの加速度を x の関数として求めよ[*8]．



[*8] （おまけ）コイルの辺 CD の位置が $x = 2a$ にあるときのコイルの速さ v を求めよ．
答え：$v = \sqrt{\dfrac{\mu_0 a^2 I^2}{\pi m}\log 3}$．

【解答】

(1)　電流 1 が AB の位置に作る磁束密度は紙面表側から裏向きで，その大きさは公式より，

$$B_{1\to\mathrm{AB}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\,.$$

よって，電流 2 が受けるアンペール力は，

$$F_{\mathrm{AB}} = \underline{\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}}\,,\quad \underline{x\text{ 軸正の向き}}\,.$$

(2)　同様にして，

$$F_{\mathrm{CD}} = \underline{\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}}\,,\quad \underline{x\text{ 軸負の向き}}\,.$$

(3)　位置 x のとき，コイルにはたらく力は，

$$F = F_{\mathrm{AB}} + F_{\mathrm{CD}} = \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi(x-a)} - \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I^2 a^2}{2\pi x(x-a)}\,.$$

物体の運動方程式より，物体の加速度を $\ddot{x}$ として，

$$m\ddot{x} = \frac{\mu_0 I^2 a^2}{2\pi x(x-a)}\,,\qquad \therefore\ \ddot{x} = \underline{\frac{\mu_0 I^2 a^2}{2\pi m x(x-a)}}\,.$$

【補足】おまけについて（こういう問題も作れるよというお話）

微分方程式が高校範囲では扱えない形なのでエネルギーで考える他ない．運動方程式の両辺に速さ v をかけて整理すると[*9]，

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi}\log\left(1-\frac{a}{x}\right)\right\} = 0\,,\qquad \therefore\ \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi}\log\left(1-\frac{a}{x}\right) = \mathrm{const}\,.$$

ここに初期条件 $x(0)=2a$，$v(0)=0$ を用いて，$x=2ka\,(k>1)$ での速さ v を計算すると，

$$v = \underline{\sqrt{\frac{\mu_0 I^2 a}{\pi m}\log\left(2-\frac{1}{k}\right)}}\,,$$

を得る．

*9 ここの計算に何かしらの誘導を与えることで，高校範囲でも解ける問題となる．

§4.2 電磁誘導

この章では，電磁誘導に関する問題を扱う．電磁誘導は，静磁場中を導体が動くことで導体に誘導起電力が生じるタイプ（$vB\ell$ 公式），磁場が時間変化することで誘導起電力が生じるタイプ（ファラデイの法則）の 2 つに分類される．ファラデイ則はどちらの場合の誘導起電力も計算はできるが，$vB\ell$ 公式が使える場合は $vB\ell$ 公式を利用する方が楽なことが多いため，どちらでも誘導起電力を計算できるようにする．

また，後半では誘導起電力が素子の性質の原因となっているコイルの中身について，自己誘導・相互誘導を扱う．その後，コイルを回路素子として用いる次章につなげる（本章でも一部コイルを素子として用いる問題を含む）．

■簡単なまとめ

- 静磁場中を動く導体棒に生じる誘導起電力：$V = vB\ell$　　v は導体棒の速さ，ℓ は導体棒の長さ，B は磁束密度の大きさである．v，B，導体棒が直交していないときは，直交成分のみを取り出して計算する．誘導起電力の向きは，フレミング左手則で正電荷が受ける力の向きに等しい．

- ファラデイ則：$\mathcal{E} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$
　Φ は磁束で，磁場 B を貫く領域の磁場と直交した部分の面積 S を用いて $\Phi = BS$ と定義される．誘導起電力の向きは，磁場の方向に合わせて右ねじの向きを正に生じる．なお，誘導起電力 $\mathcal{E}$ はループ 1 周の起電力である．
- 電磁誘導の枠組み

$$\text{① 誘導起電力の決定} \quad \to \quad \begin{cases} \text{導体棒が静磁場中を運動} & \to \quad vB\ell\text{公式/ファラデイ則} \\ \text{磁場が時間変化} & \to \quad \text{ファラデイ則一択} \end{cases}$$

② 回路の議論

③ 力学系の運動の議論

④ エネルギーの変換に関するの議論

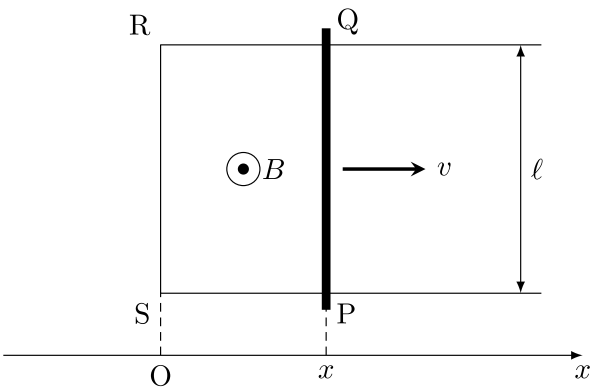
1. 誘導起電力の決定①

図のように，水平面上に 2 本の抵抗の無視できるレールを，間隔 ℓ で平行に固定し，その一端に導線を接続した．導線の位置を原点 O とし，レールと平行に x 軸をとる．この空間に，大きさ B，鉛直上向きの一様な磁束密度をかけた．導体棒は，2 本のレールと常に接触し，x 軸と垂直なまま，摩擦なく運動できるようになっている．導体棒を $x = 0$ に置き，外力を加え一定の速さ v で運動させた．この瞬間を時刻 $t = 0$，時刻 t における導体棒の位置を x とする．磁束の正の向きを，磁束密度と同方向に定める．

(1)　$vB\ell$ の公式に従い，PQ 間に生じる誘導起電力 V を求めよ．

(2)　ファラデイの法則に従い，回路 1 周に生じる誘導起電力 $\mathcal{E}$ を求めよ．

(3)　(1)，(2) の結果が同じ結果を与えていることを確かめよ．



【解答】

(1)　$vB\ell$ の公式より，

$$V = vB\ell,\ (\text{向きは Q} \to \text{P}).$$

(2)　ファラデイ則より，

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell\frac{dx}{dt} = -vB\ell.$$

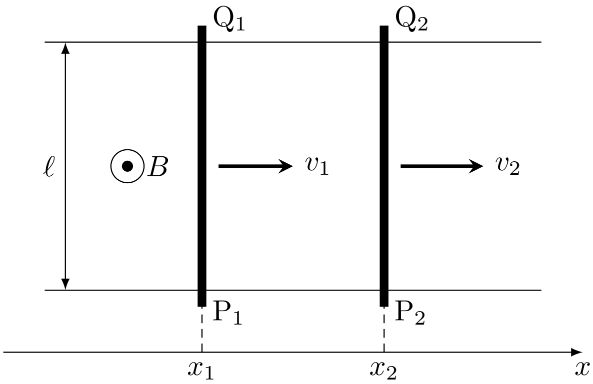
2. 誘導起電力の決定②

図のように，水平面上に 2 本の抵抗の無視できるレールを，間隔 ℓ で平行に固定した．レールと平行に x 軸をとる．この空間に，大きさ B，鉛直上向きの一様な磁束密度をかけた．体棒 1 とレールとの接点を $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{Q_1}$，導体棒 2 とレールとの接点を $\mathrm{P_2}$，$\mathrm{Q_2}$ とする．各導体棒は，2 本のレールと常に接触し，x 軸と垂直なまま，摩擦なく運動できるようになっている．時刻 t における導体棒 1，2 の位置，速度をそれぞれ x_1，x_2，v_1，v_2 とする．磁束の正の向きを，磁束密度と同方向に定める．

(1)　$vB\ell$ 公式に従い，時刻 t において $\mathrm{P_1Q_1}$ 間，および $\mathrm{P_2Q_2}$ 間に生じる誘導起電力 V_1，V_2 をそれぞれ求めよ．

(2)　ファラデイの法則に従い，時刻 t において回路 1 周に生じる誘導起電力 $\mathcal{E}$ を求めよ．

(3)　(1)，(2) の結果が同じ結果を与えていることを確かめよ．



【解答】

(1)　$vB\ell$ の公式より，

$$V_1 = \underset{\sim\sim\sim}{v_1 B\ell},\ (\text{向きは } \mathrm{Q_1} \to \mathrm{P_1}),\quad V_2 = \underset{\sim\sim\sim}{v_2 B\ell},\ (\text{向きは } \mathrm{Q_2} \to \mathrm{P_2}).$$

(2)　ファラデイ則より，

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\ell\frac{dx}{dt} = \underset{\sim\sim\sim}{-vB\ell}.$$

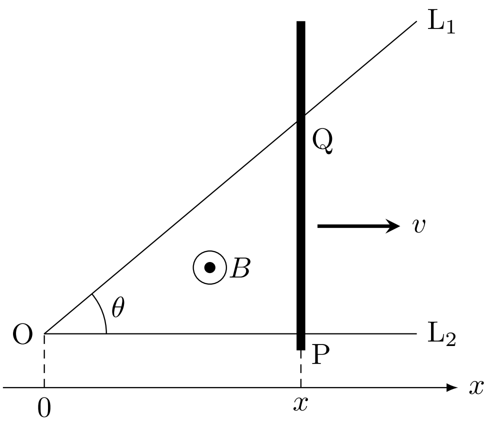
3. 誘導起電力の決定③

図のように，水平面上に 2 本の抵抗の無視できるレール L_1，L_2 を角度 θ で接続し固定した．レールの接続点を原点 O とし，レール L_2 と平行に x 軸をとる．この空間に，大きさ B，鉛直上向きの一様な磁束密度をかけた．導体棒は，2 本のレールと常に接触し，x 軸と垂直なまま，摩擦なく運動できるようになっている．導体棒を $x=0$ に置き，外力を加え一定の速さ v で運動させた．時刻 t における導体棒の位置を x とする．磁束の正の向きを，磁束密度と同方向に定める．

(1)　$vB\ell$ 公式に従い，PQ 間に生じる誘導起電力 V を求めよ．

(2)　ファラデイの法則に従い，回路 1 周に生じる誘導起電力 $\mathcal{E}$ を求めよ．

(3)　(1)，(2) の結果が同じ結果を与えていることを確かめよ．



【解答】

(1)　$vB\ell$ の公式より，

$$V = \underline{vB\ell x\tan\theta}\,,\ （向きは\ \mathrm{Q}\to\mathrm{P}）.$$

(2)　ファラデイ則より，

$$\mathcal{E} = -\frac{d\varPhi}{dt} = -\frac{1}{2}B\frac{d}{dt}(x^2) = \underline{-vB\ell x\tan\theta}\,.$$

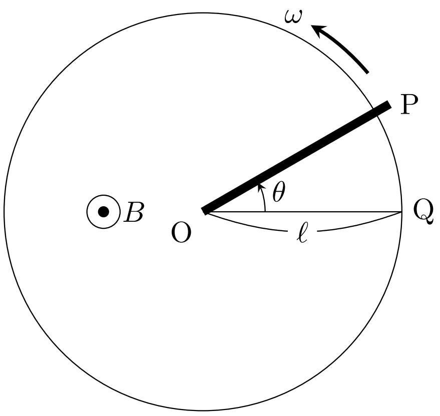
4. 誘導起電力の決定④

図のように，水平面上に半径 ℓ の円形レールを固定した．この空間に，大きさ B，鉛直上向きの一様な磁束密度をかけた．導体棒に外力を加え，角速度 ω で運動させる．導体棒の回転軸を O, 導体棒と円形レールの接触点を P，導体棒の回転軸とレールを結ぶ導線とレールの接点を Q とする．導体棒とこの導線との接触は考えないものとする．磁束の正の向きを，磁束密度と同方向に定める．

(1)　$vB\ell$ 公式に従い，PQ 間に生じる誘導起電力 V を求めよ．

(2)　ファラデイの法則に従い，回路 1 周に生じる誘導起電力 $\mathcal{E}$ を求めよ．

(3)　(1)，(2) の結果が同じ結果を与えていることを確かめよ．



【解答】

(1)　$vB\ell$ の公式より，

$$V=\int_0^{\ell} x\omega B\,dx=\frac{1}{2}\omega B\ell^2,\ （向きは O \to P）.$$

(2)　ファラデイ則より，

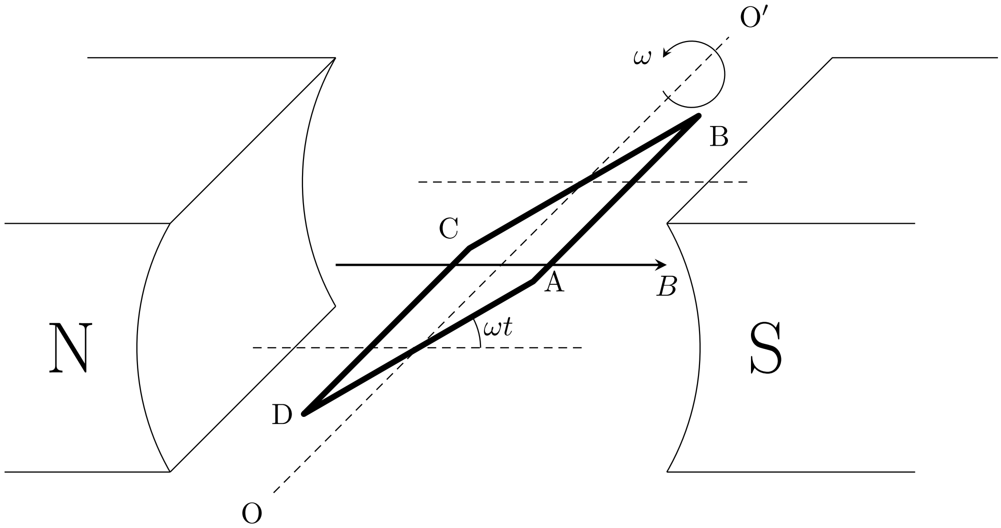
$$\mathcal{E}=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{1}{2}B\ell^2\frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{2}\omega B\ell^2.$$

***5*. 交流の発生**

図のように，水平面上に磁石を置き，磁石が作る大きさ B の一様な磁束密度中に一片の長さ a の正方形コイル ABCD を置く．コイルを磁場に垂直な軸 OO′ を回転軸として，O から O′ を見て反時計回りに一定な角速度 ω で回転させた．時刻 $t=0$ において，コイルは水平になっているものとする．起電力の正の向きを，A → B → C → D → A の向きとする．以下の設問に答えよ．

(1)　$vB\ell$ 公式に従い，時刻 t において回路 1 周に生じる誘導起電力 V を求めよ．

(2)　ファラデイの法則に従い，時刻 t において回路 1 周に生じる誘導起電力 $\mathcal{E}$ を求めよ．



【解答】

(1)　$vB\ell$ の公式より，A から B の向きに $V_{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{2}a^2\omega B\cos(\omega t)$ の起電力が生じる．C から D の起電力も考慮すれば，

$$V=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{Ba^2\omega\cos(\omega t)},\ （向きは A → B → C → D → A）.$$

(2)　磁束の正の向きを，$t=0$ で鉛直下向きになるよう面と垂直に定める．ファラデイ則より，

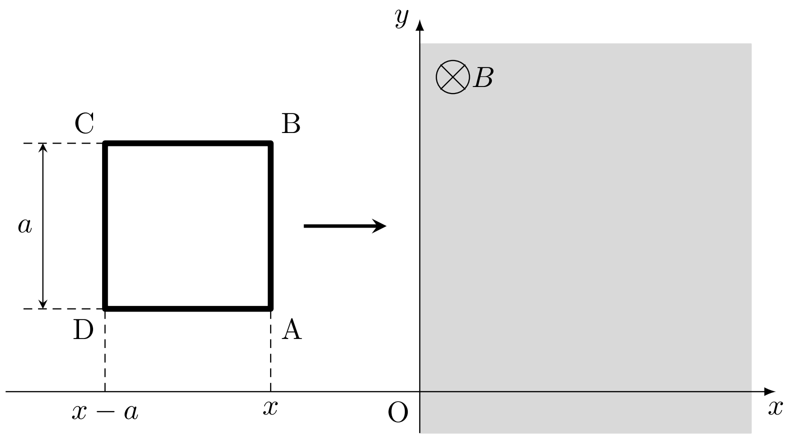
$$\mathcal{E}=-\frac{d\Phi}{dt}=-Ba^2\frac{d}{dt}\{\sin(\omega t)\}=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{-Ba^2\omega\cos(\omega t)}.$$

6. 磁場中を動く回路

図のように，水平面上に一辺の長さ a の正方形コイル ABCD（1 周での電気抵抗 R）を置いた．AD と平行に x 軸をとる．この空間に，磁束密度の大きさ B，鉛直下向きの一様な磁場をかけた．コイルは，外力をによって一定の速度 v で x 軸正の向きへ運動している．コイルの一部が $x=0$ を通過し始めた瞬間を時刻 $t=0$ とし，時刻 t における頂点 A の位置を x とする．電流の正の向きを反時計回りに定める．

(1)　$vB\ell$ 公式に従い誘導起電力を決定し，時刻 $t>0$ において回路に流れる電流のグラフを図示せよ．

(2)　ファラデイの法則に従い誘導起電力を決定し，時刻 $t>0$ において回路に働く力のグラフを図示せよ．



【解答】

(1)　生じる起電力は $vB\ell$ の公式より，

$$V = \begin{cases} vBa & (0 \leq t \leq a/v)\,, \\ 0 & (a/v \leq t)\,. \end{cases}$$

キルヒホッフ則より，

$$I = \begin{cases} \dfrac{vBa}{R} & (0 \leq t \leq a/v)\,, \\ 0 & (a/v \leq t)\,. \end{cases}$$

あとはこれを図示すればよい（図略）.

(2)　公式より，

$$F = \begin{cases} \dfrac{vB^2a^2}{R} & (0 \leq t \leq a/v)\,, \\ 0 & (a/v \leq t)\,. \end{cases}$$

あとはこれを図示すればよい（図略）.

7. 磁場中を動く導体棒①

図のように，水平面上に 2 本の抵抗の無視できるレールを間隔 ℓ で平行に固定し，その一端に起電力 E の電池を接続した．電池の位置を原点 O とし，レールと平行に x 軸をとる．この空間に，大きさ B，鉛直上向きの一様な磁束密度をかけた．導体棒（質量 m，抵抗値 R）は，2 本のレールと常に接触し，x 軸と垂直なまま，摩擦なく運動できるようになっている．導体棒を $x=0$ に置き，この瞬間を時刻 $t=0$，時刻 t における導体棒の位置を x，速度を v とする．起電力および電流の正の向きを，図の P → Q（図の反時計回り）の向きとする．

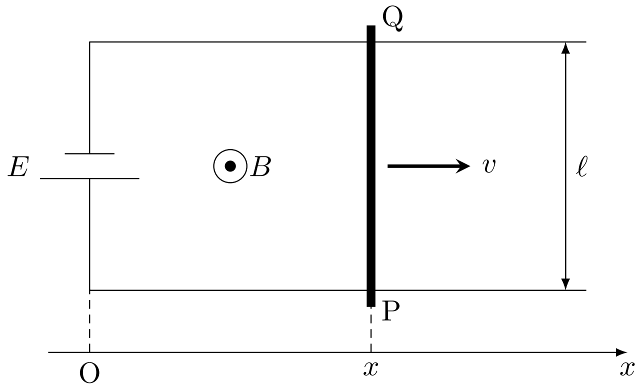
(1)　$vB\ell$ 公式に従い，時刻 t において PQ 間に生じている誘導起電力 V を求めよ．

(2)　時刻 t において回路に流れる電流 I を求めよ．

(3)　導体棒の加速度を a とし，運動方程式を立式せよ．

(4)　導体棒の運動について論ぜよ．

(5)　系のエネルギー収支について論ぜよ．



【解答】

(1)　公式より，

$$V = vB\ell\,.$$

(2)　キルヒホッフ則より，

$$E - vB\ell - IR = 0\,, \qquad \therefore I = \frac{E - vB\ell}{R}\,.$$

(3)　運動方程式は，

$$ma = \frac{B\ell(E - vB\ell)}{R}\,.$$

(4)　運動方程式より，

$$a = -\frac{B^2\ell^2}{mR}\left(v - \frac{E}{B\ell}\right)\,.$$

よって，空気抵抗を受ける物体と同じ運動を取り，その終端速度は $v_{\mathrm{f}} = \dfrac{E}{B\ell}$[*10].

(5)　運動方程式・キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} m\dot{v} = IB\ell\,, \\ 0 = EI - -vB\ell - RI^2\,. \end{cases}$$

運動方程式の両辺に速度 v をかけ，キルヒホッフ則の両辺に電流 I をかけ 2 式和を取ると，

$$EI = RI^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

となることがわかる[*11]．よって，電池のする仕事の一部がジュール熱として消費され，残りの部分が磁場を介して導体棒の運動エネルギーへと変換されている．

[*10] 時刻 t における物体の速度 v は，

$$v = \frac{E}{B\ell}\left(1 - e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t}\right)\,.$$

[*11] ここまでの計算などは自分でわからなくてもよいが（分かった方が楽しいです），続く日本語による説明は自分で書けるようにすること．

8. 磁場中を動く導体棒②

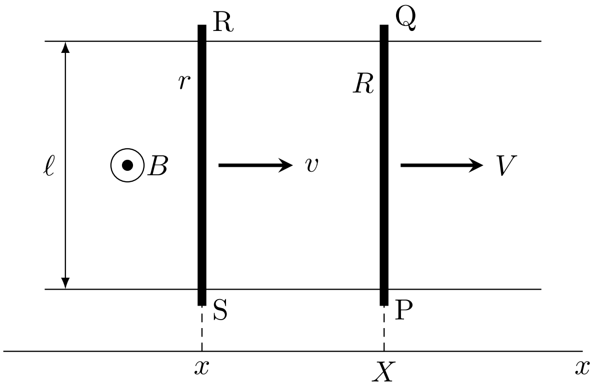
図のように，水平面上に 2 本の抵抗の無視できるレールを間隔 ℓ で平行に固定した．レールと平行に x 軸をとる．この空間に，大きさ B，鉛直上向きの一様な磁束密度をかけた．導体棒 1（質量 m，抵抗値 r），導体棒 2（質量 M，抵抗値 R）は，2 本のレールと常に接触し，x 軸と垂直なまま，摩擦なく運動できるようになっている．導体棒 1 に対して右向きに初速度 v_0 を与えた．この瞬間を時刻 $t=0$ とし，時刻 t における導体棒 1，2 の位置を x，X，速度を v，X，加速度を a，A とする．なお，2 つの導体棒の接触は起こらないものとする．起電力および電流の正の向きを，図の $\mathrm{P} \to \mathrm{Q} \to \mathrm{R} \to \mathrm{S} \to \mathrm{P}$ の向きとする．以下の設問に答えよ．

(1)　時刻 t において回路に流れる電流 I を求めよ．

(2)　各導体棒について，運動方程式を立式せよ．

(3)　十分時間が経過した後，導体棒 1，導体棒 2 はそれぞれ一定の速度 v_{f}，V_{f} となった．v_{f}，V_{f} をそれぞれ求めよ．

(4)　導体棒の速度が一定となるまでに，2 つの導体棒で生じたジュール熱を求めよ．



【メモ】

導体棒が 2 本あることから，運動の議論の際は複数物体系の問題として捉える．

【解答】

(1)　キルヒホッフ則より，

$$v_1 B\ell - v_2 B\ell - (R+r)I = 0\,, \qquad \therefore I = \frac{vB\ell - VB\ell}{R+r}\,.$$

(2)　運動方程式は，

$$\begin{cases} ma = -\dfrac{vB\ell - VB\ell}{R+r}\,, \\ MA = +\dfrac{vB\ell - VB\ell}{R+r}\,. \end{cases}$$

(3)　速さ一定より運動方程式から，

$$v_\mathrm{f} = V_\mathrm{f}\,.$$

運動量保存則より，

$$mv_\mathrm{f} + MV_\mathrm{f} = mv_0\,, \qquad \therefore v_\mathrm{f} = V_\mathrm{f} = \frac{m}{M+m}v_0\,.$$

(4)　力学系と回路全体のエネルギー収支を考えて，

$$\frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{m}{M+m}v_0\right)^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 + J = 0\,, \qquad J = \frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}gh\,.$$

9. 磁場中を動く導体棒③

図のように，2 本の抵抗の無視できるレールを，水平面に対して角 θ をなす斜面上に間隔 ℓ で平行に固定した．レールの一端には，端子 a，b が取り付けられており，レールと平行に斜面下向きに x 軸を定める．この空間に，大きさ B，鉛直上向きの一様な磁束密度をかけた．レール上には質量 m の抵抗の無視できる導体棒が渡されており，導体棒とレールとの接点を P，Q とする．時刻 $t = 0$ に導体棒を初速度 0 で放し，時刻 t における導体棒の位置を x，速度を v，加速度を a とする．導体棒は，2 本のレールと常に接触し，x 軸と垂直なまま摩擦なく運動できるようになっている．重力加速度の大きさを g とし，起電力および電流の正の向きを，図の P → a → b → Q → P の向きとする．

I　a − b 間に抵抗値 R の抵抗を接続した場合を考える．

(1)　時刻 t において回路に流れる電流 I を，v を含む式で求めよ．

(2)　導体棒のレールに平行な成分の運動方程式を立式せよ．

(3)　十分時間が経過すると導体棒の速度は一定となる．このときの v_{f} を求めよ．

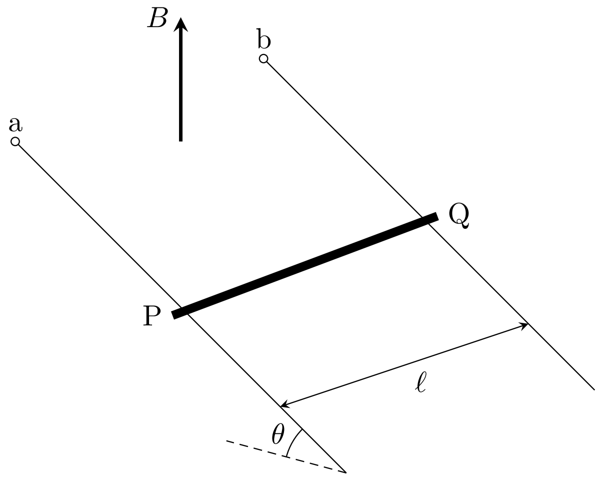
(4)　十分時間が経過した後の系のエネルギー収支について論ぜよ．

II　a − b 間に容量 C のコンデンサを接続した場合を考える．$t = 0$ において，コンデンサは帯電していなかったものとする．

(1)　時刻 t において回路に流れる電流 I を，a を含む式で求めよ．

(2)　導体棒の加速度 a を求めよ．

(3)　十分時間が経過した後の系のエネルギー収支について論ぜよ．



【解答】

I (1)　キルヒホッフ則より，

$$vB\ell\cos\theta - RI = 0\,, \qquad \therefore I = \underline{\frac{B\ell\cos\theta}{R}v}\,.$$

(2)　運動方程式は，

$$\underline{ma = mg\sin\theta - \frac{(B\ell\cos\theta)^2}{R}v}\,.$$

(3)　速さ一定より運動方程式から，

$$v_{\mathrm{f}} = \underline{\frac{Rmg\sin\theta}{(B\ell\cos\theta)^2}}\,.$$

(4)　重力が棒にする仕事が，磁場を介して，回路で生じるジュール熱へと変換されている．

II (1)　キルヒホッフ則より，

$$vB\ell\cos\theta - \frac{Q}{C} = 0\,, \qquad \therefore I = \frac{dQ}{dt} = \underline{CBa\ell\cos\theta}\,.$$

(2)　運動方程式より，

$$ma = mg\sin\theta - aC(B\ell\cos\theta)^2\,, \qquad \therefore a = \underline{\frac{mg\sin\theta}{m + C(B\ell\cos\theta)^2}}\,.$$

(3)　重力が棒にする仕事の一部が運動エネルギーの変化に，残りの部分が磁場を介してコンデンサに静電エネルギーとして蓄えられている．

【おまけ】コイル（自己インダクタンス L）をつないだ場合，導体棒の運動がどうなるか考えてみよ．

10. 磁場中を動く導体棒④

図のように，水平面を xy 平面をとし，原点を O とする直線直交座標をとる．この空間の $0 \leq x \leq 2a$ の領域に，大きさ B，鉛直上向きの一様な磁束密度をかけた．各辺の抵抗値が R の正方形コイルに外力を加え一定の速さ v で x 軸正の向きに運動させる．コイルの一部が $x = 0$ を通過し始めた瞬間を時刻 $t = 0$ とし，時刻 t における頂点 A の位置を x とする．電流の正の向きを，図の反時計回りとする．

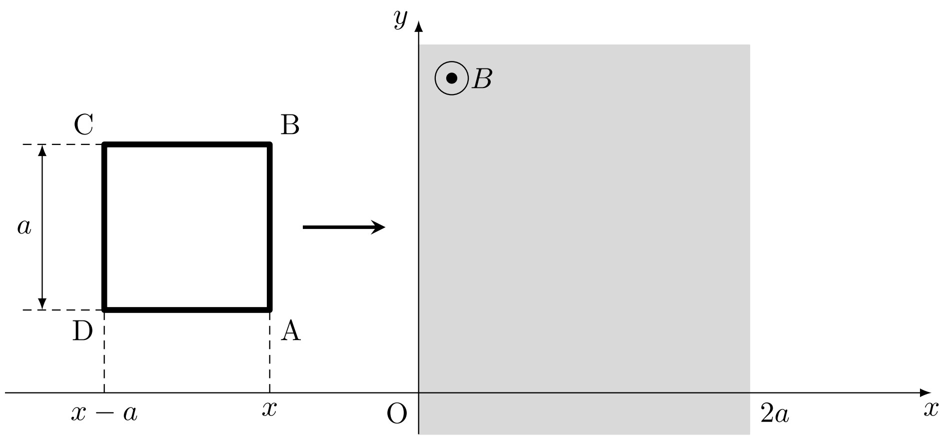
(1)　回路に流れる電流の時間変化をグラフにせよ．

(2)　コイルが磁場から受ける力の時間変化をグラフにせよ．

(3)　誘導起電力の仕事率 P_E，およびアンペール力の仕事率 P_I を，それぞれ時刻 t で場合分けをして求めよ．

(4)　回路全体の消費電力 P_R と外力の仕事率 P_F の満たす関係式を立て，エネルギー収支について論ぜよ．

(5)　回路が磁場のある領域を通過するまでに回路で生じたジュール熱 J を求めよ．



【解答】

(1)　キルヒホッフ則より（図略），

$$I = \begin{cases} -\dfrac{vBa}{R} & (0 \leq t \leq a/v)\,, \\ 0 & (a/v \leq t \leq 2a/v)\,, \\ \dfrac{vBa}{R} & (2a/v \leq t)\,. \end{cases}$$

(2)　公式より（図略），

$$F = \begin{cases} -\dfrac{vB^2a^2}{R} & (0 \leq t \leq a/v)\,, \\ 0 & (a/v \leq t \leq 2a/v)\,, \\ -\dfrac{vB^2a^2}{R} & (2a/v \leq t)\,. \end{cases}$$

(3)　それぞれ公式より，

$$P_{\mathrm{F}} = |F|v\cos\pi = \begin{cases} \dfrac{(vBa)^2}{R} & (0 \leq t \leq a/v)\,, \\ 0 & (a/v \leq t \leq 2a/v)\,, \\ \dfrac{(vBa)^2}{R} & (2a/v \leq t)\,. \end{cases}$$

$$P_{\mathrm{R}} = RI^2 = \begin{cases} \dfrac{(vBa)^2}{R} & (0 \leq t \leq a/v)\,, \\ 0 & (a/v \leq t \leq 2a/v)\,, \\ \dfrac{(vBa)^2}{R} & (2a/v \leq t)\,. \end{cases}$$

(4)　外力がコイルにする仕事が，磁場を介し，回路で生じるジュール熱に変換される[*12]．よって，

$$P_F = P_R\,.$$

(5)　系全体のエネルギー収支を考えて，

$$J = \frac{2vB^2a^3}{R}\,.$$

[*12] 回路において誘導起電力のする仕事と，力学系においてアンペール力のする仕事が全体で見たときに相殺する．

11. 磁場中を動く導体棒⑤（少し凝った入試問題，やりたい人だけ）

図 1 に示すように，水平面を xy 平面，鉛直上方を z の正の向きとし，原点を O とする直交座標系をとる．この空間に鉛直上向きに磁束密度の大きさ B の一様な磁場がかかっている．xy 平面上の $x \geq 0$ の領域に 2 本の導線 W_1，W_2 があり，導線 W_1 は x 軸上に固定され，原点 O で接地されており，導線 W_2 は，y 軸上の点 P_1 を端点として曲線 $y = f(x)$ 上に固定されている（どの x に対しても $f(x) > 0$ とする）．金属棒 M を 2 本の導線 W_1，W_2 に常に接触させながら，y 軸と平行を保ち，x 軸正の向きへ一定の速さ v で移動させる．金属棒 M は導線 W_1，W_2 の上を摩擦なく移動でき，金属棒 M と 2 本の導線の電気抵抗は無視できるものとする．はじめコンデンサーは帯電していなく，金属棒 M は時刻 $t = 0$ で y 軸上にあったものとして，以下の問いに答えよ．

金属棒 M の内部で電子（電荷 $-e$）にはたらく力を考え，誘導起電力を求めよう．

(1)　金属棒 M を動かすことにより，金属棒内部の電子にはローレンツ力がはたらく．時刻 t（ただし $t > 0$）におけるその向きを述べ，大きさを，e，v，B，t，および関数 f のうち必要なものを用いて表せ．

(2)　金属棒 M を動かすと，金属棒内の電子はローレンツ力により移動を始めるが，金属棒内部で生じた電場からの力が現れ，移動を終える．電子の移動が終わったときに生じる電場の向きを述べ，大きさを，e，v，B，t，および関数 f のうち必要なものを用いて表せ．

(3)　時刻 t（ただし $t > 0$）での図 1 の点 P_1 の電位を，e，v，B，t，および関数 f のうち必要なものを用いて表せ．

次に，図 2 に示すように，P_1 と O の間に，電気抵抗の無視できる導線を用いて，電源（内部抵抗を無視できる直流電源圧）と電気容量 C を持つコンデンサーを接続し，導線 W_2 が $y = a\sin(kx) + b$ の曲線上に固定されている場合を考える．ただし，a，b，k，は正の定数で $b > a$ である．金属棒 M を y 軸と平行に保ちながら一定の速さ v で x 軸の正の向きに動かすと，コンデンサーにかかる電圧は時間とともに周期的に変動する．電源の電圧値を調節したところ，図 2 の点 P_2 の電位が V_0 の時にコンデンサーにかかる電圧は 0 を中心として周期的に変動するようになった．以下では，電源の電圧値をこのようにとり，金属棒 M を一定の速さ v で x 軸の正の向きに動かす場合を考える．回路を流れる電流の作る磁場の影響は無視でき，金属棒 M が $t = 0$ で y 軸上にあったとして，以下の問いに答えよ．

(1)　コンデンサーにかかる電圧の瞬間値（瞬時値）は各瞬間での誘導起電力と電源による電圧の和になるとして，電源の電圧値 V_0，およびコンデンサーにかかる周期的に変動する電圧の周期 T を，e，v，B，t，a，b，k，C のうち必要なものを用いて表せ．

(2)　時刻 t（ただし $t>0$）においてコンデンサーに流れる電流 $I(t)$ を求め，e，v，B，t，a，b，k，C のうち必要なものを用いて表せ．ただし，電流の向きはコンデンサーを $\mathrm{P_1} \to \mathrm{P_2}$ の向きに流れる向きを正の向きとせよ．

(3)　金属棒 M を一定の速さ v で動かすため，時刻 t（ただし $t>0$）において金属棒に加える力を求め，e，v，B，t，a，b，k，C のうち必要なものを用いて表せ．

(4)　電源の電圧値を 0 とした場合を考える．導体棒に適当な外力を加え，位置 $x=\dfrac{\pi}{2k}$ で速度 v_0 となったところで手を放し，自由にさせた．導体棒が $x=\dfrac{\pi}{k}$ の位置に達したときの速さ v_1 を求めよ．

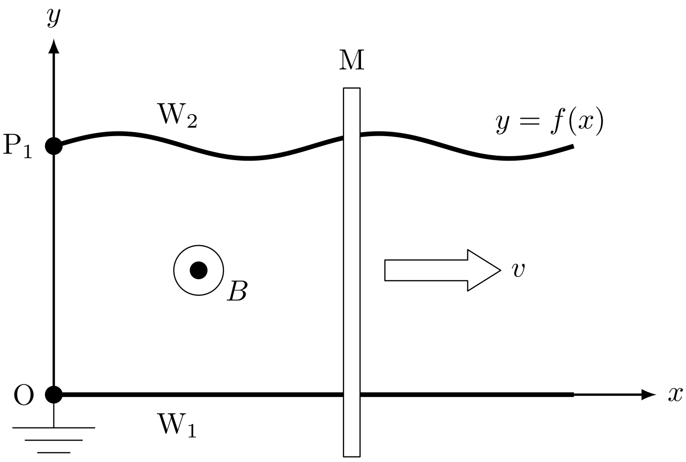


図 1

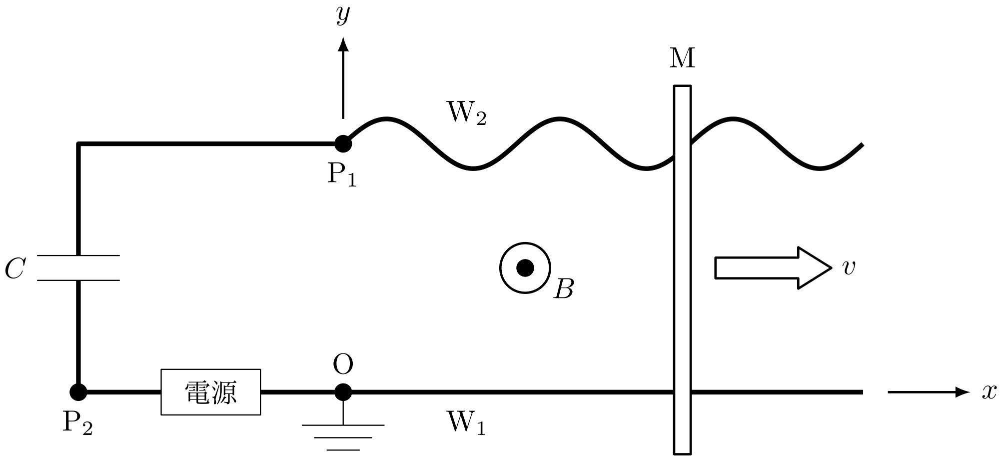


図 2

【メモ】

2014 年筑波大より，一部設問の削除・追加を行った．回路の一部が運動するタイプの電磁誘導.

【解答】

(1)　公式より，y 軸正の向き に，

$$f = evB\,.$$

(2)　電荷分布は，y 軸正の側が負，逆側が正となる．よって，電場の向きは y 軸正の方向 である．y 軸方向の力のつりあいより，

$$0 = evB - eE\,, \quad \therefore E = vB\,.$$

(3)　電場と電位の関係より，

$$V = -Ef(x) = -vBf(x)\,.$$

(4)　キルヒホッフの法則より，

$$0 = V_0 - \frac{Q}{C} + vB\left(a\sin(kx) + b\right)\,, \qquad \therefore \frac{Q}{C} = V_0 + vBa\sin(kx) + vBb\,.$$

これが，振動中心 0 で振動すればよいので，

$$V_0 = -vBb\,.$$

また，このとき振動周期は $x = vt$ より，

$$T = \frac{2\pi}{kv}\,.$$

(5)　前問の結果を利用して，

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(CvBa\sin(kvt)\right) = -Cv^2Bak\cos(kvt)\,.$$

(6)　導体棒にはたらくアンペール力は，時刻 t の関数として，

$$F(t) = IMy = -Cv^2B^2ak\cos(kvt)\left\{a\sin(kvt) + b\right\}$$

と書ける．これとつりあうように外力を加えればよいので，

$$0 = F_{\mathrm{ex}}(t) + F(t)\,, \qquad \therefore F_{\mathrm{ex}} = Cv^2B^2ak\cos(kvt)\left\{a\sin(kvt) + b\right\}.$$

(7)　系のエネルギー保存則を考えて[*13],

$$\frac{1}{2}m{v_1}^2+\frac{1}{2}C(v_0Bb)^2=\frac{1}{2}m{v_0}^2+\frac{1}{2}C\{v_0B(a+b)\}^2$$
$$\therefore v_1=v_0\sqrt{\frac{m+CB^2(a+b)^2}{m+CB^2b^2}}\,.$$

[*13] 時間追跡できないのでエネルギー保存（収支）一択.

12. 磁場中を動く導体棒⑥（少し凝った入試問題，やりたい人だけ）

図のように，下向きの磁束密度の大きさが B の一様磁場を考える．この磁場中に，半径 a の円形レール二つを十分離して，磁場に対し垂直に固定する．それぞれの円形レールの上に，図のように金属棒をのせる．金属棒は円形レールと A，A$'$ で接しており，円形レールの中心 O，O$'$ のまわりを，自由に回転できるものとする．ここで，円形レールと導体棒の摩擦は無視する．電線を使い，図のような電気回路を作る．S はスイッチ，r と R は抵抗値が r と R の電気抵抗を意味する．また，電気抵抗 R の両端を C，D と呼ぶことにする．

右側の金属棒に外力を加え続け，図で示される方向に一定の角速度 ω で，常に回し続けるものとする．円形レール，金属棒，電線の電気抵抗は無視するものとして以下の問いに答えよ．

I　はじめに，スイッチ S を開いておく．

(1)　OA 間に発生する誘導起電力の大きさを求めよ．

(2)　抵抗 R に流れる電流の大きさを求めよ．また，その方向は「C → D」，「D → C」のいずれかであるか答えよ．

II　次に，左側の金属棒を動かないように固定し，スイッチ S を閉じる．

(1)　O$'$A$'$ 間を流れる電流の大きさを求めよ．また，その方向は「O$'$ → A$'$」，「A$'$ → O$'$」のいずれかであるか答えよ．

(2)　O$'$A$'$ 間に発生する金属棒を回そうとする力の方向は，右側の金属棒の回転の方向と「同方向」，「逆方向」のいずれであるか答えよ．

III　次に，左側の金属棒を自由にしたところ，一定の角速度 ω' で回転するようになった．

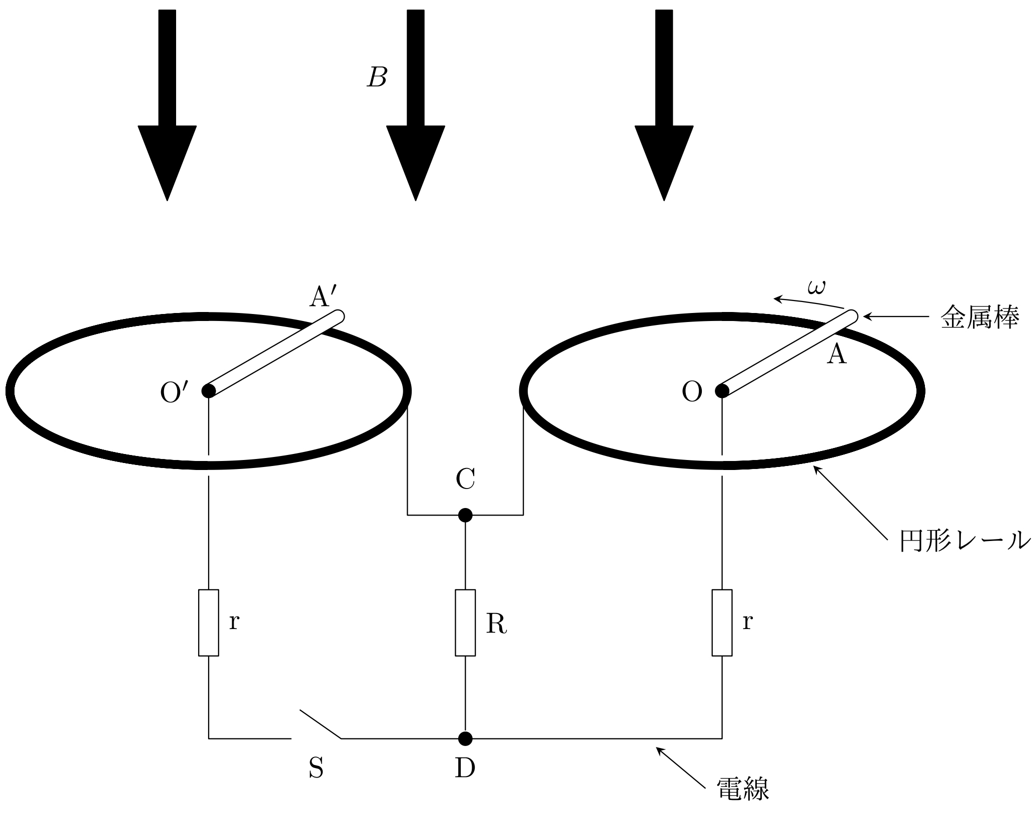
(1)　O$'$A$'$ 間を流れる電流の大きさを求めよ．

(2)　O$'$A$'$ 間に発生する誘導起電力の大きさを，ω，a，B を用いて表せ．また，この起電力によってつくられた電位は，O$'$，A$'$ のどちらが高いか答えよ．

(3)　ω' を ω，r，R を用いて表せ．

(4)　r を固定し，R を変化させることを考える．このとき，R の値が 0 の極限および無限大の極限で，ω' の値がどうなるか理由とともに簡単に述べよ．

(5)　左側の導体棒が運動をはじめてから一定角速度になる間の左側の導体棒の運動エネルギー変化量を ΔK，この間の回路で生じたジュール熱を J，外力がした仕事を W とする．ΔK，J，W の間に成り立つ関係式を求めよ．


B
A′
O′
ω
A
O
金属棒
C
円形レール
r
R
r
S
D
電線

【メモ】

2008 年筑波大より，一部設問の削除・追加を行った．回路の一部が運動するタイプの電磁誘導．回路の一部が運動する問題は，コンデンサでの議論と同じアプローチ．導体棒が動くタイプの電磁誘導は $vB\ell$ の公式で対処する．

【解答】

I (1)　OA 間に生じる起電力は，公式より，

$$V = \frac{1}{2}a^2\omega B\,.$$

(2)　キルヒホッフの法則より，

$$\frac{1}{2}a^2\omega B - rI - RI = 0\,,\quad I = \frac{a^2\omega B}{2(R+r)}\ (\mathrm{D}\to\mathrm{C})\,.$$

II (1)　OA 間に生じる起電力は，I(1) と同じである．キルヒホッフの法則・電荷保存則より，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}a^2\omega B - rI - R(I-I_1) = 0\,,\\ rI_1 - R(I-I_1) = 0\,,\end{cases}$$

$$\therefore I_1 = \frac{a^2\omega BR}{2r(2R+r)}\ (\mathrm{O'}\to\mathrm{A'})\,,\quad I = \frac{a^2\omega BR}{2(2R+r)}\left(1+\frac{R}{r}\right)\,.$$

(2)　同方向．

III (1)　角速度一定より，導体棒にはたらく力のモーメントの合計は 0 である．導体棒に寄与する力はアンペール力のみゆえ，$I_1 = 0$[*14]．

(2)　OA 間，O′A′ 間に生じる起電力はそれぞれ，

$$V_{\mathrm{AO}} = \frac{1}{2}a^2\omega B\,,\quad V_{\mathrm{A'O'}} = \frac{1}{2}a^2\omega' B\,.$$

キルヒホッフの法則より，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}a^2\omega B - rI - R(I-0) = 0\,,\\ \dfrac{1}{2}a^2\omega' B + r\cdot 0 - R(I-0) = 0\,,\end{cases}\qquad \therefore I = \frac{a^2\omega B}{2(R+r)}\,,\quad \omega' = \frac{R}{R+r}\omega\,.$$

よって，O′A′ 間に発生する誘導起電力の大きさは，キルヒホッフの法則より，

$$V_{\mathrm{A'O'}} = RI = \frac{a^2\omega BR}{2(R+r)}\ (\text{電位は O}'\text{が高い})\,.$$

*14 **補足 1** の (3) 式を参照するとよい．

(3)　(2) より,

$$\omega' = \frac{R}{R+r}\omega\,.$$

(4)　(3) より，それぞれ極限を取れば,

$$\lim_{R\to 0}\omega' = \lim_{R\to 0}\frac{R}{R+r}\omega = 0\,,$$
$$\lim_{R\to \infty}\omega' = \lim_{R\to \infty}\frac{1}{1+r/R}\omega = \omega\,.$$

(5)　系のエネルギー収支は,

$$\Delta K + J = W\,.$$

13. 自己誘導・相互誘導

図のように，両端が端子 A，B のソレノイドコイル 1（断面積 S，長さ ℓ，巻き数 N_1）の外側に接するように両端が端子 C，D のソレノイドコイル 2（断面積 S，巻き数 N_2）を巻く．コイル 1 に，端子 A → コイル→端子 B の向きに時間変化する電流 I を流す．コイル 1 の中は空であり，真空中にあるものとする．真空の透磁率を μ_0 とする．

I　コイル 1 の自己インダクタンス L を求めよ．

II　コイル 1 とコイル 2 の相互インダクタンス M を求めよ．

III　$I = kt$（k は定数）の場合を考える．

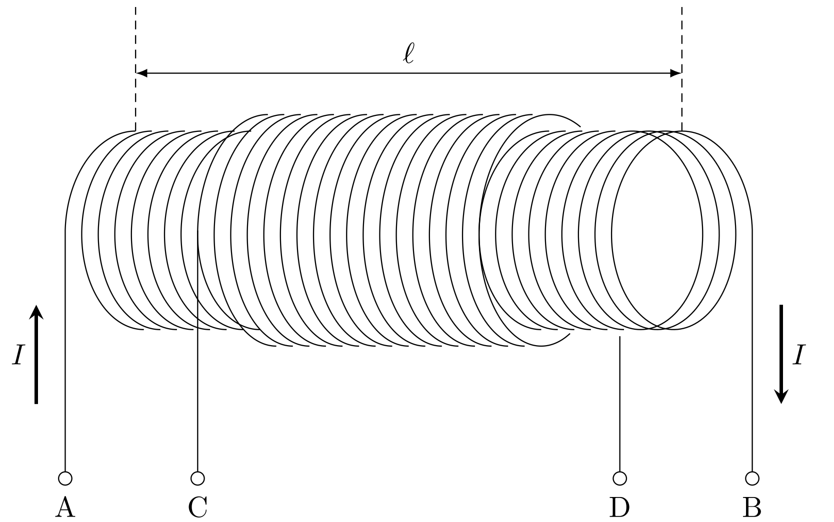
(1)　コイル 1 の端子 B に対する端子 A の電位 V_{BA} を求めよ．

(2)　コイル 2 の端子 D に対する端子 C の電位 V_{DC} を求めよ．

IV　$I = I_0 \cos(\omega t)$（ω は正の定数）の場合を考える．

(1)　コイル 1 の端子 A に対する端子 B の電位 V_{AB} を求めよ．

(2)　コイル 2 の端子 C に対する端子 D の電位 V_{CD} を求めよ．



ℓ
I
I
A
C
D
B

【メモ】

授業では，数値問題を扱った．

【解答】

I　コイル 1 内部の磁束密度は公式より，

$$B = \mu_0 \frac{N_1}{\ell} I\,.$$

コイル 1 に生じる誘導起電力はファラデイ則より，A →コイル→ B を正として，

$$\mathcal{E}_1 = -N_1 \frac{d}{dt}(BS) = -\mu_0 \frac{S{N_1}^2}{\ell} \frac{dI}{dt}\,.$$

よって，自己インダクタンスは，

$$L = \mu_0 \frac{S{N_1}^2}{\ell}\,.$$

II　コイル 2 に生じる誘導起電力はファラデイ則より，C →コイル→ D を正として，

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d}{dt}(BS) = -\mu_0 \frac{SN_1N_2}{\ell} \frac{dI}{dt}\,.$$

よって，相互インダクタンスは，

$$M = \mu_0 \frac{SN_1N_2}{\ell}\,.$$

III (1)　コイル 1 に生じる誘導起電力はファラデイ則より，A →コイル→ B を正として，

$$\mathcal{E}_1 = -N_1 \frac{d}{dt}(BS) = -\mu_0 \frac{S{N_1}^2}{\ell} \frac{dI}{dt} = -\mu_0 \frac{kS{N_1}^2}{\ell}\,.$$

よって，

$$V_{\mathrm{BA}} = -\mathcal{E}_1 = \mu_0 \frac{kS{N_1}^2}{\ell}\,.$$

(2)　コイル 2 に生じる誘導起電力はファラデイ則より，C →コイル→ D を正として，

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d}{dt}(BS) = -\mu_0 \frac{SN_1N_2}{\ell} \frac{dI}{dt} = -\mu_0 \frac{kSN_1N_2}{\ell}\,.$$

よって，

$$V_{\mathrm{DC}} = -\mathcal{E}_2 = \mu_0 \frac{kSN_1N_2}{\ell}\,.$$

IV (1)　コイル 1 に生じる誘導起電力はファラデイ則より，A →コイル→ B を正として，

$$\mathcal{E}_1 = -N_1 \frac{d}{dt}(BS) = -\mu_0 \frac{S{N_1}^2}{\ell} \frac{dI}{dt} = \mu_0 \frac{S{N_1}^2}{\ell} I_0 \omega \sin(\omega t).$$

よって，

$$V_{\mathrm{AB}} = +\mathcal{E}_1 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\mu_0 \frac{S{N_1}^2}{\ell} I_0 \omega \sin(\omega t)}.$$

(2)　コイル 2 に生じる誘導起電力はファラデイ則より，C →コイル→ D を正として，

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d}{dt}(BS) = -\mu_0 \frac{SN_1N_2}{\ell} \frac{dI}{dt} = \mu_0 \frac{SN_1N_2}{\ell} I_0 \omega \sin(\omega t).$$

よって，

$$V_{\mathrm{CD}} = +\mathcal{E}_2 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\mu_0 \frac{SN_1N_2}{\ell} I_0 \omega \sin(\omega t)}.$$

14. 時間変化する磁場

図 1 のような，コの字型導線の両端の端子 a，b には適当な素子を接続できるようになっている．素子を接続した後の閉回路の面積を S とする．空間内に，コの字型導線のある平面と垂直な方向に，時間変化する磁束密度 $B(t)$ をかけた．電流の正の向きを，b → a とする．以下の設問に答えよ．

I　磁束密度 $B(t)$ の時間変化が，図 2 のグラフで与えられる場合を考える．

(1)　a − b 間に抵抗値 R の抵抗を接続したとき，回路に流れる電流の時間変化をグラフにせよ．

(2)　a − b 間に容量 C の帯電していないコンデンサを接続したとき，コンデンサに蓄えられる電荷の時間変化をグラフにせよ．

(3)　a − b 間に自己インダクタンス L のコイルを接続したとき，回路に流れる電流の時間変化をグラフにせよ．

II　磁束密度 $B(t)$ の時間変化が，図 3 のグラフで与えられる場合を考える．

(1)　a − b 間に抵抗値 R の抵抗を接続したとき，回路に流れる電流の時間変化をグラフにせよ．

(2)　a − b 間に容量 C の帯電していないコンデンサを接続したとき，コンデンサに蓄えられる電荷の時間変化，および回路に流れる電流の時間変化をグラフにせよ．

(3)　a − b 間に自己インダクタンス L のコイルを接続したとき，回路に流れる電流の時間変化をグラフにせよ．

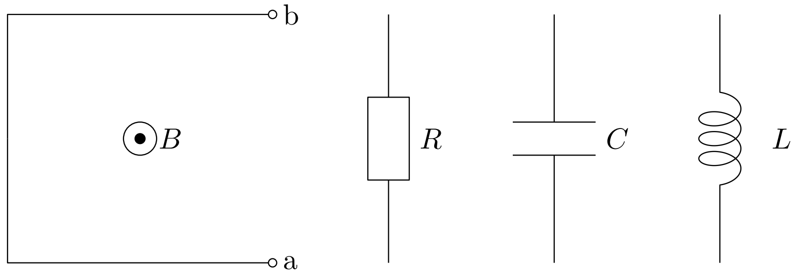


図 1

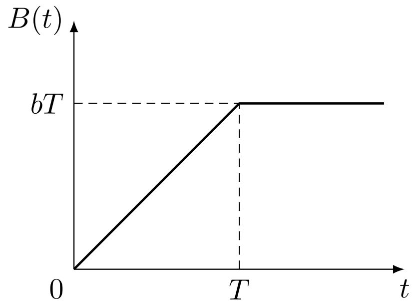


図 2

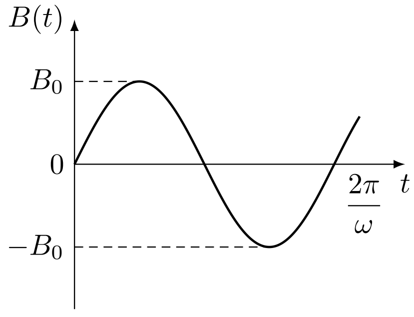


図 3

【メモ】

時間変化する磁場はファラデイ則一択.

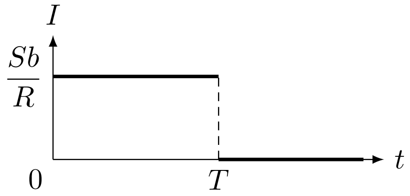
【解答】

I　磁束の正の向きを磁束密度の向きに定める．生じる誘導起電力はファラデイ則より，

$$\mathcal{E} = \begin{cases} -Sb & (0 \leq t \leq T)\,, \\ 0 & (T \leq t)\,. \end{cases}$$

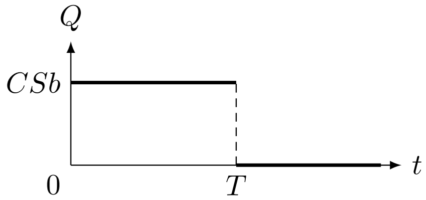
(1)　キルヒホッフ則より，

$$-\mathcal{E} - RI = 0\,, \qquad \therefore I = \begin{cases} \dfrac{Sb}{R} & (0 \leq t \leq T)\,, \\ 0 & (T \leq t)\,. \end{cases}$$



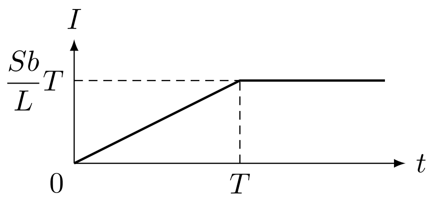
(2)　キルヒホッフ則より，

$$-\mathcal{E} - \frac{Q}{C} = 0\,, \qquad \therefore Q = \begin{cases} CSb & (0 \leq t \leq T)\,, \\ 0 & (T \leq t)\,. \end{cases}$$



(3)　キルヒホッフ則より，

$$-\mathcal{E} - L\frac{dI}{dt} = 0\,, \qquad \therefore I = \begin{cases} \dfrac{Sb}{L}t & (0 \leq t \leq T)\,, \\ \dfrac{Sb}{L}T & (T \leq t)\,. \end{cases}$$

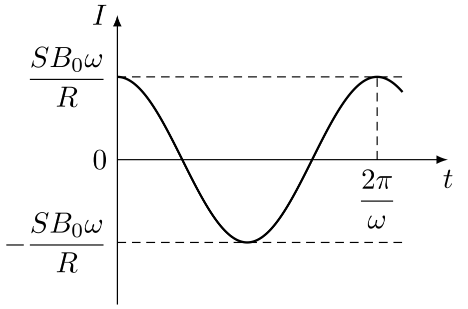


II　生じる誘導起電力はファラデイ則より，

$$\mathcal{E} = -SB_0\omega\cos(\omega t)\,.$$

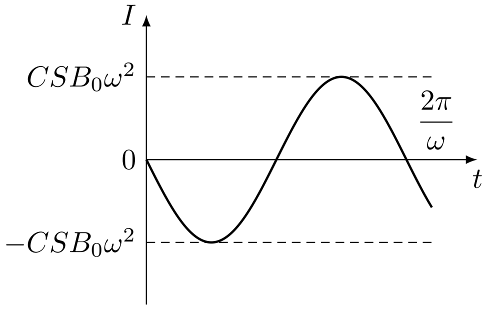
(1)　キルヒホッフ則より，

$$-\mathcal{E} - RI = 0\,,\qquad \therefore I = \frac{SB_0\omega}{R}\cos(\omega t)\,.$$



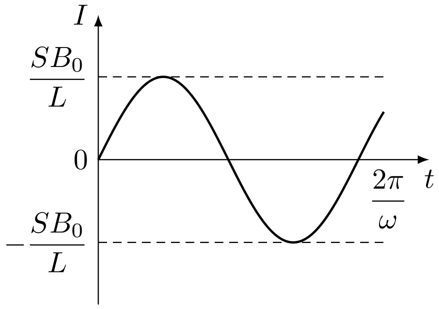
(2)　キルヒホッフ則より，

$$-\mathcal{E} - \frac{Q}{C} = 0\,,\qquad \therefore I = \frac{dQ}{dt} = -CSB_0\omega^2\sin(\omega t)\,.$$



(3)　キルヒホッフ則より，

$$-\mathcal{E} - L\frac{dI}{dt} = 0\,,\qquad \therefore I = \frac{SB_0}{L}\sin(\omega t)\,.$$



15. ベータトロン（時間変化する磁場）

図のように，x，y，z を軸とする直線直交座標をとる．この空間に，z 軸正の向きに，磁束密度の大きさ B_0 の磁場をかけた．$t=0$ において，電子（質量 m，電荷 $-e<0$）は xy 平面内で原点 O を中心とした半径 R の円周上を運動している．時刻 $t>0$ において，磁束密度を適当に時間変化させることで，軌道半径を一定に保ったまま電子を加速させることができる．磁束の正の向き[*15]を z 軸正の向きに定める．

(1)　時刻 $t=0$ において，電子の運動量の大きさ p を求めよ．

以下，$t>0$ を考える．時間 Δt 間に，半径 R の軌道内部を貫く磁束を $\Delta\Phi$ だけ変化させた．このとき，軌道上の磁束密度は ΔB だけ増加した．

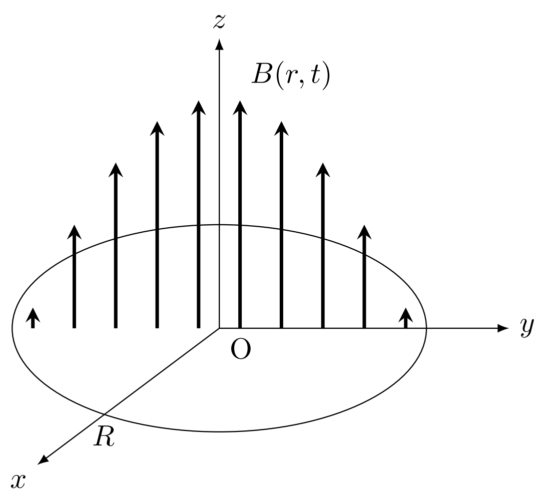
(1)　円軌道上に生じる誘導起電力 $\mathcal{E}$ を求めよ．

(2)　Δt 間に半径 R の円周上に生じる誘導電場 E の大きさと向きをそれぞれ求めよ．

(3)　運動方程式の接線成分を考えることで，電子の運動量変化 Δp を，$\Delta\Phi$ に比例する形で求めよ．

(4)　運動方程式の中心成分を考えることで，電子の運動量変化 Δp を，ΔB に比例する形で求めよ．

(5)　ΔB を，R，$\Delta\Phi$ を用いて表せ．



[*15] 磁束を定義するときの法線ベクトルの正の向き．

【メモ】

ファラデイ則から計算した誘導起電力から誘導電場を逆算する．ベータトロンは入試の前には一度は触っておきたいテーマ．分類としては，電磁誘導が関係する非等速円運動である[*16].

【解答】

(1)　運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{v^2}{R} = evB\,, \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim}{\frac{eBR}{m}}\,.$$

回転方向は z 軸正の向きから見て反時計回り.

(2)　ファラデイ則より，

$$\mathcal{E} = -\frac{\varDelta\varPhi}{\varDelta t}\,.$$

(3)　電場と電位の関係より，

$$E\cdot 2\pi R = |\mathcal{E}|\,, \qquad \therefore E = \frac{1}{2\pi R}\frac{\varDelta\varPhi}{\varDelta t}\,.$$

向きは z 軸正の向きから見て時計回り.

(4)　運動方程式（接線成分）より，

$$\frac{\varDelta p}{\varDelta t} = eE = \frac{e}{2\pi R}\frac{\varDelta\varPhi}{\varDelta t}\,, \qquad \therefore \varDelta p = \frac{e}{2\pi R}\varDelta\varPhi\,.$$

(5)　運動方程式（中心成分）より，

$$\frac{1}{m}\frac{(p+\varDelta p)^2}{R} = \frac{1}{m}e(p+\varDelta p)(B+\varDelta B)\,, \qquad \therefore \varDelta p = eR\varDelta B\,.$$

(6)　運動方程式より，

$$\varDelta B = \frac{1}{2\pi R^2}\varDelta\varPhi\,.$$

[*16] 非等速円運動ゆえ，運動方程式の中心成分，接線成分（力学的エネルギー保存則と同値）を立てる．

§4.3 電気回路②

この章では，コイルを含む電気回路・交流回路を扱う．異種素子が 2 つ以上直列となっている交流回路のみ解法が例外的になることだけ注意．

■簡単なまとめ

- 電気回路状態決定，

$$\begin{cases} \text{キルヒホッフ則} \\ \text{電荷保存則} \\ \text{回路素子の性質} \end{cases}$$

ただし，交流回路でかつ異種素子が 2 つ以上直列となっているときは例外的に，キルヒホッフ則を素直に解くことで電流 I を求めるのではなく，解を $I = I_0 \sin(\omega t + \theta)$ のように仮定し，キルヒホッフ則へ代入することで I_0，θ を求めるようにして I を求める．

- コイルの性質：

電位降下　→　$V = L\dfrac{dI}{dt}$

エネルギー　→　エネルギー $U = \dfrac{1}{2}LI^2$ を蓄える．

素子の性質　→　スイッチの切り替え前後で電流の値が同じ値を取る（電流の連続性）．「十分時間経過」で $I =$（一定），コイルの電位差 $L\dfrac{dI}{dt} = 0$．

1. コイルを含む回路①

図のように，電源（起電力 E，内部抵抗無視），抵抗 1（抵抗値 R），抵抗 2（抵抗値 $2R$），コイル（自己インダクタンス L），スイッチ $\mathrm{S_1}$，スイッチ $\mathrm{S_2}$ を組み合わせた回路を考える．はじめスイッチはすべて開いている．

I　$\mathrm{S_1}$ のみを閉じた．

(1)　閉じた直後，回路に流れる電流の大きさ I_1 を求めよ．

(2)　閉じてから十分時間が経過した後，回路に流れる電流の大きさ I_2 を求めよ．

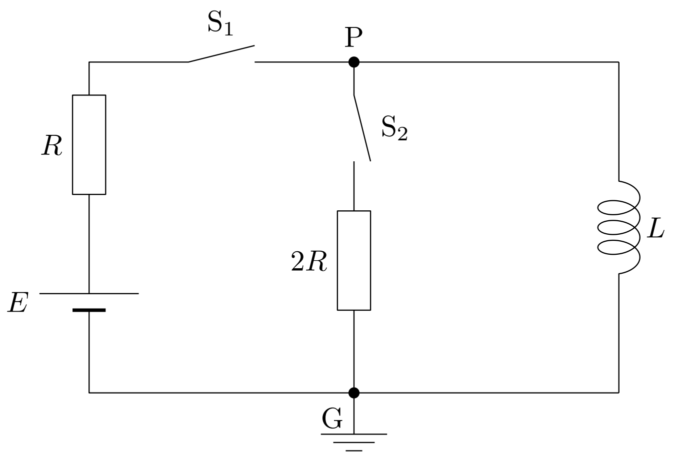
(3)　閉じた時刻を $t=0$ とする．時刻 t において回路を流れる電流の大きさ I を時刻 t の関数として求めよ．

II　$\mathrm{S_1}$ を閉じてから十分時間が経過した後，$\mathrm{S_2}$ を閉じた．

(1)　閉じた直後の P の電位を求めよ．

(2)　閉じてから十分時間が経過した後の P の電位を求めよ．

III　II に続いて $\mathrm{S_1}$ を開いた．閉じてから十分時間が経過した後，抵抗 2 で生じたジュール熱 J を求めよ．



【メモ】

コイルの性質は，電位降下が $L\dfrac{dI}{dt}$，エネルギーは $\dfrac{1}{2}LI^2$ 蓄え，電流の連続性，十分時間経過で電位降下 0 の 4 つを暗記する．

【解答】

I　キルヒホッフ則より，

$$E - RI - L\frac{dI}{dt} = 0\,.$$

(1)　コイルの性質（電流の連続性）より，

$$I_1 = 0\,.$$

(2)　コイルの性質より，十分時間経過後は $L\dfrac{dI}{dt} = 0$ である．キルヒホッフ則より，

$$I_2 = \frac{E}{R}\,.$$

(3)　キルヒホッフ則より，

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}\left(I - \frac{E}{R}\right)\,.$$

この微分方程式の解は指数関数であり，初期条件 $I = 0$ を考慮すれば，

$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

II　キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} E - R(I+i) - L\dfrac{dI}{dt} = 0\,, \\ E - R(I+i) - 2Ri = 0\,. \end{cases}$$

(1)　コイルの性質（電流の連続性）より $I = \dfrac{E}{R}$ である．キルヒホッフ則より，

$$i = 0\,,\quad L\frac{dI}{dt} = 0\,.$$

よって，P の電位は，

$$\phi_{\mathrm{P}} = +L\frac{dI}{dt} = 0\,.$$

(2)　コイルの性質より，十分時間経過後は $L\dfrac{dI}{dt} = 0$ である．よって，P の電位は，

$$\phi_{\mathrm{P}} = +L\frac{dI}{dt} = 0\,.$$

III　II の十分時間経過時，コイルの性質から $L\dfrac{dI}{dt}=0$ ゆえキルヒホッフ則より，

$$I=\frac{E}{R}\,,\quad i=0\,.$$

系のエネルギー収支を考えて，

$$\Delta U_{\mathrm{L}}+J=0\,,\qquad \therefore J=-\Delta U_{\mathrm{L}}=\frac{1}{2}L\left(\frac{E}{R}\right)^2.$$

2. コイルを含む回路②

図のように，電源（起電力 E，内部抵抗無視），コンデンサ 1（容量 $2C$），コンデンサ 2（容量 C），コイル（自己インダクタンス L），スイッチ $\mathrm{S_1}$，$\mathrm{S_2}$，$\mathrm{S_3}$ を組み合わせた回路を考える．はじめスイッチはすべて開いており，すべてのコンデンサは帯電していない．

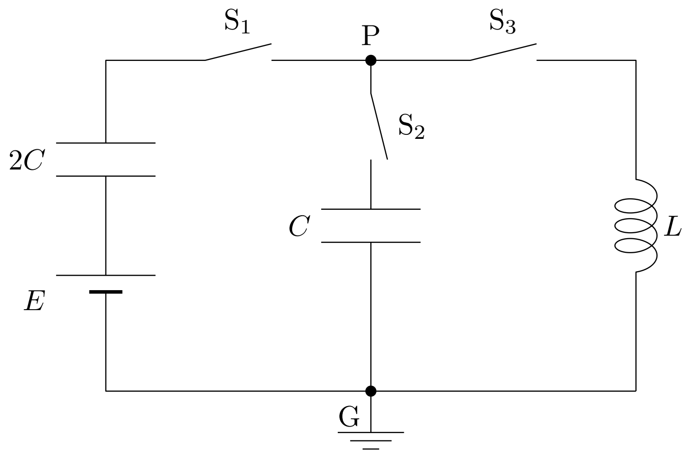
I　$\mathrm{S_1}$，$\mathrm{S_2}$ を閉じた．閉じてから十分時間が経過した後，コンデンサ 1 に蓄えられている電気量 Q_1 を求めよ．

II　$\mathrm{S_1}$，$\mathrm{S_2}$ を閉じてから十分時間が経過した後，$\mathrm{S_1}$ を開き $\mathrm{S_3}$ を閉じた．このとき，回路には振動する電流が流れた．

(1)　振動の周期 T を求めよ．

(2)　コンデンサに蓄えられる電荷 Q を，時刻 t の関数として表せ．

(3)　$Q = \dfrac{1}{4}Q_1$ のとき，コイルに流れる電流の大きさ I を求めよ．



【解答】

I　キルヒホッフ則・電荷保存則より，

$$\begin{cases} E - \dfrac{Q_1}{C} - \dfrac{Q_2}{2C} = 0\,, \\ -Q_1 + Q_2 = 0\,, \end{cases} \qquad Q_1 = Q_2 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{2}{3}CE}\,.$$

II (1)　キルヒホッフ則より，

$$\frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} = 0\,.$$

ここで，$I = \dfrac{dQ}{dt}$ より，

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}Q\,.$$

よって，振動の周期 T は，

$$T = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{\sqrt{LC}}}\,.$$

(2)　初期条件 $Q(0) = \dfrac{2}{3}CE$，$I(0) = 0$ より，

$$Q = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{2}{3}CE\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)}\,.$$

(3)　エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2C}\left(\frac{1}{6}CE\right)^2 + \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2C}\left(\frac{2}{3}CE\right)^2 + 0\,, \qquad \therefore I = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{5}{12}\frac{C}{L}E^2}}\,.$$

3. 交流回路

交流電源（電源電圧 $V_0 \sin(\omega t)$）に素子を繋いだとき，電源を流れる電流 I について以下の各場合で求めよ．なお，必要な文字は各自適当に導入せよ．

I　素子を 1 つだけ繋ぐ．

(1)　抵抗（抵抗値 R）

(2)　コンデンサ（容量 C）

(3)　コイル（自己インダクタンス L）

II　素子を 2 つ並列につなぐ．

(1)　抵抗（抵抗値 R）とコンデンサ（容量 C）

(2)　抵抗（抵抗値 R）とコイル（自己インダクタンス L）

(3)　コンデンサ（容量 C）とコイル（自己インダクタンス L）

III　素子を 2 つ直列につなぐ．

(1)　抵抗（抵抗値 R）とコンデンサ（容量 C）

(2)　抵抗（抵抗値 R）とコイル（自己インダクタンス L）

(3)　コンデンサ（容量 C）とコイル（自己インダクタンス L）

【メモ】

3 つの並列，直列は授業内で扱っています．

【解答】

I (1)　キルヒホッフ則より，

$$V_0\sin(\omega t) - RI = 0\,,\qquad \therefore I = \underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{V_0}{R}\sin(\omega t)}\,.$$

(2)　キルヒホッフ則より，

$$V_0\sin(\omega t) - \frac{Q}{C} = 0\,,\qquad \therefore I = \frac{dQ}{dt} = C\omega V_0\cos(\omega t)\,.$$

(3)　キルヒホッフ則より[*17]，

$$V_0\sin(\omega t) - L\frac{dI}{dt} = 0\,,\qquad \therefore I = \int \frac{V_0}{L}\sin(\omega t)\,dt = -\frac{V_0}{L\omega}\cos(\omega t)\,.$$

II (1)　キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} V_0\sin(\omega t) - RI_{\mathrm{R}} = 0\,, \\ V_0\sin(\omega t) - \dfrac{Q}{C} = 0\,, \end{cases}\qquad \therefore I = I_{\mathrm{R}} + \frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R}\sin(\omega t) + C\omega V_0\cos(\omega t)\,.$$

(2)　キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} V_0\sin(\omega t) - RI_{\mathrm{R}} = 0\,, \\ V_0\sin(\omega t) - L\dfrac{dI_{\mathrm{L}}}{dt} = 0\,, \end{cases}\qquad \therefore I = I_{\mathrm{R}} + I_{\mathrm{L}} = \frac{V_0}{R}\sin(\omega t) - \frac{V_0}{L\omega}\cos(\omega t)\,.$$

(3)　キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} V_0\sin(\omega t) - \dfrac{Q}{C} = 0\,, \\ V_0\sin(\omega t) - L\dfrac{dI_{\mathrm{L}}}{dt} = 0\,, \end{cases}\qquad \therefore I = \frac{dQ}{dt} + I_{\mathrm{L}} = \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)V_0\cos(\omega t)\,.$$

III　回路に流れる電流を $I = I_0\sin(\omega t - \theta)$ と仮定する．

(1)　キルヒホッフ則より，

$$\begin{aligned} V_0\sin(\omega t) &= RI_0\sin(\omega t - \theta) + \frac{1}{C}\left(-\frac{I_0}{\omega}\cos(\omega t - \theta)\right) \\ &= I_0\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}\,\sin(\omega t - \theta - \alpha)\,. \end{aligned}$$

[*17] 積分定数は 0 である（詳細は授業内で）．

ここで，$\tan\alpha = \dfrac{1}{\omega RC}$ である．任意の時刻 t で上記等式が成立すればよく，

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}\,,\quad \theta = -\alpha\,.$$

よって，

$$I = \underline{\frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}\sin(\omega t + \alpha)}\,,\quad \underline{\tan\alpha = \frac{1}{\omega RC}}\,.$$

(2)　キルヒホッフ則より，

$$\begin{aligned} V_0\sin(\omega t) &= RI_0\sin(\omega t - \theta) + L\omega I_0\cos(\omega t - \theta) \\ &= I_0\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}\,\sin(\omega t - \theta + \beta)\,. \end{aligned}$$

ここで，$\tan\beta = \dfrac{L\omega}{R}$ である．任意の時刻 t で上記等式が成立すればよく，

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}\,,\quad \theta = \beta\,.$$

よって，

$$I = \underline{\frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}\sin(\omega t - \beta)}\,,\quad \underline{\tan\alpha = \frac{L\omega}{R}}\,.$$

(3)　キルヒホッフ則より，

$$\begin{aligned} V_0\sin(\omega t) &= \frac{1}{C}\left(-\frac{I_0}{\omega}\cos(\omega t - \theta)\right) + L\omega I_0\cos(\omega t - \theta) \\ &= I_0\left(-\frac{1}{C\omega} + L\omega\right)\sin\left(\omega t - \theta + \frac{\pi}{2}\right)\,. \end{aligned}$$

任意の時刻 t で上記等式が成立すればよく，

$$I_0 = \frac{V_0}{-\dfrac{1}{C\omega} + L\omega}\,,\quad \theta = \frac{\pi}{2}\,.$$

よって，

$$I = \underline{-\frac{V_0}{-\dfrac{1}{C\omega} + L\omega}\cos(\omega t)}\,.$$

4. 電気回路の総点検

図のように，電源 $\mathrm{E}_i\ (i=1,2,3)$，抵抗 R（電気抵抗 R），コンデンサ C（電気容量 C），コイル L（自己インダクタンス L），スイッチ S_1，スイッチ S_2，スイッチ S_3 を導線でつないだ回路について考える．はじめ，スイッチはすべて開いており，C に電荷は蓄えられていなかった．スイッチおよび導線の抵抗は無視できるものとする．

〔A〕　電源に，直流電源 E_1 を接続した場合を考える．点Gに対する点Aの電位は E である．

I　S_1 を閉じたあと，S_3 を閉じた．この時刻を $t=0$ とする．

(1)　S_3 を閉じた直後に，R を流れる電流の大きさ I_0 を求めよ．

(2)　R を流れる電流の大きさが $\dfrac{E}{2R}$ のとき，点 G に対する点 P の電位 V_{GP} を求めよ．

(3)　R を流れる電流の大きさ I を，時刻 t の関数として表せ．また，S_3 を閉じて十分時間が経過したとき，R を流れる電流の大きさ I_1 を求めよ．

II　I に続き，S_3 を開き，S_2 を閉じた．この時刻を改めて $t=0$ とする．

(1)　S_2 を閉じた直後に，R を流れる電流の大きさ I_2 を求めよ．

(2)　C の帯電量が $\dfrac{1}{3}CE$ のとき，R を流れる電流の大きさ I_3 を求めよ．

(3)　C に蓄えられている電荷 Q を，時刻 t の関数として表せ．また，S_2 を閉じて十分時間が経過したとき，R を流れる電流の大きさ I_4，および C に蓄えられている電荷 Q_0 をそれぞれ求めよ．

(4)　S_2 を閉じて十分時間が経過するまでの間に，R で生じたジュール熱 J_0 を求めよ．

III　II に続き，S_3 を閉じた．この時刻を改めて $t=0$ とする．

(1)　S_3 を閉じた直後に，R を流れる電流の大きさ I_5 を求めよ．

(2)　点 G に対する点 P の電位が $\dfrac{1}{2}E$ のとき，R を流れる電流の大きさ I_6，および C に蓄えられている電荷 Q_1 を求めよ．

(3)　S_2 を閉じて十分時間が経過したとき，C に蓄えられているエネルギー U_{C}，および L に蓄えられているエネルギー U_{L} をそれぞれ求めよ．

IV　再び II の十分時間が経過した後と同じ状況にした後，S_1 を開き，S_3 を閉じた．この時刻を改めて $t=0$ とする．

(1)　C に蓄えられている電荷 Q を，時刻 t の関数として表せ．

(2)　L を流れる電流が $\dfrac{E}{2R}$ のとき，C に蓄えられている電荷 Q_3 の大きさ $|Q_3|$ を求めよ．

〔B〕　電源に，可変電源 E_2 を接続した場合を考える．

I　S_1 を閉じたあと，S_3 を閉じた．この時刻を $t=0$ とする．時刻 $t=0$ から $t=T$ までの間，点 G に対する点 P の電位が $kE\,(0<k<1)$ となるように E_2 の起電力を調整した．

(1)　時刻 $t=0$ から $t=T$ における E_2 の起電力 $E(t)$ を，時刻 t の関数として表せ．

(2)　時刻 $t=0$ から $t=T$ までの間に，R で発生したジュール熱 J を求めよ．

II　〔B〕I に続き，S_3 を開き，S_2 を閉じた．この時刻を改めて $t=0$ とする．時刻 $t=0$ から $t=T$ までの間，R に一定の電流が流れるように E_2 の起電力を調整したところ，C の電圧は E となった．

(1)　時刻 $t=0$ から $t=T$ における E_2 の起電力 $E(t)$ を，時刻 t の関数として表せ．

(2)　時刻 $t=0$ から $t=T$ までの間に，E_2 がした仕事 W を求めよ．

〔C〕　電源に，交流電源 E_3（電源振幅 V_0，角周波数 ω）を接続した場合を考える．時刻 t において，点 G に対する点 A の電位は $V(t)=V_0\sin\omega t$ である．

I　S_1 を閉じたあと，S_2 を閉じた場合を考える．このとき，R に流れる電流は定数 I_{RC}，θ_{RC} を用いて，$I(t)=I_{\mathrm{RC}}\sin(\omega t-\theta_{\mathrm{RC}})$ となった．

(1)　I_{RC}，$\tan\theta_{\mathrm{RC}}$ をそれぞれ求めよ．また，回路のインピーダンス Z_{RC} を求めよ．

(2)　R における平均消費電力 P_{R} を求めよ．

II　S_1 を閉じたあと，S_3 を閉じた場合を考える．このとき，R に流れる電流は定数 I_{RL}，θ_{RL} を用いて，$I(t)=I_{\mathrm{RL}}\sin(\omega t-\theta_{\mathrm{RL}})$ となった．

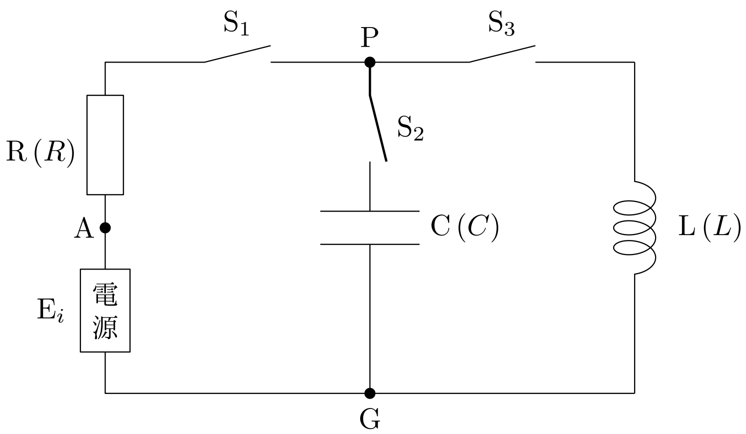
(1)　I_{RL}，$\tan\theta_{\mathrm{RL}}$ をそれぞれ求めよ．また，回路のインピーダンス Z_{RL} を求めよ．

III　S_2，S_3 を閉じたあと，S_1 を閉じた場合を考える．このとき，L に流れる電流は定数 I_{L}，θ_{L} を用いて，$I_{\mathrm{L}}(t)=I_{\mathrm{L}}\sin(\omega t-\theta_{\mathrm{L}})$ となった．

(1)　C に流れる電流 $I_{\mathrm{C}}(t)$ を，I_{L}，θ_{L} を含む形で求めよ．

(2)　I_{L}，θ_{L} をそれぞれ求めよ．

(3)　角周波数 ω を調節することで，R に流れる電流が任意の時刻 t で 0 となった．このときの ω を求めよ．


S$_1$
P
S$_3$
S$_2$
R (R)
A
C (C)
L (L)
E$_i$
電源
G

【メモ】

電気回路における基本的な素子（電池，抵抗，コンデンサ，コイル）の扱いについて，様々な起電力の形式で確認．

【解答】

〔A〕　キルヒホッフ則より，

$$E - RI - L\frac{dI}{dt} = 0\,.$$

今の場合，電荷保存則は不要なため，この式と回路素子の性質をもとに議論していけばよい．

I (1)　コイルの性質である電流の連続性から，$I_0 = \underset{\sim}{0}$．

(2)　キルヒホッフ則に $I = \dfrac{E}{2R}$ を代入して，

$$E - \frac{1}{2}E - L\frac{dI}{dt} = 0\,, \quad \therefore V_{\mathrm{GP}} = L\frac{dI}{dt} = \underset{\sim\sim}{\frac{1}{2}E}\,.$$

(3)　まず，十分時間が経過した後のことを考える．素子の性質から，コイルの電位降下は $L\dfrac{dI}{dt} = 0$ となる．したがって，キルヒホッフ則より，

$$E - RI - 0 = 0\,, \quad \therefore I_1 = \underset{\sim}{\frac{E}{R}}\,.$$

続いて，時刻 t における電流 I は，キルヒホッフ則より，

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}\left(I - \frac{E}{R}\right)\,.$$

これは速度に比例した空気抵抗を受ける物体の運動を表す方程式と同じ形の微分方程式となっている．この微分方程式を解いて，

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= -\frac{R}{L}\left(I - \frac{E}{R}\right) \\ \int \frac{dI}{I - E/R} &= -\int \frac{R}{L}\,dt \\ I - \frac{E}{R} &= \alpha e^{-\frac{R}{L}t}\,. \end{aligned}$$

ここで，初期条件 $I(0) = 0$ より，$\alpha = -\dfrac{E}{R}$ となり，

$$I(t) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}\,.$$

十分時間が経過した時を考えれば，

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{E}{R}$$

となり，暗記した素子の性質による結果と一致していることが確認できる．

II　キルヒホッフ則より，

$$E - RI - \frac{Q}{C} = 0\,.$$

(1)　S_2 を閉じた直後，コンデンサの帯電量が $Q = 0$ のため，キルヒホッフ則より，

$$E - RI - 0 = 0\,,\quad \therefore I_2 = \frac{E}{R}\,.$$

(2)　キルヒホッフ則に $Q = \frac{1}{3}CE$ を代入して，

$$E - RI - \frac{1}{3}E = 0\,,\quad \therefore I_3 = \frac{2E}{3R}\,.$$

(3)　まず，十分時間が経過した後のことを考える．素子の性質から，コンデンサに流れる電流の大きさは $I_4 = 0$ となる．したがって，キルヒホッフ則より，

$$E - 0 - \frac{Q}{C} = 0\,,\quad \therefore Q_0 = CE\,.$$

続いて，時刻 t における電荷 Q は，$I = \frac{dQ}{dt}$ を考慮してキルヒホッフ則より，

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= -\frac{1}{RC}(Q - CE) \\ \int \frac{dQ}{Q - CE} &= -\int \frac{1}{RC}\,dt \\ Q - CE &= \alpha e^{-\frac{t}{RC}}\,. \end{aligned}$$

ここで，初期条件 $Q(0) = 0$ より，$\alpha = -CE$ となり，

$$Q(t) = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

十分時間が経過した時を考えれば，

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} Q(t) &= \lim_{t\to\infty} CE\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = CE\,, \\ \lim_{t\to\infty} I(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = 0 \end{aligned}$$

となり，暗記した素子の性質による結果と一致していることが確認できる．

(4)　コンデンサの蓄えるエネルギーを U_{C}，抵抗で生じるジュール熱を J，起電力のした仕事を W とすると，回路のエネルギー収支は次のようになる．

$$W = \varDelta U_{\mathrm{C}} + J\,.$$

ここで，電池のした仕事，およびコンデンサの静電エネルギーはそれぞれ公式より，

$$\begin{aligned} W &= \varDelta QV = CE^2\,, \\ \varDelta U_{\mathrm{C}} &= \frac{1}{2}\frac{(CE)^2}{C} - 0 = \frac{1}{2}CE^2\,, \end{aligned}$$

と計算できるので，したがって，

$$J = \underline{\frac{1}{2}CE^2}\,.$$

III　キルヒホッフ則・電荷保存則より，

$$\begin{cases} E - RI - L\dfrac{dI_{\mathrm{L}}}{dt} = 0\,, \\ E - RI - \dfrac{Q}{C} = 0\,, \\ I = I_{\mathrm{C}} + I_{\mathrm{L}}\,. \end{cases}$$

ここで，I_{C}，I_{L} はそれぞれ，コンデンサとコイルを流れる電流である．

(1)　コイルの性質である電流の連続性から，$I_5 = \underline{0}$.

(2)　キルヒホッフ則に $V_{\mathrm{GP}} = L\dfrac{dI_{\mathrm{L}}}{dt} = \dfrac{Q}{C} = \dfrac{1}{2}E$ を代入して，

$$I_6 = \underline{\frac{E}{2R}}\,, \quad Q_1 = \underline{\frac{1}{2}CE}\,.$$

このときのコンデンサ，およびコイルに流れる電流は，微分方程式を解かない限り求まらない．

(3)　まず，十分時間が経過した後のことを考える．素子の性質から，コンデンサに流れる電流の大きさは $I_{\mathrm{C}} = 0$ となる．また，コイルの電位降下は $L\dfrac{dI_{\mathrm{L}}}{dt} = 0$ となる．したがって，キルヒホッフ則より，

$$\begin{cases} E - RI - 0 = 0\,, \\ E - RI - \dfrac{Q}{C} = 0\,, \\ I = 0 + I_{\mathrm{L}}\,, \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} I = I_{\mathrm{L}} = \dfrac{E}{R}\,, \\ Q = 0\,. \end{cases}$$

したがって，コンデンサ，およびコイルの蓄えるエネルギーはそれぞれ，

$$U_{\mathrm{C}} = \underline{0}\,, \quad U_{\mathrm{L}} = \underline{\frac{LE^2}{2R^2}}\,.$$

IV　キルヒホッフ則より，

$$\frac{Q}{C}+L\frac{dI}{dt}=0$$

ここでは，コンデンサに蓄えられる電荷については上側を正，回路を流れる電流については反時計回りを正として考える．

(1)　電荷の正の側と電流の正の向きに注意して，$I=\frac{dQ}{dt}$ となっていることからキルヒホッフ則より，

$$\frac{d^2Q}{dt^2}=-\frac{1}{LC}Q\,.$$

したがって，電荷 Q は，振動中心 $Q=0$，角振動数 $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ の単振動をすることがわかる．単振動の微分方程式の解より，初期条件から決定する未知定数を A，B として，

$$Q(t)=0+A\sin\omega t+B\cos\omega t$$

と書け，$Q(0)=CE$，$I(0)=0$ より，

$$Q(t)=CE\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right).$$

(2)　回路のエネルギー保存則より[*18]，

$$\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}+\frac{1}{2}L\left(\frac{E}{2R}\right)^2=\frac{1}{2}\frac{(CE)^2}{C}+0\,,\quad \therefore |Q_3|=CE\sqrt{1-\frac{L}{4CR^2}}\,.$$

〔B〕　I　キルヒホッフ則より，

$$E(t)-RI-L\frac{dI}{dt}=0\,.$$

(1)　$V_{\mathrm{GP}}=L\frac{dI}{dt}=kE$ より，初期条件を考慮して，

$$I(t)=\frac{kE}{L}t\,.$$

よって，キルヒホッフ則より，

$$E(t)=\frac{kER}{L}\left(t+\frac{L}{R}\right).$$

(2)　起電力のした仕事が積分を用いた計算しかないため，ジュール熱の逆算をする意味はない．よって，定義から，

$$J=\int_0^T I^2R\,dt=\int_0^T\left(\frac{kE}{L}\right)^2Rt^2\,dt=\frac{R}{3}\left(\frac{kE}{L}\right)^2.$$

[*18] 今の場合，時間追跡できない（有名角でない角度でやろうと思えばできなくもないが…）．

II　キルヒホッフ則より，

$$E(t) - RI - \frac{Q}{C} = 0\,.$$

(1)　$\dfrac{dQ}{dt} = \mathrm{const}$ より，$t = T$ における $\dfrac{Q(T)}{C} = E$ を考慮して，

$$\frac{Q(t)}{C} = \frac{E}{T}t\,.$$

よって，キルヒホッフ則より，

$$E(t) = \underline{\frac{RE}{T}\left(t + \frac{1}{RC}\right)}\,.$$

(2)　ジュール熱は定義から，

$$J = I^2 R \times T = \frac{R(CE)^2}{T}\,.$$

C の蓄えるエネルギーは，

$$U_{\mathrm{C}} = \frac{(CE)^2}{2C} = \frac{1}{2}CE^2\,.$$

よって，回路のエネルギー収支より，

$$W = \mathit{\Delta} U_{\mathrm{C}} + J = \underline{\left(\frac{1}{2} + \frac{RC}{T}\right)CE^2}\,.$$

〔C〕　I　キルヒホッフ則より，

$$V_0 \sin\omega t - RI - \frac{Q}{C} = 0\,.$$

(1)　キルヒホッフ則に $I(t) = I_{\mathrm{RC}}\sin(\omega t - \theta_{\mathrm{RC}})$ を代入して，

$$\begin{aligned} V_0 \sin\omega t &= RI_{\mathrm{RC}}\sin(\omega t - \theta_{\mathrm{RC}}) - \frac{I_{\mathrm{RC}}}{C\omega}\cos(\omega t - \theta_{\mathrm{RC}}) \\ &= I_{\mathrm{RC}}\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}\sin(\omega t - \theta_{\mathrm{RC}} + \alpha)\,. \end{aligned}$$

この両辺が一致すればよく，

$$I_{\mathrm{RC}} = \underline{\frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}}}\,,\quad \tan\theta_{\mathrm{RC}} = \tan\alpha = \underline{-\frac{1}{RC\omega}}\,.$$

また，振幅の関係から，インピーダンス Z_{RC} は，

$$Z_{\mathrm{RC}} = \underline{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}}\,.$$

(2)　平均消費電力は，その定義から，

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{R}} &= \frac{1}{T}\int_0^T I(t)^2 R\,dt \\
&= \frac{{I_{\mathrm{RC}}}^2 R}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t+\alpha)\,dt \\
&= \underset{\sim\sim\sim}{\frac{{V_0}^2 R}{2}\left[R^2+\left(\frac{1}{C\omega}\right)^2\right]^{-1}}\,.
\end{aligned}$$

II　キルヒホッフ則より，

$$V_0\sin\omega t - RI - L\frac{dI}{dt} = 0\,.$$

(1)　キルヒホッフ則に $I(t)=I_{\mathrm{RL}}\sin(\omega t-\theta_{\mathrm{RL}})$ を代入して，

$$\begin{aligned}
V_0\sin\omega t &= RI_{\mathrm{RL}}\sin(\omega t-\theta_{\mathrm{RL}}) + L\omega I_{\mathrm{RL}}\cos(\omega t-\theta_{\mathrm{RL}}) \\
&= I_{\mathrm{RL}}\sqrt{R^2+(L\omega)^2}\sin(\omega t-\theta_{\mathrm{RL}}+\beta)\,.
\end{aligned}$$

この両辺が一致すればよく，

$$I_{\mathrm{RL}} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}\,,\quad \tan\theta_{\mathrm{RL}} = \tan\beta = \frac{L\omega}{R}\,,\quad Z_{\mathrm{RL}} = \sqrt{R^2+(\omega L)^2}\,.$$

III　キルヒホッフ則・電荷保存則より，

$$\begin{cases}
V_0\sin\omega t - RI - L\dfrac{dI_{\mathrm{L}}}{dt} = 0\,, \\
V_0\sin\omega t - RI - \dfrac{Q}{C} = 0\,, \\
I = I_{\mathrm{C}} + I_{\mathrm{L}}\,.
\end{cases}$$

(1)　キルヒホッフ則に $I_{\mathrm{L}}(t)=I_{\mathrm{L}}\sin(\omega t-\theta_{\mathrm{L}})$ を代入して，

$$\begin{aligned}
&\frac{Q(t)}{C} = -L\frac{dI}{dt} = -L\omega I_{\mathrm{L}}\cos(\omega t-\theta_{\mathrm{L}})\,, \\
&\therefore I_{\mathrm{C}}(t) = -LC\omega^2 I_{\mathrm{L}}\sin(\omega t-\theta_{\mathrm{L}})\,.
\end{aligned}$$

(2)　キルヒホッフ則と電荷保存則より，

$$\begin{aligned}
V_0\sin\omega t &= R(I_{\mathrm{L}}+I_{\mathrm{C}}) + L\frac{dI_{\mathrm{L}}}{dt} \\
&= I_{\mathrm{L}}\left\{R\left(1-LC\omega^2\right)\sin(\omega t-\theta_{\mathrm{L}}) + L\omega\cos(\omega t-\theta_{\mathrm{L}})\right\} \\
&= I_{\mathrm{L}}\sqrt{R^2\left(1-LC\omega^2\right)^2+(L\omega)^2}\sin(\omega t-\theta_{\mathrm{L}}+\gamma)\,.
\end{aligned}$$

この両辺が一致すればよく，

$$I_{\mathrm{L}} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2\left(1-LC\omega^2\right)^2+(L\omega)^2}}\,,\quad \tan\theta_{\mathrm{L}} = \tan\gamma = \frac{L\omega}{R\left(1-LC\omega^2\right)}\,.$$

(3)　電荷保存則より，

$$I(t) = I_{\mathrm{L}} R \left(1 - LC\omega^2\right) \sin\left(\omega t - \theta_{\mathrm{L}}\right)$$

の振幅が常に 0 となればよい．よって，

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

5

熱力学

第 5 部では，熱力学を扱う．高校の熱力学では，新しい物理量として温度（この PDF では，特に断り書きのない場合は絶対温度（より正しくは理想気体温度）を指す）と熱を定義し，それらを中心に理論を展開していく．第 1 章では，熱の関与する準静的な過程を扱う．高校範囲の熱力学において，状態方程式が温度の定義式という位置付けにあること，熱を求めるには間接的に計算する他ないことを，定石を通じて学習する．第 2 章では，熱の関与しない準静的な過程と，非平衡過程の 2 つを扱う．準静的断熱過程は，気体の状態決定をポアソンの公式と状態方程式から，熱力学第 1 法則は仕事の決定式となる．非平衡過程においては，気体の圧力や温度が一意に定まらないことからその過程において圧力などを定義できない．すなわち，PV 図も描けず，仕事も定義されない．そのため，始状態と終状態のエネルギー収支に注目する他ない．第 3 章では，熱力学に関する周辺知識などについてまとめる．モル比熱，熱効率に関しては定義を押さえ，分子運動論については直方体容器と球形容器の 2 種類を押さえる．熱量計算については核物理量の定義とその単位を読めるようにし，算数的な計算になれれば十分である．

§5.1 熱の関与する準静的過程

第 1 章では，熱の関与する準静的過程を扱う．状態方程式は温度 T の定義式，熱力学第 1 法則は熱 Q の定義式であると認識するのがよい．化学とは異なり物理では力学的考察が可能なため，圧力 P は通常可動部のつりあいによって決定する．すると，状態方程式は温度 T の決定式という位置付けとなる（問題によってはモル数 n や体積 V の決定式となることも）．可動部のつりあいから圧力 P を求めれば $P-V$ 図が描けるため，仕事 W が計算できる．また，状態方程式から温度 T が求まれば，内部エネルギー U は公式から計算できる．これら 2 つを計算することで熱量 Q が間接的に決定される．

■簡単なまとめ

- 気体の状態決定：

$$PV = nRT \quad \to \quad \begin{cases} \text{圧力 } P & \to \quad \text{可動部分のつりあい}, \\ \text{体積 } V & \to \quad \text{図・状況から判断（容器の容積）} \end{cases}$$

状態方程式は，（基本的には）温度の決定式として認識するとよい．

- 熱力学第 1 法則：

$$Q = \varDelta U + W \quad \to \quad \begin{cases} \text{内部エネルギー変化}\varDelta U & \to \quad \text{公式}：U = nC_V T\,, \\ \text{仕事 } W & \to \quad P-V \text{ 図の面積} \end{cases}$$

ここで，定積モル比熱 C_V は，以下の 2 つを覚える．

$$C_V = \begin{cases} \dfrac{3}{2}R & \text{（単原子分子理想気体）}, \\ \dfrac{5}{2}R & \text{（二原子分子理想気体）} \end{cases}$$

1 . 導入問題

　圧力 P，体積 V の状態（状態 1）にあるモル数 n の単原子分子理想気体をゆっくりと加熱することで，圧力を一定に保ったまま体積を $2V$ の状態（状態 2）に変化させた．以下の手順に従い，気体が吸収した熱量 Q を求めよ．

① 状態 1 の温度 T_1，および状態 2 の温度 T_2 を求める．気体定数 R を用いてよい．
② 公式を用いて，気体の内部エネルギー変化 $\varDelta U$ を求める．
③ $P-V$ 図の面積を評価することで，気体が外部へした仕事 W を求める．
④ 熱力学第 1 法則を利用して，気体が吸収した熱量 Q を求めよ．

【解答】

　各状態での温度は，状態方程式より[*1]，

$$T_1=\frac{PV}{nR}\,,\quad T_2=\frac{2PV}{nR}\,.$$

よって，内部エネルギー変化 $\varDelta U$ は公式より，

$$\varDelta U=\frac{3}{2}nR\varDelta T=\frac{3}{2}nR\left(\frac{2PV}{nR}-\frac{PV}{nR}\right)=\frac{3}{2}PV\,.$$

　また，気体が外部へした仕事 W は，圧力一定より[*2]，

$$W=P\varDelta V=PV\,.$$

　以上から，熱力学第 1 法則より，

$$Q=\varDelta U+W=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{5}{2}PV}\,.$$

[*1] これより前に，可動部のつりあいを利用して圧力の決定を行うことが多い．
[*2] 各自 $P-V$ 図を描く．

2. 熱あり過程①

図のように，シリンダ（断面積 S）が水平面上で鉛直に立てて固定され，ピストン（質量 m）がはめ込まれている．シリンダ内には物質量（モル数）n の単原子分子理想気体が封入されており，はじめ，シリンダの底面からピストンまでの距離は h であった．この状態を状態 1 とする．大気圧を P_0，気体定数を R，重力加速度の大きさを g とする．

状態 1 から，シリンダ内に取り付けたヒーターを作動させ，シリンダ内部の気体をゆっくりと加熱したところ，ピストンは状態 1 と比べ，h だけ上へ移動した．この状態を状態 2 とする．

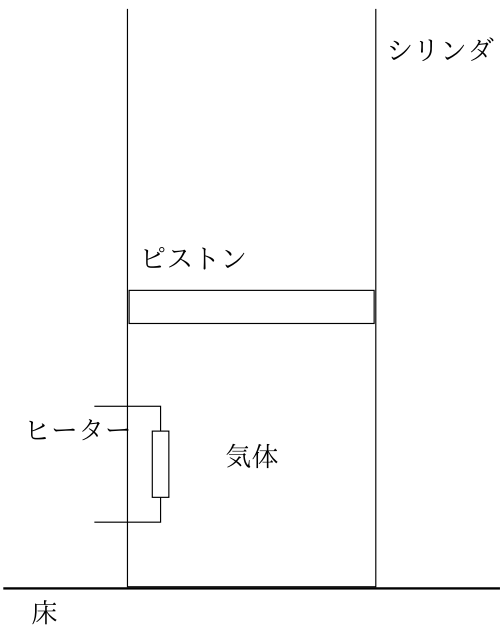
(1) 状態 1 からピストンが上方に $x\,(0 \leq x \leq h)$ だけ移動した状態における気体の圧力を P とする．P を x を含む式で表せ．また，縦軸に圧力 P を，横軸に気体の体積 V をとったグラフを描け．

(2) 状態 1 における気体の温度 T_1，および状態 2 における気体の温度 T_2 をそれぞれ求めよ．

(3) 状態 1 から状態 2 に至るまでの間の気体の内部エネルギー変化 ΔU を求めよ．

(4) 状態 1 から状態 2 に至るまでの間に気体が外部へした仕事 W を求めよ．

(5) 状態 1 から状態 2 に至るまでの間に気体がヒーターから吸収した熱量 Q を求めよ．



【メモ】

「つりあいから気体の圧力 P を決定」→「状態方程式より温度 T の決定」[*3]→「公式より内部エネルギー変化 ΔU の計算」→「$P-V$ グラフより気体が外部にした仕事 W を計算」→「熱力学第 1 法則より熱量 Q を決定」の流れで解くのが基本となる．

【解答】

(1)　ピストンのつりあいより，

$$0 = PS - P_0S - mg\,, \qquad \therefore P = \underline{P_0 + \frac{mg}{S}}\,.$$

グラフは圧力一定のものを描けばよい（グラフ略）．

(2)　状態方程式より，

$$T_1 = \underline{\frac{(P_0S+mg)h}{nR}}\,, \quad T_2 = \underline{\frac{2(P_0S+mg)h}{nR}}\,.$$

(3)　公式より，

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) = \underline{\frac{3}{2}(P_0S+mg)h}\,.$$

(4)　$P-V$ グラフの面積を計算して，

$$W = \left(P_0 + \frac{mg}{S}\right)\cdot Sh = \underline{(P_0S+mg)h}\,.$$

(5)　熱力学第 1 法則より，

$$Q = \Delta U + W = \underline{\frac{5}{2}(P_0S+mg)h}\,.$$

[*3] 問題文でモル数が与えられた場合の話．問題文で温度が与えられた場合，状態方程式はモル数を決定する方程式となる．

3. 熱あり過程②

図のように，シリンダ（断面積 S）が水平面上で水平横向きに固定され，ピストンがはめ込まれている．ピストンは右方の壁とばね（ばね定数 k）でつながれている．シリンダ内には物質量（モル数）n の単原子分子理想気体が封入されており，はじめ，シリンダの底面からピストンまでの距離は ℓ で，ばねはちょうど自然長であった．この状態を状態 1 とする．大気圧を P_0，気体定数を R とする．

状態 1 からヒーターを作動させ，シリンダ内部の気体をゆっくりと加熱したところ，ピストンは状態 1 と比べ，h だけ右へ移動した．この状態を状態 2 とする．

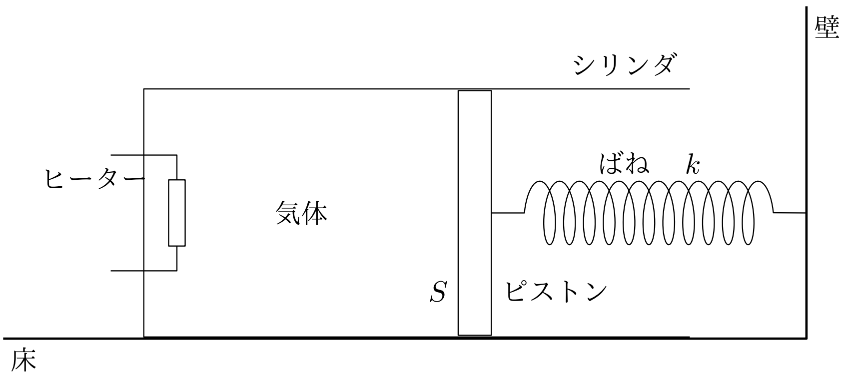
(1) 状態 1 からピストンが右方に $x\,(0 \leq x \leq h)$ だけ移動した状態における気体の圧力を P とする．P を x を含む式で表せ．また，縦軸に圧力 P を，横軸に気体の体積 V をとったグラフを描け．

(2) 状態 1 における気体の温度 T_1，および状態 2 における気体の温度 T_2 をそれぞれ求めよ．

(3) 状態 1 から状態 2 に至るまでの間の気体の内部エネルギー変化 ΔU を求めよ．

(4) 状態 1 から状態 2 に至るまでの間に気体が外部へした仕事 W を求めよ．

(5) 状態 1 から状態 2 に至るまでの間に気体がヒーターから吸収した熱量 Q を求めよ．



【解答】

(1)　ピストンのつりあいより，

$$0 = PS - P_0 S - kx\,, \qquad \therefore\ P = \underline{P_0 + \frac{kx}{S}}\,.$$

（グラフ略）．

(2)　状態方程式より，

$$T_1 = \underline{\frac{P_0 S\ell}{nR}}\,,\quad T_2 = \underline{\frac{(P_0 S + kh)(\ell + h)}{nR}}\,.$$

(3)　公式より，

$$\varDelta U = \frac{3}{2} nR(T_2 - T_1) = \underline{\frac{3}{2}(P_0 Sh + kh\ell + kh^2)}\,.$$

(4)　$P - V$ グラフの面積を計算して[*4]，

$$W = \int_0^h (P_0 S + kx)\,dx = \underline{P_0 Sh + \frac{1}{2} kh^2}\,.$$

(5)　熱力学第 1 法則より，

$$Q = \varDelta U + W = \underline{\frac{5}{2} P_0 Sh + \frac{3}{2} kh\ell + 2kh^2}\,.$$

[*4] 台形の面積を計算すればよい．

4. 熱あり過程③

図のように，シリンダ（断面積 S）が水平面上で鉛直に立てて固定され，ピストン（質量 m）がはめ込まれている．ピストンは天井とばね（ばね定数 $\dfrac{P_0S+mg}{h}$）でつながれている．シリンダ内には温度 T_0 の 2 原子分子理想気体が封入されており，はじめ，シリンダの底面からピストンまでの距離は h で，ばねはちょうど自然長であった．この状態を状態 1 とする．大気圧を P_0，気体定数を R とする．

状態 1 からヒーターを作動させ，シリンダ内部の気体をゆっくりと加熱したところ，シリンダ内部の気体は膨張し，温度は $\alpha^2T_0\,(\alpha>1)$ となった．この状態を状態 2 とする．

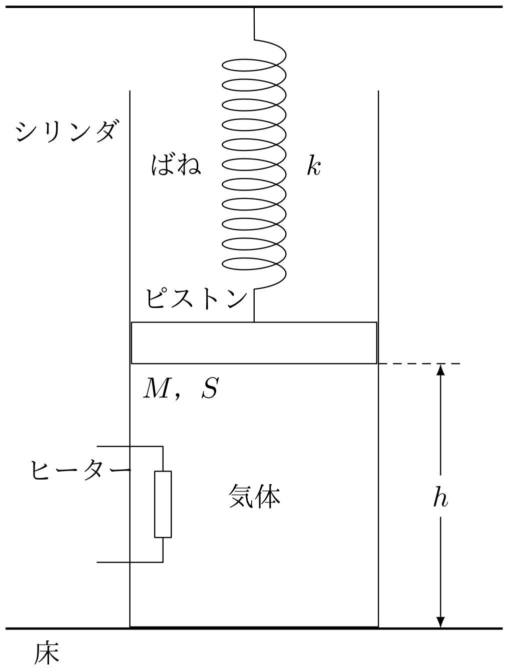
(1)　状態 1 からピストンが上方に x だけ移動した状態における気体の圧力を P とする．P を x を含む式で表せ．また，縦軸に圧力 P を，横軸に気体の体積 V をとったグラフを描け．

(2)　シリンダ内の気体のモル数 n，および状態 1 から状態 2 までのピストンの上昇した距離 h^* をそれぞれ求めよ．

(3)　状態 1 から状態 2 に至るまでの間の気体の内部エネルギー変化 ΔU を求めよ．

(4)　状態 1 から状態 2 に至るまでの間に気体が外部へした仕事 W を求めよ．

(5)　状態 1 から状態 2 に至るまでの間に気体がヒーターから吸収した熱量 Q を求めよ．



【解答】

(1)　ピストンのつりあいより，

$$0 = PS - P_0 S - \frac{P_0 S + mg}{h}x - mg\,, \qquad \therefore P = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\left(P_0 + \frac{mg}{S}\right)\left(1 + \frac{x}{h}\right)}\,.$$

（グラフ略）．

(2)　ピストンのつりあいより $P = P_0 + \dfrac{mg}{S}$ である．状態方程式より，

$$n = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{(P_0 S + mg)h}{RT_0}}\,.$$

(3)　ピシトンのつりあい，および状態方程式より，

$$\left(P_0 + \frac{mg}{S}\right)\left(1 + \frac{x}{h}\right)S(h + x) = \frac{(P_0 S + mg)h}{RT_0}R \cdot \alpha^2 T_0$$

$$\left(1 + \frac{x}{h}\right)^2 = \alpha^2\,, \qquad \therefore x = \underset{\sim\sim\sim\sim}{(\alpha - 1)h}\,.$$

(4)　公式より，

$$\Delta U = \frac{5}{2}\frac{(P_0 S + mg)h}{RT_0}R(\alpha^2 T_0 - T_0) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{5}{2}(\alpha^2 - 1)(P_0 S + mg)h}\,.$$

(5)　$P - V$ グラフの面積を計算して，

$$W = \int_0^{(\alpha-1)h}(P_0 S + mg)\left(1 + \frac{x}{h}\right)dx = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}(\alpha^2 - 1)(P_0 S + mg)h}\,.$$

(6)　熱力学第 1 法則より，

$$Q = \Delta U + W = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{3(\alpha^2 - 1)(P_0 S + mg)h}\,.$$

5. 熱あり過程④

図のように，鉛直に立てられたばね（ばね定数 k）にピストン（質量 m）が取り付けられ，シリンダ（断面積 S，質量 M）が覆いかぶさるように接地されている．シリンダ内には物質量（モル数）n の単原子分子理想気体が封入されており，はじめ，気体の温度は T_0 であった．この状態を状態 1 とする．大気圧を P_0，気体定数を R，重力加速度の大きさを g とする．

状態 1 から，シリンダ内に取り付けたヒーターを作動させ，シリンダ内部の気体をゆっくりと加熱したところ，気体の温度は $2T_0$ となった．この状態を状態 2 とする．

(1)　状態 1 における気体の圧力 P_1，およびばねの縮み x_1 を求めよ[*5]．

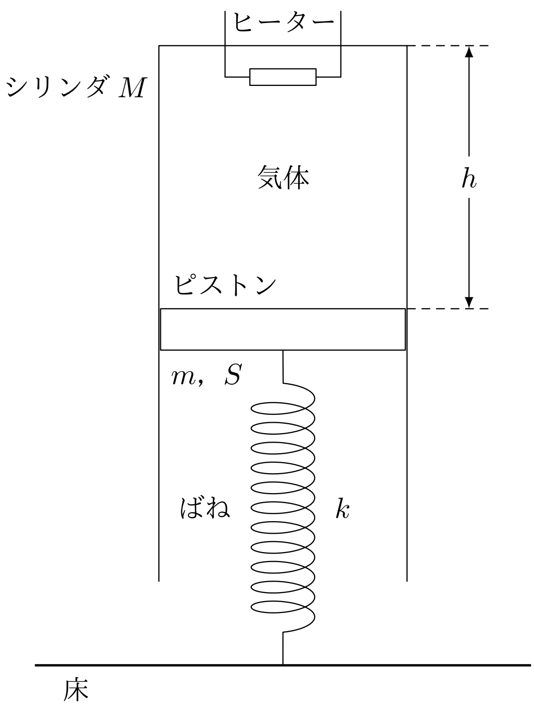
(2)　状態 2 における気体の圧力 P_2，およびばねの縮み x_2 を求めよ．

(3)　状態 1，状態 2 における気体の体積 V_1，V_2 をそれぞれ求めよ．

(4)　状態 1 から状態 2 に至るまでの間の気体の内部エネルギー変化 ΔU を求めよ．

(5)　状態 1 から状態 2 に至るまでの間に気体が外部へした仕事 W を求めよ．

(6)　状態 1 から状態 2 に至るまでの間に気体がヒーターーから吸収した熱量 Q を求めよ．



[*5] シリンダとピストン，2 つの可動部分があることに留意せよ．

【解答】

(1)　ピストン，およびシリンダのつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = P_1S + mg - P_0S - kx_1\,, \\ 0 = P_1S - P_0S - Mg\,, \end{cases} \qquad \therefore P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S}\,,\quad x_1 = \frac{(M+m)g}{k}\,.$$

(2)　ピストン，およびシリンダのつりあいより，

$$\begin{cases} 0 = P_2S + mg - P_0S - kx_2\,, \\ 0 = P_1S - P_0S - Mg\,, \end{cases} \qquad \therefore P_2 = P_0 + \frac{Mg}{S}\,,\quad x_2 = \frac{(M+m)g}{k}\,.$$

(3)　状態方程式より，

$$V_1 = \frac{SnRT_0}{P_0S + Mg}\,,\quad V_2 = \frac{2SnRT_0}{P_0S + Mg}\,.$$

(4)　公式より，

$$\varDelta U = \frac{3}{2}nR(2T_0 - T_0) = \frac{3}{2}nRT_0\,.$$

(5)　$P-V$ グラフの面積を計算して[*6]，

$$W = \left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V_2 - V_1) = \left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)V_1 = nRT_0\,.$$

(6)　熱力学第 1 法則より，

$$Q = \varDelta U + W = \frac{5}{2}nRT_0\,.$$

[*6] (1)，(2) の結果から，定圧変化であることに留意せよ（ばねの長さ，ピストンの位置がそれぞれ変わらないままシリンダだけが上昇し，体積が膨張している）．

6. 熱あり過程⑤

図のように，シリンダ（断面積 S）が水平面上で鉛直に立てて固定され，ピストン（質量 m）がはめ込まれている．ピストンより下のシリンダ内には物質量（モル数）n の単原子分子理想気体が封入されており，ピストンの上の空間には液体（密度 ρ）が貯められている．はじめ，気体と液体の高さはいずれも h であった．この状態を状態 1 とする．大気圧を P_0，気体定数を R とする．

状態 1 からヒーターを作動させ，シリンダ内部の気体をゆっくりと加熱したところ，ピストンは状態 1 と比べ，$\dfrac{1}{2}h$ だけ上へ移動しところでヒーターを止めた．この状態を状態 2 とする．この間，液体はシリンダ外部へこぼれ出ていき，状態 2 においてピストンの上の空間に残っている液体の体積は $\dfrac{1}{2}Sh$ であった．

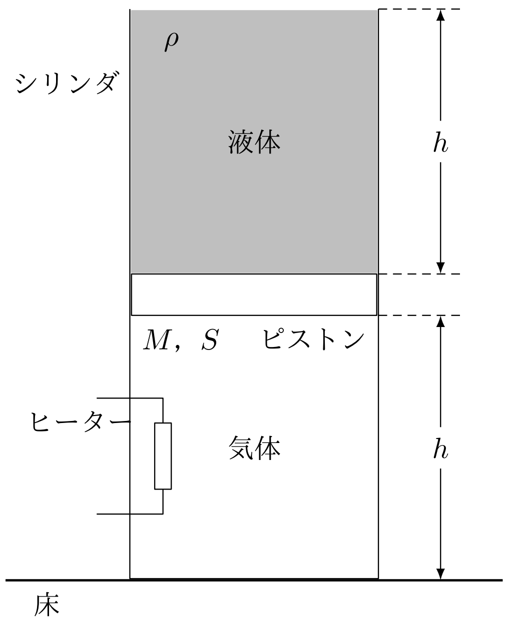
(1)　状態 1 からピストンが上方に $x\,(0 \leq x \leq h/2)$ だけ移動した状態における気体の圧力を P とする．P を x を含む式で表せ．また，縦軸に圧力 P を，横軸に気体の体積 V をとったグラフを描け．

(2)　状態 1 における気体の温度 T_1，および状態 2 における気体の温度 T_2 をそれぞれ求めよ．

(3)　状態 1 から状態 2 に至るまでの間の気体の内部エネルギー変化 ΔU を求めよ．

(4)　状態 1 から状態 2 に至るまでの間に気体が外部へした仕事 W を求めよ．

(5)　状態 1 から状態 2 に至るまでの間に気体がヒーターから吸収した熱量 Q を求めよ．



【解答】

(1)　ピストンのつりあいより，

$$P = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{P_0 + \frac{mg}{S} + \rho g(h - x)}\,.$$

（グラフ略）．

(2)　状態方程式より，

$$T_1 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{(P_0 S + \rho g S h + mg)h}{nR}}\,,\quad T_2 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{3(2P_0 S + \rho g S h + 2mg)h}{4nR}}\,.$$

(3)　公式より，

$$\varDelta U = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{3}{8}h(2P_0 S + 2mg - \rho g S h)}\,.$$

(4)　$P - V$ グラフの面積を計算して，

$$W = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{h}{2}(P_0 S + mg) + \frac{3}{8}\rho g S h^2}\,.$$

(5)　熱力学第 1 法則より，

$$Q = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{5}{4}(P_0 S + mg)h}\,.$$

§5.2 準静的断熱過程・非平衡過程

第 2 章では，熱の関与する準静的過程とは解法の異なる 2 つの過程①（ゆっくりとした）断熱過程[*7]，②非平衡過程（気体にむらが生じる過程）の 2 つを扱う．

■簡単なまとめ

❶（ゆっくりとした）断熱過程：

- 気体の状態決定：

$$\begin{cases} \text{ポアソンの公式：} PV^\gamma = P'V'^\gamma & \leftarrow \quad P \text{ または } V \text{ の決定} \\ \text{状態方程式：} PV = nRT & \leftarrow \quad T \text{ の決定} \end{cases}$$

- 熱力学第 1 法則：

$$W = -\Delta U \quad \leftarrow W \text{ の決定方程式}$$

本来ならば熱力学第 1 法則は目には見えないエネルギーの流れ（熱）を求める方法だが，断熱過程の場合 $Q = 0$ であることから W，ΔU のどちらか一方を計算すれば他方が求まる式となる．基本的には，ΔU は公式で求めることができるので，ゆっくりとした断熱過程において熱力学第 1 法則は W の決定方程式となるという認識をもつことが大事となる．

❷ 非平衡過程：

$$\begin{cases} \text{全体のエネルギー保存則（収支）} & \leftarrow \quad T \text{ の決定} \\ \text{状態方程式：} PV = nRT & \leftarrow \quad P \text{ の決定} \end{cases}$$

気体にむらが生じている場合，圧力や温度が一意に定まらないために仕事や内部エネルギーが定義されない．したがって，途中過程は考えることができず，始状態と終状態だけに注目する他ない．

[*7] 気体にむらが生じないように行う（準静的な）断熱過程．

1. 断熱過程①

シリンダにピストンがはめ込まれており，その内部には単原子分子理想気体が封入されている．はじめ，圧力が P_1，体積が V_1，温度が T_1 の状態にある．この状態を状態 1 とする．状態 1 から，気体を断熱的にゆっくり[*8]と膨張させ，体積を kV_1 $(k>0)$ にした．この状態を状態 2 とする．気体定数を R とする．

(1)　気体の物質量（モル数）n を求めよ．

(2)　状態 2 の圧力を P_2 とする．P_2 は P_1 の何倍か．

(3)　状態 2 の温度を T_2 とする．T_2 は T_1 の何倍か．

(4)　状態 1 から状態 2 に至るまでの間の気体の内部エネルギー変化 $\varDelta U$ を求めよ．

(5)　状態 1 から状態 2 に至るまでの間に気体が外部へした仕事 W を求めよ．

*8 熱力学における「ゆっくり」とは，気体にむらが生じないような状態変化の操作を指す．

【解答】

(1)　状態方程式より，

$$n = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{P_1V_1}{RT_1}}\,.$$

(2)　ポアソンの公式より，

$$P_2(kV_1)^{\frac{5}{3}} = P_1{V_1}^{\frac{5}{3}}\,, \qquad \therefore \frac{P_2}{P_1} = \underset{\sim\sim\sim}{k^{-\frac{5}{3}}}\,.$$

(3)　状態方程式，およびポアソンの公式より，

$$\begin{cases} P_1V_1 = nRT_1\,, \\ P_2kV_1 = nRT_2\,, \end{cases} \qquad \therefore \frac{T_2}{T_1} = k\frac{P_2}{P_1} = \underset{\sim\sim\sim}{k^{-\frac{2}{3}}}\,.$$

(4)　公式より，

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{3}{2}\left(k^{-\frac{2}{3}} - 1\right)P_1V_1}\,.$$

(5)　熱力学第 1 法則より，

$$W = -\Delta U = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{-\frac{3}{2}\left(k^{-\frac{2}{3}} - 1\right)P_1V_1}\,.$$

【補足】$P-V$ グラフの面積による仕事の計算

ここでは，ポアソンの公式の定数を γ として計算する[*9]．

状態 $1(P_1, V_1, T_1)$ から状態 $2(P_2, kV_1, T_2)$ への変化の途中過程における状態を，状態 P と呼び (P, V, T) と記す．状態 P では各変数は独立ではなく，ポアソンの公式[*10]によって

$$PV^{\gamma} = P_1{V_1}^{\gamma}$$

の関係を満たす[*11]．したがって，状態 1 から状態 2 の過程で気体が外部にする仕事 W は，

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_1}^{kV_1} P\,dV = \int_{V_1}^{kV_1} P_1\left(\frac{V_1}{V}\right)^{\gamma} dV = \left[\frac{1}{1-\gamma}P_1{V_1}^{\gamma}V^{1-\gamma}\right]_{V_1}^{kV_1} \\ &= \frac{1}{1-\gamma}\left(k^{1-\gamma} - 1\right)P_1V_1\,. \end{aligned}$$

*9 上記の結果と一致していることは $\gamma = \dfrac{5}{3}$ を代入すれば確認できる

*10 断熱過程における状態方程式・熱力学第 1 法則の結果．

*11 T は，状態方程式によって一意に定まる．

2. 断熱過程②

シリンダにピストンがはめ込まれており，その内部には単原子分子理想気体（モル数 n）が封入されている．はじめ，圧力が P，体積が V の状態にある．この状態を状態 1 とする．状態 1 から，熱を断ちながらゆっくりと圧縮していき，温度が 4 倍となるまで圧縮した．この状態を状態 2 とする．気体定数を R とする．

(1)　状態 1 における気体の温度 T を求めよ．

(2)　状態 2 の圧力を P'，体積を V' とする．P'，V' を求めよ．

(3)　状態 1 から状態 2 に至るまでの間に気体が外部からされた仕事 W' を求めよ．

【解答】

(1)　状態方程式より，

$$T = \frac{PV}{nR}\,.$$

(2)　状態方程式，およびポアソンの公式より，

$$\begin{cases} PV = nRT\,, \\ P'V' = nR\cdot 4T\,, \\ P'V'^{\frac{5}{3}} = PV^{\frac{5}{3}}\,, \end{cases} \qquad \therefore V' = \frac{1}{8}V\,,\quad P' = 32P\,.$$

(3)　熱力学第 1 法則より，

$$W' = -W = \mathit{\Delta} U = \frac{9}{2}PV\,.$$

3. ポアソンの公式の導出

モル数 n の理想気体の断熱的な変化について考える．理想気体は，はじめ圧力 P，体積 V，温度 T の状態にあり，この状態からゆっくりと微小に断熱的な変化によって圧力 $P+\varDelta P$，体積 $V+\varDelta V$，温度 $T+\varDelta T$ の状態まで変化させた．理想気体の内部エネルギーは温度のみに依存し，C を定数として $U=nCT$ と与えられる．気体定数を R とする．以下では，2 次の微小量は無視せよ．

(1)　状態方程式より，$\dfrac{\varDelta P}{P}$，$\dfrac{\varDelta V}{V}$，$\dfrac{\varDelta T}{T}$ の間に成り立つ関係式を求めよ．

(2)　熱力学第 1 法則より，$\dfrac{\varDelta V}{V}$，$\dfrac{\varDelta T}{T}$ の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3)　$\dfrac{\varDelta P}{P}$ を，$\dfrac{\varDelta T}{T}$ を用いて表せ．

【解答】

(1)　状態方程式より，

$$\begin{cases} PV = nRT\,, \\ (P+\Delta P)(V+\Delta V) = nR(T+\Delta T)\,, \end{cases} \qquad \therefore\ \underline{\frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T}}\,.$$

(2)　熱力学第 1 法則・状態方程式より，

$$0 = P\Delta V + nC\Delta T\,, \qquad \underline{\frac{\Delta V}{V} = -\frac{C}{R}\frac{\Delta T}{T}}\,.$$

(3)　(1)，(2) より，

$$\frac{\Delta P}{P} = \underline{\left(1+\frac{C}{R}\right)\frac{\Delta T}{T}}\,.$$

【補足】比熱についての諸々（後でもう少し掘り下げてやります）

比熱[*12]についての詳細はこの後のセクションで見るため，ここでは簡単に紹介する．

モル数 n の物体が Q の熱を吸熱したときの物体の温度変化を ΔT としたとき，モル比熱 c は次のように定義される．

$$c = \frac{1}{n}\frac{Q}{\Delta T}\,.$$

一般に，モル比熱の値は系の変化の仕方に応じて異なる値を取る．体積を一定に保った過程で計算したモル比熱を定積モル比熱と呼び，c_{v} と記すことが多い．また，圧力を一定に保った過程で計算したモル比熱を定圧モル比熱と呼び，c_{p} と記すことが多い．

理想気体の内部エネルギーの公式の比例定数 C と定積モル比熱は一致し，理想気体の内部エネルギーの公式は次のように書くことができる．

$$U = nc_{\mathrm{v}}T$$

理想気体の定圧モル比熱と定積モル比熱の間には次の関係式[*13]が成り立つ．

$$c_{\mathrm{v}} + R = c_{\mathrm{p}}\,.$$

ポアソンの公式に現れる定数 γ は比熱比と呼び，次のように定義される．

$$\gamma = \frac{c_{\mathrm{p}}}{c_{\mathrm{v}}}\,.$$

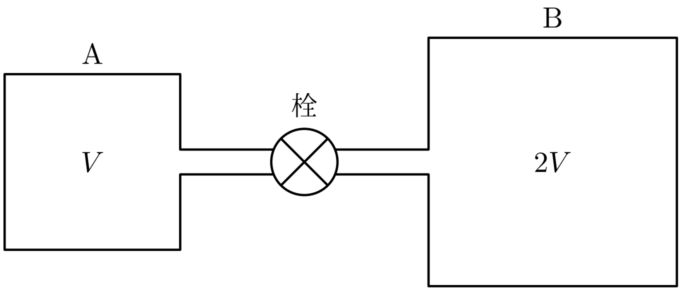
*12 ここでの比熱は，モル比熱を指す．
*13 マイヤーの関係式と呼ぶ（覚える必要はない）．

4. 非平衡過程

図のように，それぞれ V，$2V$ の体積を持つ断熱容器 A，B が，栓のついた細管でつながれている．はじめ，栓は閉まっており，容器 A には温度 T，物質量（モル数）$2n$ の単原子分子理想気体が，容器 B には温度 $3T$，物質量（モル数）n の二原子分子理想気体が封入されている．細管の体積は無視できるものとする．気体定数を R とする．

(1)　容器 A，B 内の気体の圧力 P_{A}，P_{B} を求めよ．

(2)　栓を開けて十分に時間が経過し，全体が一様になった状態（容器 A，B 内の気体の圧力，温度がともに等しい状態）について考える．一様になった気体の圧力 P'，および温度 T' を求めよ．



【メモ】

気体にむらが生じるような過程[*14]では，全体のエネルギー保存則とモル数が保存されることを利用して処理する他ない[*15].

【解答】

(1)　状態方程式より，

$$\begin{cases} P_{\mathrm{A}}V = 2nRT\,, \\ P_{\mathrm{B}}\cdot 2V = nR\cdot 3T\,, \end{cases} \qquad \therefore P_{\mathrm{A}} = \frac{2nRT}{V}\,,\quad P_{\mathrm{B}} = \frac{3nRT}{2V}\,.$$

(2)　全体のエネルギー保存則より，

$$\frac{3}{2}\cdot 2nRT' + \frac{5}{2}nRT' = \frac{3}{2}\cdot 2nRT + \frac{5}{2}nR\cdot 3T\,, \qquad T' = \frac{21}{11}T\,.$$

また，状態方程式より，

$$P'\cdot 3V = (n+2n)RT'\,, \qquad \therefore P' = \frac{21nRT}{11V}\,.$$

*14 気体の混合，真空領域への気体の拡散（断熱自由膨張），ピストンが内部気体から抵抗を受けるように動く過程など.

*15 化学反応などのモル数が変化するような過程は範囲外.

§5.3 熱力学に関連する知識・その他

第 3 章では，熱力学に関する周辺知識，および分子運動論，熱量計算を扱う（要するに余り物をここで総まとめするわけである）．周辺知識では，①モル比熱，②熱機関を扱う．モル比熱はその定義を抑え，比熱比の定義も押さえたい．熱機関については熱効率の定義さえ覚えてしまえば，あとはこれまでの熱力学の知識を使うだけである．分子運動論は，直方体（立方体）容器と球形容器についてその誘導に乗れるようにする[*16][*17]．

■簡単なまとめ（熱力学の周辺知識）

❶ 熱力学の周辺知識：

- モル比熱：

$$\begin{cases} \text{定義}：C = \dfrac{1}{n}\dfrac{Q}{\varDelta T}\,, \\ \text{比熱比}：\gamma = \dfrac{\text{（定圧モル比熱）}}{\text{（定積モル比熱）}} = \dfrac{C_\mathrm{p}}{C_\mathrm{v}} = 1 + \frac{R}{C_\mathrm{v}}\,, \\ \text{マイヤーの関係式}：C_\mathrm{p} = C_\mathrm{v} + R\,. \end{cases}$$

- 熱機関：

$$\text{熱効率の定義}：e = \frac{\text{（サイクル 1 周でした仕事）}}{\text{（吸収熱）}} = \frac{W_\mathrm{cyc}}{Q_\mathrm{in}} = 1 - \frac{Q_\mathrm{out}}{Q_\mathrm{in}}$$

ここで，Q_out は放出熱を指し，熱力学第 1 法則で計算した熱が負の場合に，その絶対値を取った（マイナス倍をした）量である．

❷ 分子運動論：

→　誘導に乗れる用にする．

❸ 熱量計算：

→　物理量の定義を抑え（単位を読めるようにし），エネルギー保存則を計算するだけ．

*16 難関大受験生は，誘導がなくても結論（運動エネルギーと温度の関係，内部エネルギーのミクロな描像）を導けるようにしておく必要がある．

*17 円筒形容器については，円柱の軸方向が直方体容器，円柱の断面方向が球形容器と同じ計算に帰着する．

1. 熱機関①

図のように，単原子分子理想気体を状態 A（圧力 $3P$，体積 V，温度 $3T$）から，温度を一定に保ちながら状態 B（体積 $3V$）へと変化させ，状態 B から圧力を一定に保ちながら体積が αV $(1 < \alpha < 3)$ となる状態 C まで圧縮し，状態 C からゆっくりとした断熱圧縮によって状態 A まで戻る熱機関を考える．気体定数を R とする．

(1)　気体の物質量（モル数）n を求めよ．

(2)　状態 B の圧力 P_{B} を求めよ．

(3)　状態 A から状態 B に至るまでの間に，気体が外部にした仕事 $W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$，および気体が吸収した熱量 $Q_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$ を求めよ．なお，必要であれば以下の積分公式を用いてよい．

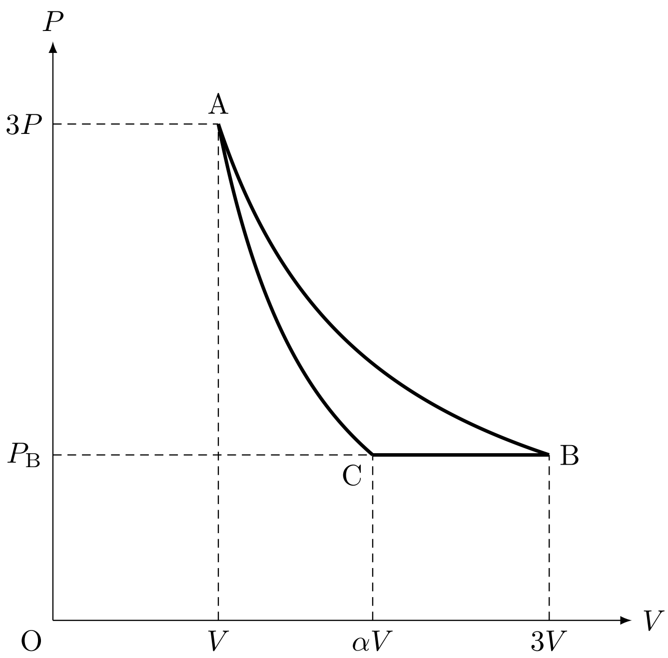
$$\int \frac{dx}{x} = \log x + \text{const}\,.$$

(4)　サイクルが閉じるために，α がとるべき値を求めよ．

(5)　状態 B から状態 C に至るまでの間に，気体が外部からされた仕事 $\widetilde{W}_{\mathrm{B}\to\mathrm{C}}$，および気体が放出した熱量 $\widetilde{Q}_{\mathrm{B}\to\mathrm{C}}$ を求めよ．

(6)　状態 C から状態 A に至るまでの間に，気体が外部からされた仕事 $\widetilde{W}_{\mathrm{C}\to\mathrm{A}}$ を求めよ．

(7)　この熱機関の熱効率を求めよ．ただし，$\log 3 \fallingdotseq 1.1$，$\alpha \fallingdotseq 1.9$ として，小数第 2 位まで計算せよ．



【解答】

(1)　状態方程式より，

$$n = \frac{PV}{RT}\,.$$

(2)　状態方程式より，

$$P_{\mathrm{B}} \cdot 3V = nR \cdot 3T\,, \qquad \therefore P_{\mathrm{B}} = P\,.$$

(3)　$P - V$ 図の面積より，

$$W_{\mathrm{A\to B}} = \int_{V}^{3V} \frac{3nRT}{V}\,dV = 3\log 3PV\,.$$

温度一定より内部エネルギー変化 $\mathit{\Delta} U_{A\to B} = 0$ ゆえ，熱力学第 1 法則より，

$$Q_{\mathrm{A\to B}} = 0 + W_{\mathrm{A\to B}} = 3\log 3PV\,.$$

(4)　ポアソンの公式より，

$$P(\alpha V)^{\frac{5}{3}} = 3PV^{\frac{5}{3}}\,, \qquad \therefore \alpha = 3^{\frac{3}{5}}\,.$$

(5)　気体が外部にした仕事は $P - V$ 図の面積より，

$$W_{\mathrm{B\to C}} = P\mathit{\Delta} V = (3^{\frac{3}{5}} - 3)PV\,.$$

よって，気体が外部からされた仕事は，

$$\widetilde{W}_{\mathrm{B\to C}} = -W_{\mathrm{B\to C}} = (3 - 3^{\frac{3}{5}})PV\,.$$

気体の内部エネルギー変化は公式より[*18]，

$$\mathit{\Delta} U_{\mathrm{B\to C}} = \frac{3}{2}nR(T_{\mathrm{C}} - T_{\mathrm{B}}) = \frac{3}{2}(3^{\frac{3}{5}} - 3)PV\,.$$

熱力学第 1 法則より，気体の吸熱量は，

$$Q_{\mathrm{B\to C}} = \mathit{\Delta} U_{\mathrm{B\to C}} + W_{\mathrm{B\to C}} = \frac{5}{2}(3^{\frac{3}{5}} - 3)PV\,.$$

よって，放熱量は，

$$\widetilde{Q}_{\mathrm{B\to C}} = -Q_{\mathrm{B\to C}} = \frac{5}{2}(3 - 3^{\frac{3}{5}})PV\,.$$

*18 T_{C} は，状態方程式より $T_{\mathrm{C}} = \alpha T$ と求まる．

(6)　断熱過程ゆえ，仕事は内部エネルギー変化から逆算して，

$$\widetilde{W}_{\mathrm{C}\to\mathrm{A}} = -W_{\mathrm{C}\to\mathrm{A}} = \mathit{\Delta} U_{\mathrm{C}\to\mathrm{A}} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{3}{2}(3-3^{\frac{3}{5}})PV}\,.$$

(7)　熱効率の定義より[*19]，

$$e = 1 - \frac{Q_{\text{放出}}}{Q_{\text{吸収}}} = 1 - \frac{\widetilde{Q}_{\mathrm{B}\to\mathrm{C}}}{Q_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}} \fallingdotseq 1 - \frac{5\times(3-1.9)}{6\times 1.1} \fallingdotseq \underset{\sim\sim\sim}{0.17}\,.$$

[*19] この熱機関がサイクル 1 周で外部にした正味の仕事 W_{cyc} は，

$$W_{\mathrm{cyc}} = \left\{3\log 3 - \frac{5}{2}(3-3^{\frac{3}{5}})\right\}PV\,.$$

2. 熱機関②（難しめ）

図のように，n モルの単原子分子理想気体を，状態 A（圧力 P_0，体積 V_0）から体積を一定に保ちながら状態 B（圧力 $3P_0$）へと変化させ，状態 B から状態 C（圧力 P_0，体積 $3V_0$）まで $P-V$ 図上で 1 次関数的に圧縮し，状態 C から圧力を一定に保ちながら状態 A まで戻る熱機関を考える．気体定数を R とする．

(1)　状態 A，B，C における温度 T_{A}，T_{B}，T_{C} をそれぞれ求めよ．

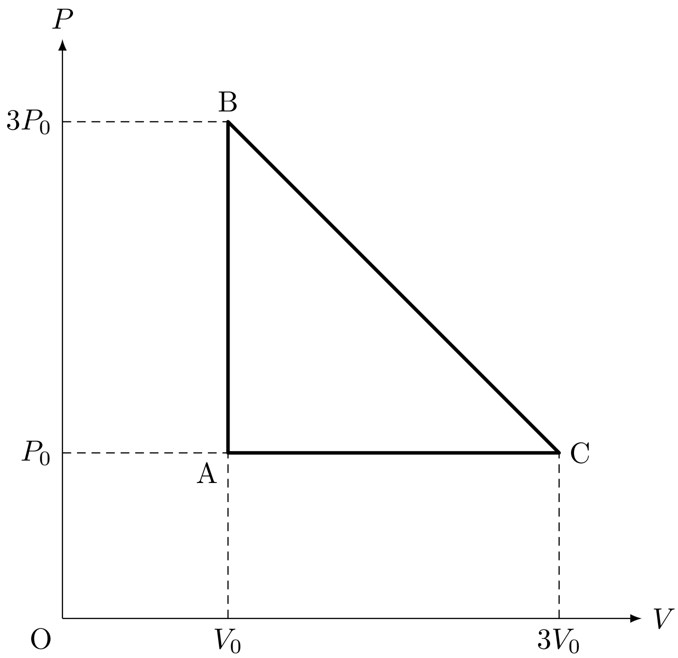
(2)　状態 A から状態 B に至るまでの間に，気体が吸収した熱量 $Q_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$ を求めよ．

(3)　状態 B から状態 C に至るまでの間の状態 X を考える．状態 X における気体の体積を $V\,(V_0 \leq V \leq 3V_0)$，圧力を $P\,(P_0 \leq P \leq 3P_0)$ とする．P を，V を用いて表せ．

(4)　状態 B から状態 X に至るまでの間に，気体が吸収した熱量 Q を求め，$Q-V$ 図を図示せよ．

(5)　前問の結果から，状態 B から状態 C への変化におけるある体積 V_1 において，気体が外界とやりとりする熱量は吸熱から放熱へと切り替わる．V_1 を求めよ．

(6)　この熱機関の熱効率を求めよ．


P
3P₀
P₀
B
A
C
O
V₀
3V₀
V

【解答】

(1)　状態方程式より，

$$T_{\mathrm{A}} = \frac{P_0V_0}{nR}\,.$$

(2)　状態方程式より，B における気体の温度は，

$$T_{\mathrm{B}} = \frac{3PV}{nR}\,.$$

よって，熱力学第 1 法則より，

$$Q_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \mathit{\Delta} U_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} + 0 = 3P_0V_0\,.$$

(3)　$P-V$ 図より，

$$P = -\frac{P_0}{V_0}(V-V_0) + 3P_0 = -\frac{P_0}{V_0}V + 4P_0\,.$$

(4)　状態 B から状態 X までに気体がした仕事 W は $P-V$ 図より，

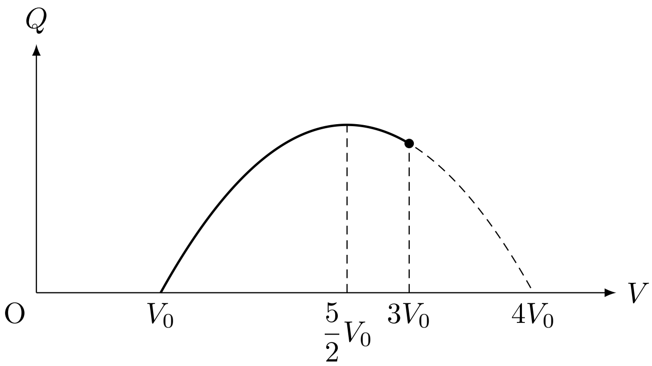
$$W = \frac{1}{2}\left\{3P_0 + \left(-\frac{P_0}{V_0}V + 4P_0\right)\right\}(V-V_0) = -\frac{1}{2}\frac{P_0}{V_0}V^2 + 4P_0V - \frac{7}{2}P_0V_0\,.$$

また，この間の内部エネルギー変化 $\mathit{\Delta} U$ は，

$$\begin{aligned}\mathit{\Delta} U &= \frac{3}{2}nR\mathit{\Delta} T\\ &= \frac{3}{2}nR\left\{\frac{1}{nR}\left(-\frac{P_0}{V_0}V + 4P_0\right) - \frac{3P_0V_0}{nR}\right\}\\ &= -\frac{3}{2}\frac{P_0}{V_0}V^2 + 6P_0V - \frac{9}{2}P_0V_0\,.\end{aligned}$$

よって，熱力学第 1 法則より，

$$Q = \mathit{\Delta} U + W = -2\frac{P_0}{V_0}V^2 + 10P_0V - 8P_0V_0\,.$$



(5)　Q を V について平方完成すれば，

$$Q = -\frac{2P_0}{V_0}\left(V - \frac{5}{2}V_0\right)^2 + \frac{9}{2}P_0V_0$$

となり，Q は $V = \dfrac{5}{2}V_0$ で極大値を取ることがわかる．すなわち，$V = \dfrac{5}{2}V_0$ までは吸収熱は増加するが，$V = \dfrac{5}{2}V_0$ を境に Q は減少し始める，つまり熱を放出し始めるわけである．したがって，$V_1 = \dfrac{5}{2}V_0$ を境に，吸熱から放熱へと変わる．

(6)　サイクル 1 周での吸熱量は，AB 間での吸収熱と BC 間のうち $V = \dfrac{5}{2}V_0$ までの吸収熱の合計であり，

$$Q_{\mathrm{in}} = Q_{\mathrm{A\to B}} + Q_{\mathrm{B\to C}} = 3P_0V_0 + \frac{9}{2}P_0V_0 = \frac{15}{2}P_0V_0\,.$$

また，1 周での仕事 $P-V$ 図の面積より，

$$W_{\mathrm{cyc}} = 2P_0V_0\,.$$

よって，

$$e = \frac{W_{\mathrm{cyc}}}{Q_{\mathrm{in}}} = \frac{4}{15}\,.$$

3. 分子運動論①

図のような立方体容器（体積 $V = L_xL_yL_z$）に質量 m の単原子分子 N 個からなる理想気体を入れる．分子は容器の内壁と弾性衝突をするが，分子どうしの衝突，相互作用および，分子への重力の影響は無視できるものとする．図のように x，y，z 軸をとり，x 軸に垂直な右側の壁を S とし，ボルツマン定数を k_B とする．また，N 個の分子の運動は等方的で，速度成分の 2 乗の平均はすべて等しいものとする．

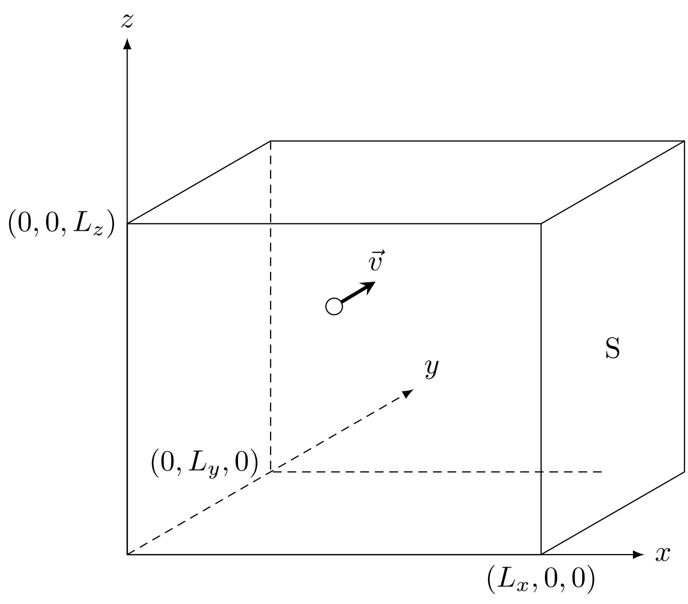
(1)　ある 1 つの分子の速度を $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ とする．この分子と壁 S との衝突において，壁 S が受ける力積の大きさを求めよ．

(2)　この分子が時間 Δt の間に衝突する回数 n を求めよ．

(3)　N 個の分子の速さ v の 2 乗の平均を $\langle v^2 \rangle$ とする．壁 S が N 個の分子から受ける圧力 P を，L_x，L_y，L_z，N，m，$\langle v^2 \rangle$ を用いて表せ．

(4)　この理想気体の絶対温度を T とする．T を，$\langle v^2 \rangle$，m，k_B を用いて表せ．

(5)　この理想気体の内部エネルギーを U とする．U を，T，N，k_B を用いて表せ．



【解答】

(1)　気体分子の運動量収支から逆算して，

$$I = -I_{分子} = -\Delta p = -(-mv_x - mv_x) = \underset{\sim\sim\sim}{2mv_x}\,.$$

(2)　$2L_x$ 進むごとに 1 回衝突するので，

$$n = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{v_x}{2L_x}\Delta t}\,.$$

(3)　壁 S が Δt 間に N 個の分子から受ける力積の総和は[*20]，

$$I_{\mathrm{tot}} = \sum_{i=1}^{N} 2m(v_x)_i \cdot \frac{(v_x)_i}{2L_x}\Delta t = \frac{m\Delta t}{L_x}\sum_{i=1}^{N}(v_x)_i{}^2 = \frac{Nm\langle v^2\rangle}{3L_x}\Delta t\,.$$

一方，壁 S が内部気体から受ける力積は，気体の圧力を P とすれば，

$$I_{\mathrm{gas}} = PL_yL_z\Delta t\,.$$

両者が等しいとすれば，

$$PL_yL_z\Delta t = \frac{Nm\langle v^2\rangle}{3L_x}\Delta t\,, \qquad \therefore P = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{Nm\langle v^2\rangle}{3L_xL_yL_z}}\,.$$

(4)　理想気体の状態方程式より，

$$PL_xL_yL_z = nRT = \frac{N}{N_{\mathrm{A}}}RT = Nk_{\mathrm{B}}T\,, \qquad \therefore P = \frac{Nk_{\mathrm{B}}T}{L_xL_yL_z}\,.$$

前問の結果と合わせて，

$$T = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{3}\frac{m\langle v^2\rangle}{k_{\mathrm{B}}}}\,.$$

(5)　この系の内部エネルギーは気体分子の運動エネルギーの総和ゆえ[*21]，

$$U = \frac{1}{2}m\langle v^2\rangle \cdot N = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{3}{2}Nk_{\mathrm{B}}T}\,.$$

[*20] 内部気体が壁 S に及ぼす平均の力の大きさが聞かれることもあるので一応言及しておくと，単に力積の計算から $\overline{f} = \dfrac{Nm\langle v^2\rangle}{3L_x}$ と求まる．

[*21] 位置エネルギーを考慮していないため．

4. 分子運動論②

球形容器（半径 r）に質量 m の単原子分子 N 個からなる理想気体を入れる．分子は容器の内壁と弾性衝突をするが，分子どうしの衝突，相互作用および，分子への重力の影響は無視できるものとする．図のように，ある 1 つの分子が存在する球形容器の中心 O を通る断面に注目すると，この分子は容器内壁の点 A に速さ v，入射角 θ で衝突した後，容器内壁の点 B で再び衝突した．ボルツマン定数を k_{B} とする．また，N 個の分子の運動は等方的で，速度成分の 2 乗の平均はすべて等しいものとする．

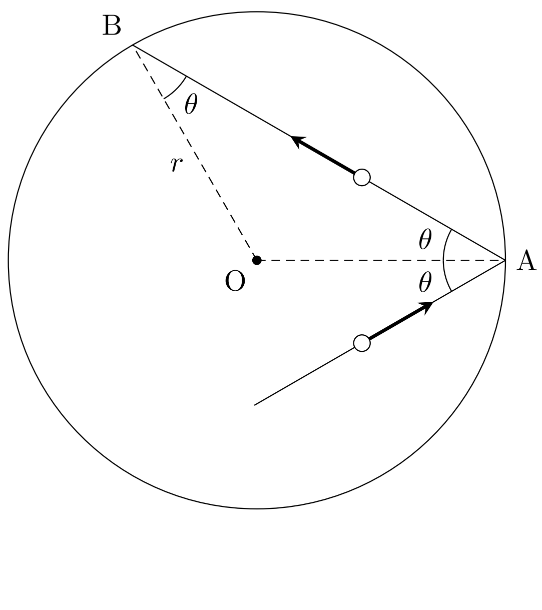
(1)　点 A での衝突において，分子 1 個が容器に与える力積の大きさ I を求めよ．

(2)　この分子が時間 $\mathit{\Delta} t$ の間に衝突する回数 n を求めよ．

(3)　N 個の分子の速さ v の 2 乗の平均を $\langle v^2\rangle$ とする．壁 S が N 個の分子から受ける圧力 P を，r，N，m，$\langle v^2\rangle$ を用いて表せ．

(4)　この理想気体の絶対温度を T とする．T を，$\langle v^2\rangle$，m，k_{B} を用いて表せ．

(5)　この理想気体の内部エネルギーを U とする．U を，T，N，k_{B} を用いて表せ．



【解答】

(1)　気体分子の運動量収支から逆算して，

$$I = \underset{\sim\sim\sim\sim}{2mv\cos\theta}\,.$$

(2)　$2r\cos\theta$ 進むごとに 1 回衝突するので，

$$n = \frac{v}{2r\cos\theta}\Delta t\,.$$

(3)　壁 S が Δt 間に N 個の分子から受ける力積の総和は，

$$I_{\mathrm{tot}} = \sum_{i=1}^{N} 2mv_i\cos\theta \cdot \frac{v_i\cos\theta}{2r}\Delta t = \frac{m\Delta t}{r}\sum_{i=1}^{N}{v_i}^2 = \frac{Nm\langle v^2\rangle}{r}\Delta t\,.$$

一方，壁 S が内部気体から受ける力積は，気体の圧力を P とすれば，

$$I_{\mathrm{gas}} = P\cdot 4\pi r^2\Delta t\,.$$

両者が等しいとすれば，

$$P\cdot 4\pi r^2\Delta t = \frac{Nm\langle v^2\rangle}{r}\Delta t\,,\qquad \therefore P = \frac{Nm\langle v^2\rangle}{4\pi r^3}\,.$$

(4)　理想気体の状態方程式より，

$$P\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = nRT = \frac{N}{N_{\mathrm{A}}}RT = Nk_{\mathrm{B}}T\,,\qquad \therefore P = \frac{3Nk_{\mathrm{B}}T}{4\pi r^3}\,.$$

前問の結果と合わせて，

$$T = \frac{1}{3}\frac{m\langle v^2\rangle}{k_{\mathrm{B}}}\,.$$

(5)　この系の内部エネルギーは気体分子の運動エネルギーの総和ゆえ，

$$U = \frac{1}{2}m\langle v^2\rangle\cdot N = \frac{3}{2}Nk_{\mathrm{B}}T\,.$$

5. モル比熱

　圧力 P_0，体積 V_0，モル数 n の理想気体がある．理想気体の内部エネルギーは，モル数 n，温度 T，および定数 A を用いて，

$$U = nAT$$

と与えられるものとする．気体定数を R とする．

　以下の各状態変化におけるモル比熱を計算し，R，A のうち，必要なものを用いて表せ．

(1)　体積を一定に保ったまま，温度を 2 倍にする．

(2)　圧力を一定に保ったまま，温度を 2 倍にする．

(3)　気体の圧力 P，および体積 V に関して，$\dfrac{P}{V}$ を一定に保ったまま圧力を $2P_0$，体積を $2V_0$ とする．

【解答】

(1)　この過程では体積一定ゆえ $W=0$ である．始状態の温度を T とすると，この状態間での内部エネルギー変化 $\mathit{\Delta} U$ は，

$$\mathit{\Delta} U = nA\mathit{\Delta} T = nAT\,.$$

よって，モル比熱の定義より，

$$C = \frac{1}{n}\frac{Q}{\mathit{\Delta} T} = \frac{1}{n}\mathit{\Delta} U\mathit{\Delta} T = A\,.$$

(2)　始状態の温度を T とする．この過程における仕事 W は，

$$W = P_0\mathit{\Delta} V = P_0V_0 = nRT\,.$$

この状態間での内部エネルギー変化 $\mathit{\Delta} U$ は，

$$\mathit{\Delta} U = nA\mathit{\Delta} T = nAT\,.$$

よって，モル比熱の定義より[22]，

$$C = \frac{1}{n}\frac{Q}{\mathit{\Delta} T} = \frac{1}{n}\mathit{\Delta} U + W\mathit{\Delta} T = A+R\,.$$

(3)　始状態の温度を T とする．この過程における仕事 W は，$P-V$ 図上の台形の面積を計算して[23]，

$$W = \frac{1}{2}(P_0+2P_0)(2V_0-V_0) = \frac{3}{2}P_0V_0\,.$$

この状態間での内部エネルギー変化 $\mathit{\Delta} U$ は[24]，

$$\mathit{\Delta} U = nA\mathit{\Delta} T = 3nAT\,.$$

よって，モル比熱の定義より，

$$C = \frac{1}{n}\frac{Q}{\mathit{\Delta} T} = \frac{1}{n}\mathit{\Delta} U + W\mathit{\Delta} T = A+\frac{1}{2}R\,.$$

[22] 定積モル比熱を C_{V}，定圧モル比熱を C_{P} とすると，理想気体では，これらの間に $C_{\mathrm{P}} = C_{\mathrm{V}} + R$ の関係（マイヤーの関係式）が成り立つ．

[23] $P-V$ 図上での変化が $P = \dfrac{P_0}{V_0}V$ と与えられることから，

$$W = \int_{V_0}^{2V_0}\frac{P_0}{V_0}V\,dV = \frac{3}{2}P_0V_0$$

と計算してもよい．

[24] 状態方程式より，温度は 4 倍になる．

6. 熱量計算

以下の計算をせよ．なお，以下で考えている物質との熱の流出入は考えない．

I　$20\,^\circ\mathrm{C}$ の $800\,\mathrm{g}$ の鉄製容器に，$60\,^\circ\mathrm{C}$ の水 $200\,\mathrm{g}$ を入れる．鉄の比熱を $0.45\,\mathrm{J/(g\cdot K)}$，水の比熱を $4.2\,\mathrm{J/(g\cdot K)}$ とする．

(1)　鉄製容器の熱容量．

(2)　温度平衡時の温度（有効数字 2 桁）．

II　前問の鉄製容器と水 $500\,\mathrm{g}$ を合わせて $45\,^\circ\mathrm{C}$ の状態で保った．ここに，温度 $-10\,^\circ\mathrm{C}$，$100\,\mathrm{g}$ の氷を入れると，氷は全て融けた．氷の比熱 $2.1\,\mathrm{J/(g\cdot K)}$，氷の融解熱を $3.3\times10^2\,\mathrm{J/g}$ とする．温度平衡時の温度を求めよ．

III　水（質量 m_1，比熱 c_1，温度 T_1），氷（質量 m_2，比熱 c_2，温度 $T_2<0$，融解熱 L），容器（熱容量 C，温度 T）を合わせると，氷は解け切らず $km_2\,(0<k<1)$ だけ融けた．氷が融けきらないような m_2 の範囲を求めよ．

【解答】

I (1)　熱容量の定義より，

$$C = 0.45\,\mathrm{J/g\cdot K} \times 800\,\mathrm{g} = \underline{360\,\mathrm{J/K}}\,.$$

(2)　全体のエネルギー収支を計算して，

$$0 = 0.45\,\mathrm{J/g\cdot K} \times 800\,\mathrm{g} \times (t-20)\,\mathrm{K} + 4.2\,\mathrm{J/g\cdot K} \times 200\,\mathrm{g} \times (t-60)\,\mathrm{K}$$
$$\therefore t = \frac{2\times 6^2 \times 8 \times 10^2}{2 \times 6 \times 10^2} = \underline{48\,^\circ\mathrm{C}}\,.$$

II　全体のエネルギー収支を計算して[*25]，

$$\begin{aligned} 0 &= 360\,\mathrm{J/K} \times (t-45)\,\mathrm{K} + 500\,\mathrm{g} \times 4.2\,\mathrm{J/g\cdot K} \times (t-45)\,\mathrm{K} \\ &\quad + 100\,\mathrm{g} \times 2.1\,\mathrm{J/g\cdot K} \times \{0-(-10)\}\,\mathrm{K} + 3.3 \times 10^2\,\mathrm{J/g} \times 100\,\mathrm{g} \\ &\quad + 100\,\mathrm{g} \times 4.2\,\mathrm{J/g\cdot K} \times (t-0)\,\mathrm{K} \end{aligned}$$
$$\therefore t = \frac{105}{4} \fallingdotseq \underline{26\,^\circ\mathrm{C}}\,.$$

III　全体のエネルギー収支を計算して，

$$0 = m_1c_1(0-T_1) + m_2c_2(0-T_2) + L\cdot km_2 + C(0-T)$$
$$\therefore k = \frac{m_1c_1T_1 + m_2c_2T_2 + CT}{m_2L}\,.$$

ここで，$0<k<1$ ならば融けきらないので[*26]，

$$0 < \frac{m_1c_1T_1 + m_2c_2T_2 + CT}{m_2L} < 1\,, \qquad \therefore \underline{\frac{m_1c_1T_1 + CT}{L - c_2T_2} < m_2 < \frac{m_1c_1T_1 + CT}{-c_2T_2}}\,.$$

[*25] 氷については，氷の温度上昇（第 3 項），氷の融解（第 4 項），とけて水になった後の水の温度上昇（第 5 項）まで考慮する．

[*26] $k=1$ ならばちょうど全て融けきる．対偶を考えて，融けきるならば $k>1$ または $k<0$ であり，物理的意味を持つのは $k>1$ であるので，融けきるならば $k>1$ である．このとき，終状態の温度は $0\,^\circ\mathrm{C}$ ではなくなり，全体のエネルギー収支の式が変わる（容器と水の終状態での温度を T_{fin} のようにすればよい）．

6
波動前半

第 6 部波動前半では，波の諸々の性質と力学的な波動（音に関する現象）を扱う．第 1 章では，波の性質について扱う．はじめに波のグラフ表現から学び，波全体の動きをとらえる波形グラフ，波の各部分の振動の様子を表す振動グラフと 2 種類あるグラフのうち，波の情報は波形グラフから読み取るのが基本である，ということを身に着ける．続いて，波の式を扱う（グラフを数式で表現したもの）．その中で，波の反射，屈折，合成も扱う．また，波の合成の中で定常波について学習し，次章につなげる．第 2 章では，弦と気柱の固有振動を扱う．弦（両側固定端）は両端が節の定常波が，気柱は開管（両側自由端）が両端が腹の定常波，閉管（自由端と固定端）が端の片方が腹，もう一方が節の定常波が生じる．弦の方には弦を伝わる波の速さに関する公式があるが，これら 3 つは，基本的には境界条件の違いだけである．第 3 章では，ドップラー効果を扱う．ドップラー効果は大きく分けて公式導出問題と公式使うだけ問題に分けられるため，はじめ，授業内で標準的なな導出を行った後，公式を使う練習を行う．公式導出の別の方法については問題に入れてある．

§6.1 波の性質・正弦進行波

第 1 章では，波の性質について扱う．はじめ，波のグラフを扱うが，グラフの読み取りは波形グラフから読み取ることを基本とし，徹底する．続いて，波の式を扱い，その中で[*1]反射，屈折，合成（重ね合わせ）に関する問題を扱う．波の式の立式は，慣れるまでは日本語で立てた後に数式化するようにするのが良い．また，最後には波の干渉（重ね合わせ）に関する計算問題も入れてあるが，長い目で見て学習をしたい場合，干渉条件は位相差で議論する癖をつけておく．

■簡単なまとめ①

- 媒質の振動数 f と周期 T の関係：$f = \dfrac{1}{T}$
- 波の基本式（v は伝わる速さ，λ は波長，f は振動数）：$v = \dfrac{\lambda}{T} = f\lambda$
- 波のグラフ：

  波形グラフから読み取るのが基本．波形グラフ→振動グラフ，振動グラフ→波形グラフの行き来もできるようにしたい．

  $$\begin{cases} \text{波形グラフ} \quad \rightarrow \quad \text{グラフの波 1 個分が波長}\lambda \\ \text{振動グラフ} \quad \rightarrow \quad \text{グラフの波 1 個分が周期 } T \end{cases}$$

  振動グラフは，媒質ごとの力学で学んだ変位と時刻のグラフである．

- 反射：

  $$\begin{cases} \text{境界が自由端} \quad \rightarrow \quad \text{位相のずれなくそのまま反射} \\ \text{境界が固定端} \quad \rightarrow \quad \text{位相が}\pi\text{ずれて反射（上下逆さまで反射）} \end{cases}$$

- 屈折の法則（スネルの法則）：

  $$n_1 \sin\theta = n_2 \sin\theta_2$$

  スネルの法則は上記のように 1 行の式の形（保存則の形）で使うようにする．n_1，θ_1 は媒質 1 側の屈折率，入射角とし，n_2，θ_2 は媒質 2 側で同様とする．なお，境界間で振動数は保存し，波が屈折率 n_1 の領域から n_2 の領域に透過したとき，その波長は $\lambda \rightarrow \dfrac{\lambda}{n_2/n_1}$ となる（波の基本式より v も同様）．

[*1] 作図問題はその前に入れてある．

■簡単なまとめその②

- 波の式：

日本語で言語化してから立式する．

$$y(x,t) = A\sin(\omega t \mp kx + \theta_0)\,.$$

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ は角振動数（T は周期），$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ は波数（λ は波長），θ_0 は初期位相である．また，位相（三角関数の中身）の符号から進行方向を読み取れる（負のとき正方向に伝播，正のとき負方向に伝播）．

- 定常波：

振幅，波長，振動数の等しく逆向きの波を重ね合わせると生じる．最も激しく振動する点を腹，全く振動しない点を節という．腹と腹（節と節）の間隔は半波長となる．

- 干渉条件：

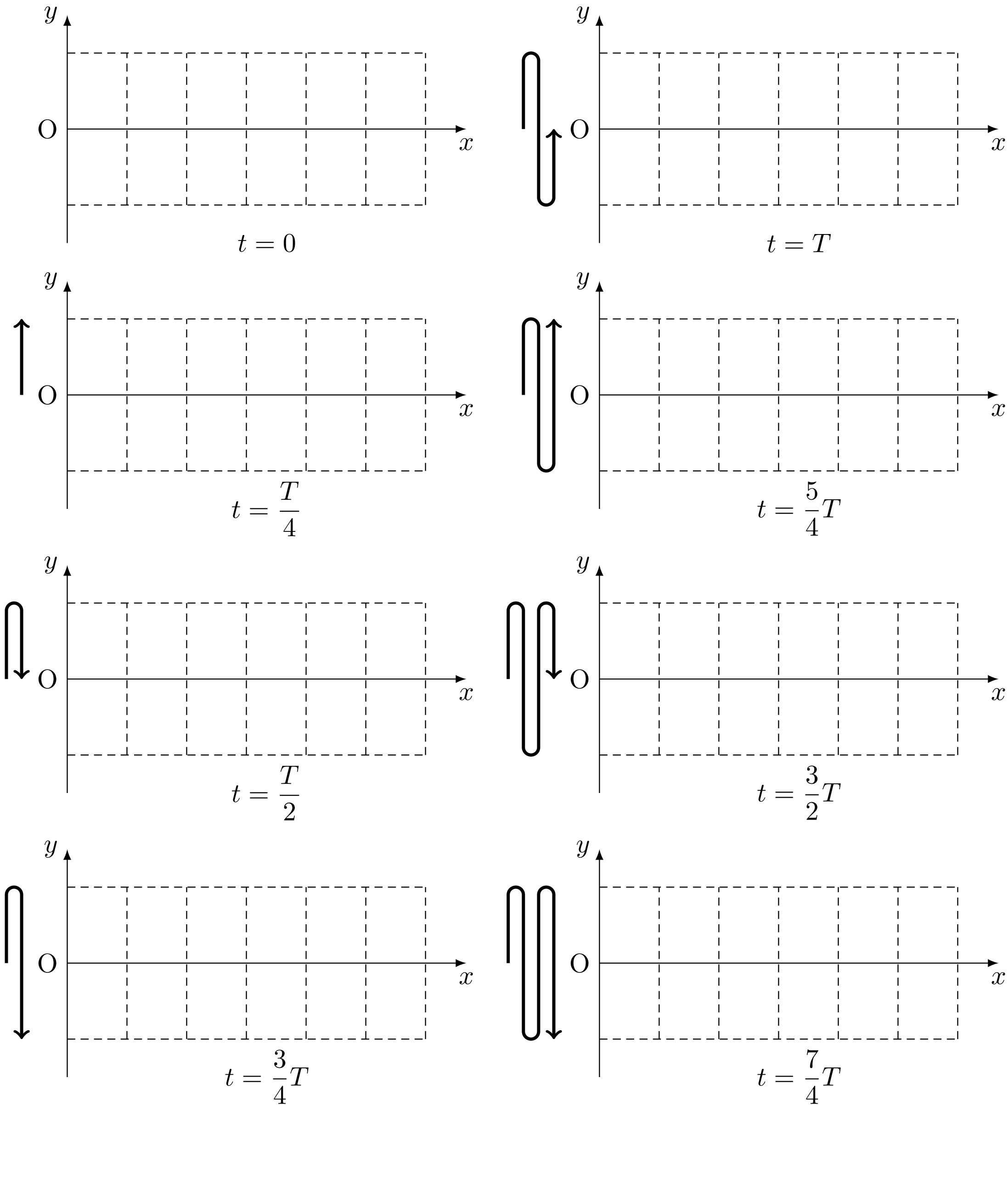
干渉条件は整数を m として，

$$\begin{aligned}(\text{位相差}) &= \frac{2\pi}{\lambda}(\text{経路差}) + (\text{初期位相差}) + (\text{反射に伴う位相のずれ})\\ &= \begin{cases} 2m\pi & (\text{強めあい}),\\ (2m-1)\pi & (\text{弱めあい}).\end{cases}\end{aligned}$$

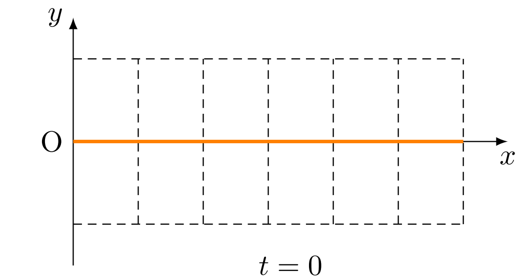
特に光の干渉で使うことだが，媒質中では $\lambda \to \dfrac{\lambda}{n}$ とする（n は屈折率）．

1. 波形グラフの作成

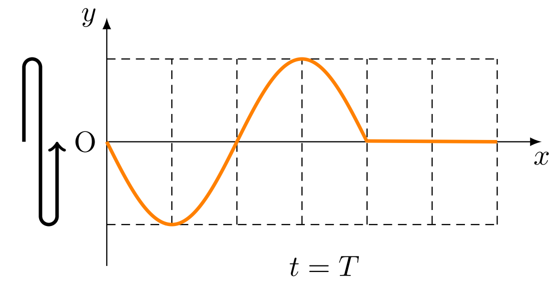
x 軸に沿った一様な媒質中を伝わる正弦波について考える．位置 $x=0$ に単振動（周期 T）を行う波源がある．時刻 $t=0$ に波源は振動を始めた．グラフの各時刻における波形グラフを図示せよ．ただし，x 軸 1 目盛りを $\dfrac{1}{4}$ 波長とせよ．



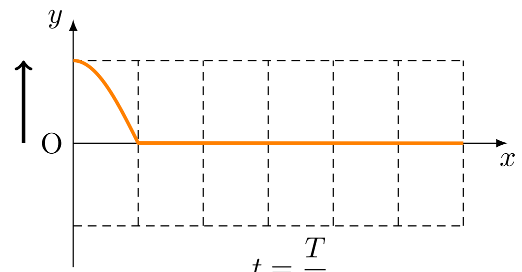
【解答】



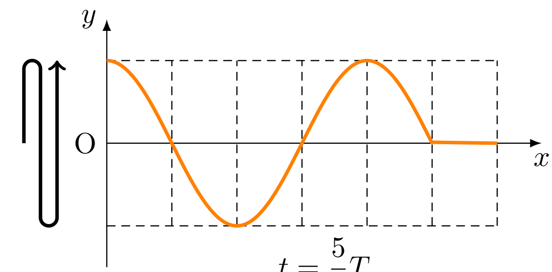
$t=0$



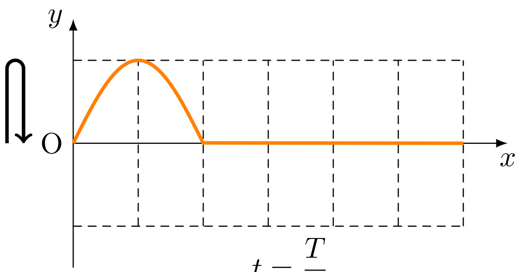
$t=T$



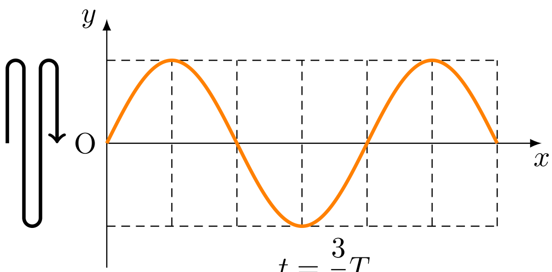
$t=\dfrac{T}{4}$



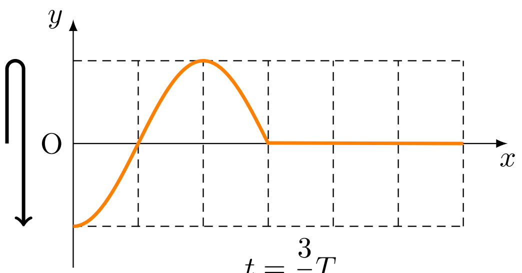
$t=\dfrac{5}{4}T$



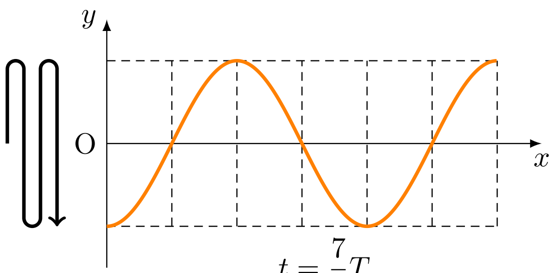
$t=\dfrac{T}{2}$



$t=\dfrac{3}{2}T$



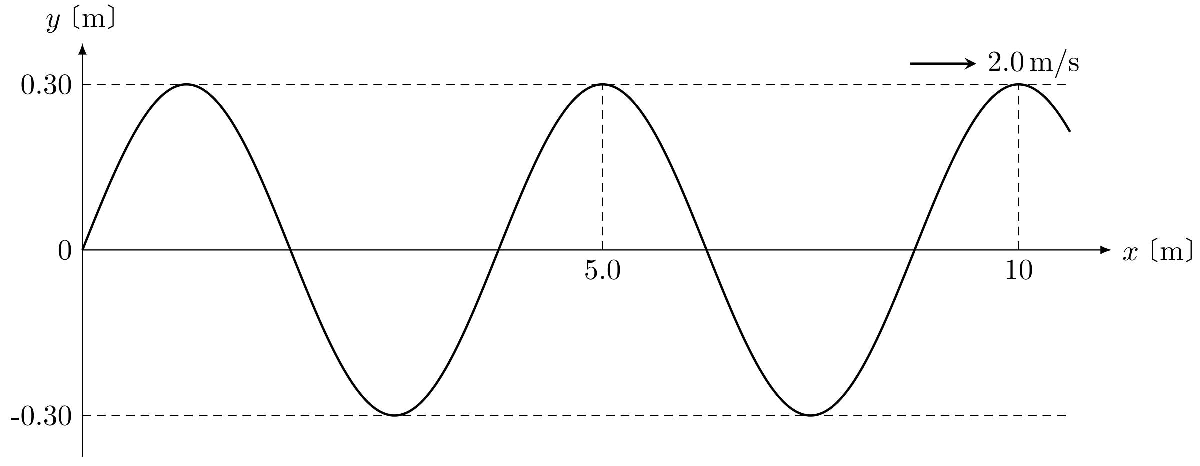
$t=\dfrac{3}{4}T$



$t=\dfrac{7}{4}T$

2. 波形グラフの読み取り

x 軸に沿った一様な媒質中を速さ $v = 2.0\,\mathrm{m/s}$ で伝わる正弦波がある．時刻 $t = 0$ において，位置 x とその位置における媒質の変位 y の関係は図のようになっていた．振幅 A，周期 T，振動数 f，波長 λ をそれぞれ求めよ．



【解答】

波形グラフより，

$$A = \underset{\sim\sim\sim}{0.30\,\mathrm{m}}\,,\quad \lambda = \underset{\sim\sim\sim}{4.0\,\mathrm{m}}\,.$$

また，波の基本式，および周期と振動数の関係より，

$$f = \frac{v}{\lambda} = \underset{\sim\sim\sim}{0.50\,\mathrm{Hz}}\,,\quad T = \frac{1}{f} = \underset{\sim\sim\sim}{2.0\,\mathrm{s}}\,.$$

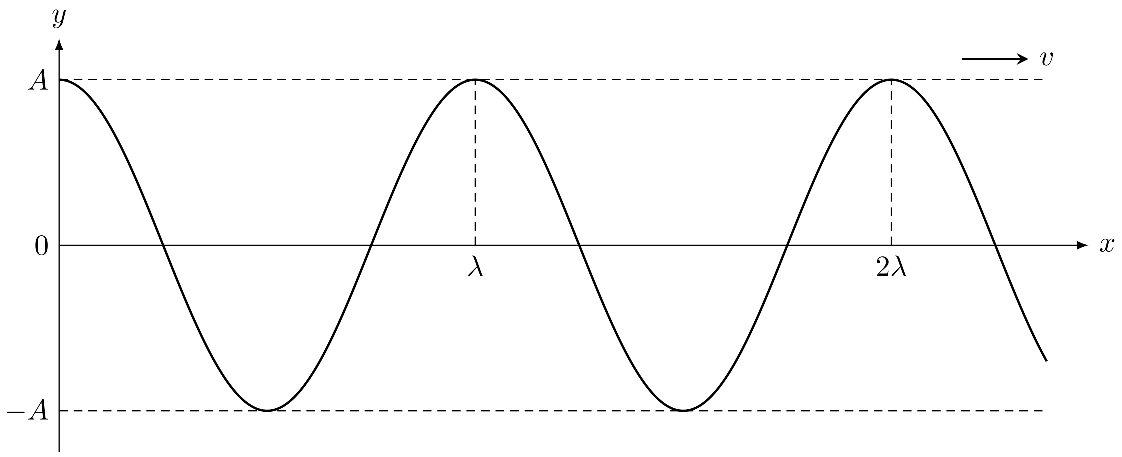
3. 波形グラフの読み取り

x 軸に沿った一様な媒質中を正方向に速さ v で伝わる正弦波（波長 λ）がある．時刻 $t=0$ において，位置 x とその位置における媒質の変位 y の関係は図のようになっていた．

(1)　媒質の振動周期 T を求めよ．

(2)　時刻 $t=0$ において，媒質の振動の速度が正方向で大きさが最大となっている位置を $0 \leq x \leq 2\lambda$ の範囲で答えよ．

(3)　原点 $(x=0)$ における媒質の変位を，時刻 t の関数として表す式 $y(0,t)$ を求めよ．また，原点における振動グラフ（横軸時刻 t，縦軸媒質の変位 y）を $0 \leq t \leq 2T$ の範囲で図示せよ．



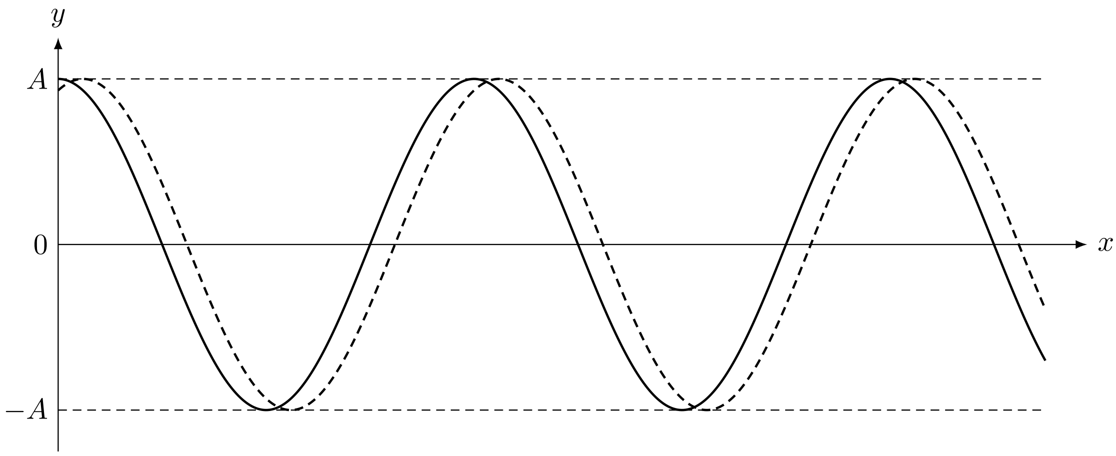
【解答】

(1)　波の基本式より，

$$T = \frac{\lambda}{v}.$$

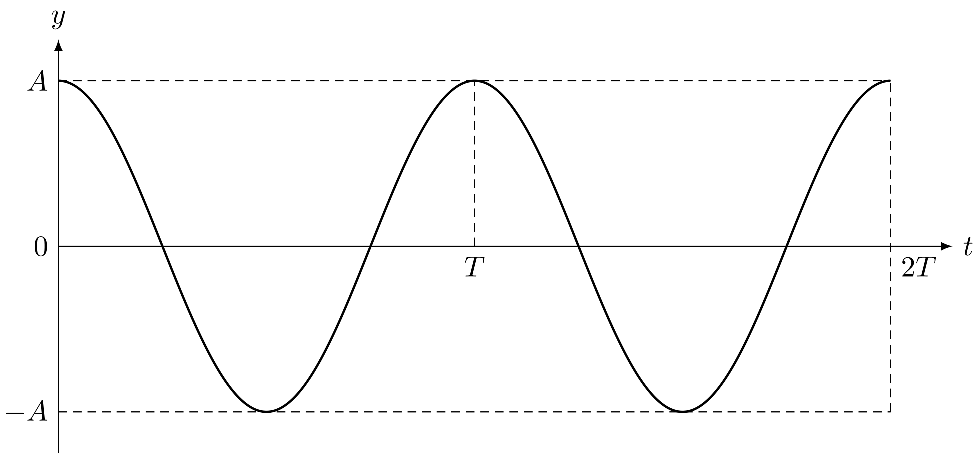
(2)　時刻 $t = 0$ から少しだけ後の時刻でのグラフは下図の破線のようになる．図より，

$$x = \frac{\lambda}{4},\quad \frac{5}{4}\lambda.$$



(3)　$t = 0$ で $y = A$ ゆえ，

$$y(0, t) = A\cos\left(\frac{2\pi v}{\lambda}t\right).$$



4. 波形グラフの読み取り

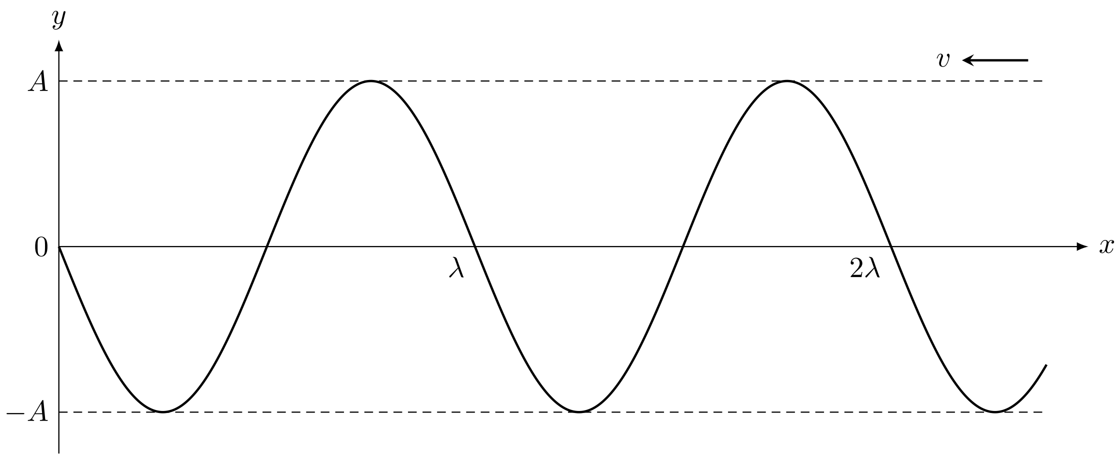
x 軸に沿った一様な媒質中を負方向に速さ v で伝わる正弦波（波長 λ，周期 T）がある．時刻 $t=0$ において，位置 x とその位置における媒質の変位 y の関係は図のようになっていた．

(1) 時刻 $t=0$ において，媒質の振動の速度が正方向で大きさが最大となっている位置を $0 \leq x \leq 2\lambda$ の範囲で答えよ．

(2) 時刻 $t=\dfrac{3}{4}T$ における波形グラフ（横軸位置 x，縦軸媒質の変位 y）を $0 \leq x \leq 2\lambda$ の範囲で図示せよ．

(3) 時刻 $t=\dfrac{3}{4}T$ において，媒質の振動の速度が負方向で大きさが最大となっている位置を $0 \leq x \leq 2\lambda$ の範囲で答えよ．

(4) 位置 $x=\dfrac{\lambda}{2}$ における媒質の変位を，時刻 t の関数として表す式 $y(\lambda/2,t)$ を求めよ．また，位置 $x=\dfrac{\lambda}{2}$ における振動グラフ（横軸時刻 t，縦軸媒質の変位 y）を $0 \leq t \leq 2T$ の範囲で図示せよ．

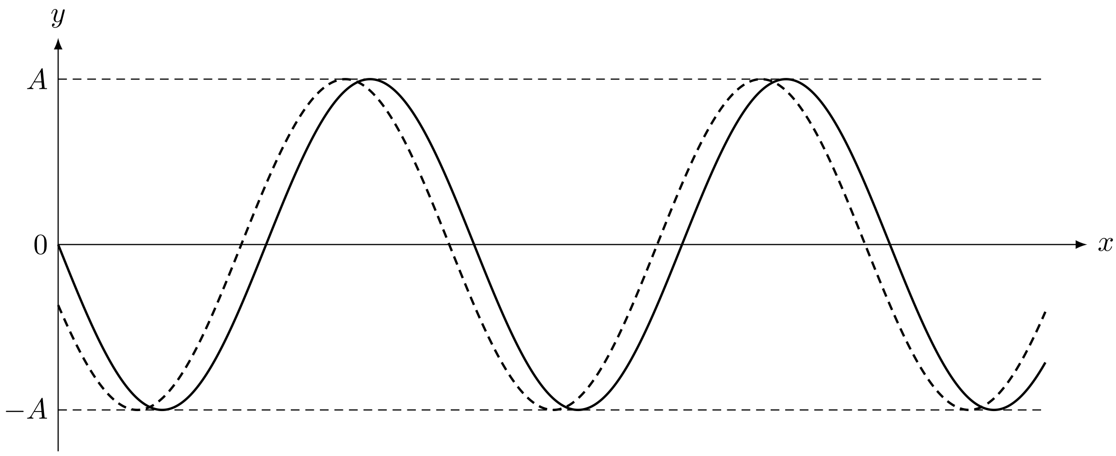


y
v
A
0
x
λ
2λ
$-A$

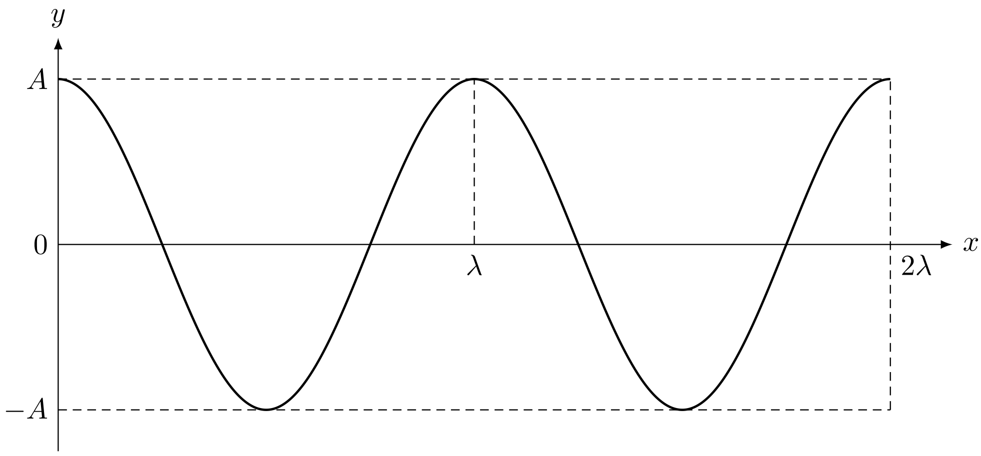
【解答】

(1)　時刻 $t = 0$ から少しだけ後の時刻でのグラフは下図の破線のようになる．図より，

$$x = \frac{\lambda}{2},\quad \frac{3}{2}\lambda.$$

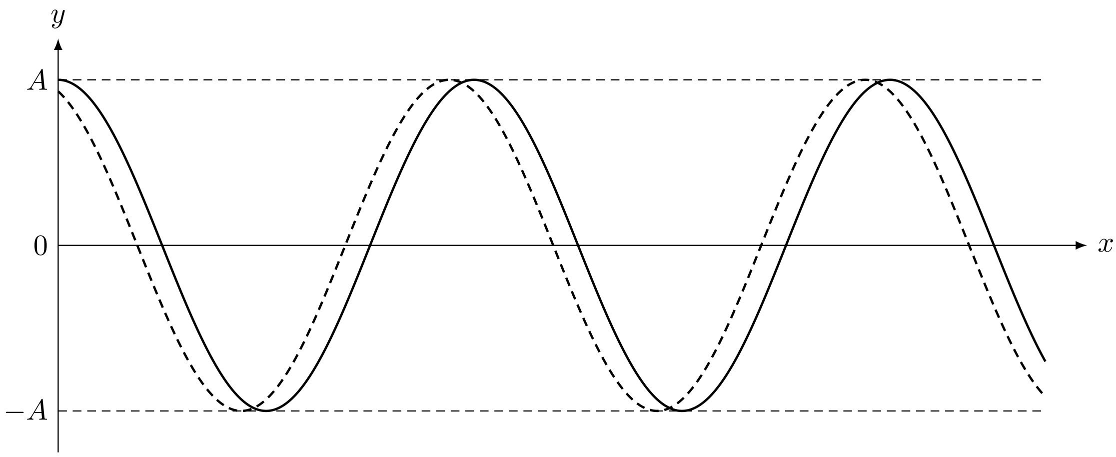


(2)　時刻 $t = \frac{3}{4}T$ での波形グラフは x 負方向に $\frac{3}{4}\lambda$ だけ平行移動したものとなる（下図）．



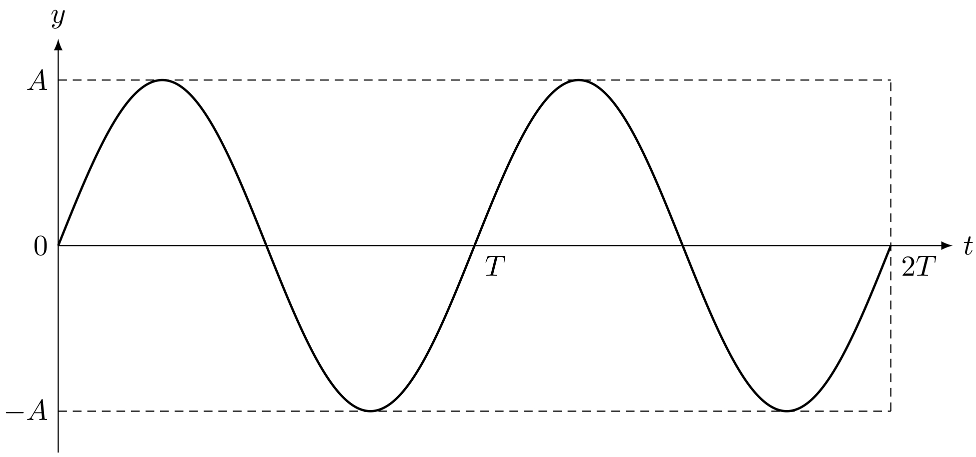
(3)　時刻 $t = \frac{3}{4}T$ から少しだけ後の時刻でのグラフは下図の破線のようになる．図より，

$$x = \frac{1}{4}\lambda,\quad \frac{5}{4}\lambda.$$



(4)　　$t=0$ で $y=0$，$t=\dfrac{T}{4}$ で $y=A$ ゆえ，

$$y(\lambda/2,t)=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{A\sin\left(\frac{2\pi v}{\lambda}t\right)}.$$



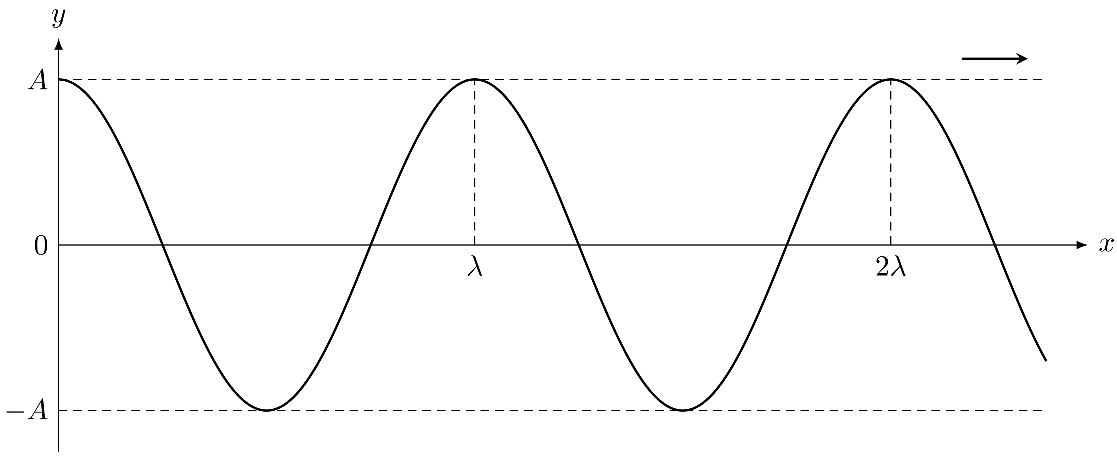
5. 波形グラフの読み取り（縦波）

x 軸の沿った媒質中を正方向に伝わる縦波（疎密波）の正弦波がある．時刻 $t=0$ において，波形グラフ（縦軸媒質の変位 y，横軸媒質の位置 x）は図のようであった．媒質の変位 y の符号は，x 軸正の向きを正とする．

(1)　時刻 $t=0$ において，媒質が最も密になっている位置を，$0 \leq x \leq 2\lambda$ の範囲で答えよ．

(2)　時刻 $t=0$ において，媒質が最も疎になっている位置を，$0 \leq x \leq 2\lambda$ の範囲で答えよ．

(3)　時刻 $t=0$ において，媒質の速度が最大となっている位置を，$0 \leq x \leq 2\lambda$ の範囲で答えよ．



【解答】

(1)　密の位置は図から読み取って，

$$x = \frac{1}{4}\lambda,\quad \frac{5}{4}\lambda.$$

(2)　疎の位置は図から読み取って，

$$x = \frac{3}{4}\lambda,\quad \frac{7}{4}\lambda.$$

(3)　少し後の状態を考えて，

$$x = \frac{1}{4}\lambda,\quad \frac{5}{4}\lambda.$$

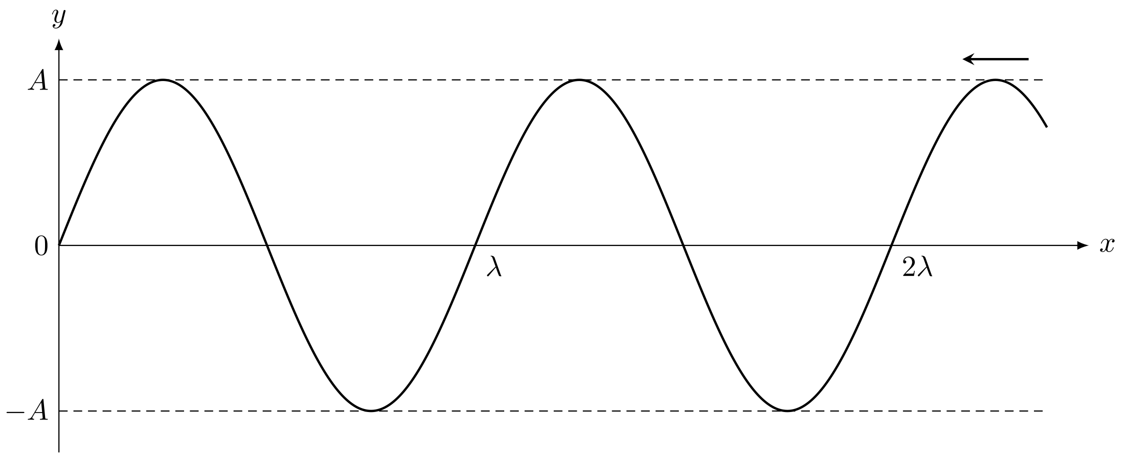
6. 波形グラフの読み取り（縦波）

x 軸の沿った媒質中を負方向に伝わる縦波（疎密波）の正弦波がある．時刻 $t=0$ において，波形グラフ（縦軸媒質の変位 y，横軸媒質の位置 x）は図のようであった．媒質の変位 y の符号は，x 軸負の向きを正とする．

(1)　時刻 $t=0$ において，媒質が最も密になっている位置を，$0 \leq x \leq 2\lambda$ の範囲で答えよ．

(2)　時刻 $t=0$ において，媒質の速さが正方向に最大となっている位置を，$0 \leq x \leq 2\lambda$ の範囲で答えよ．

(3)　時刻 $t=0$ において，位置 $x=\lambda$ の振動グラフを，$0 \leq t \leq T$ の範囲で図示し，時刻 t の関数として表せ．ただし，T は振動周期を表す．



【解答】

(1)　密の位置は図から読み取って，

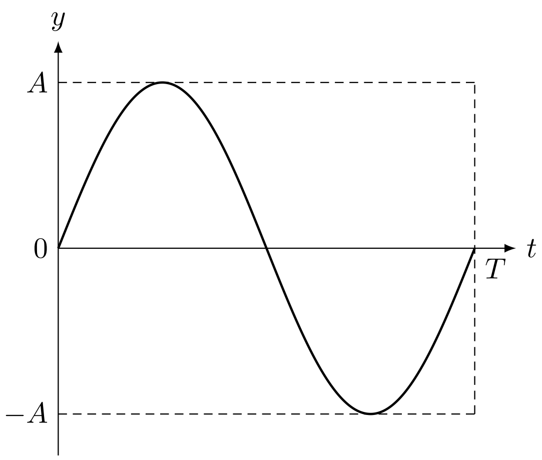
$$x = \lambda,\quad 2\lambda.$$

(2)　少し後の波形グラフから読み取って，

$$x = \frac{1}{2}\lambda,\quad \frac{3}{2}\lambda.$$

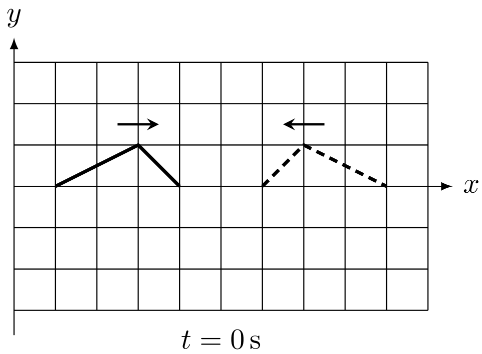
(3)　振動グラフの関数は，

$$y(\lambda, t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

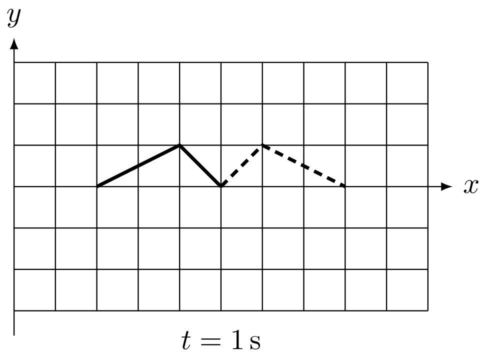


7. 合成波の作図

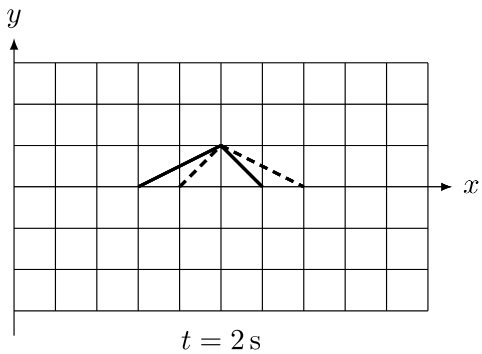
図のように，実線で描かれた右向き進行波（波 1 と呼ぶ）と，破線で描かれた左向き進行波（波 2 と呼ぶ）の各時刻における合成波を作図せよ．



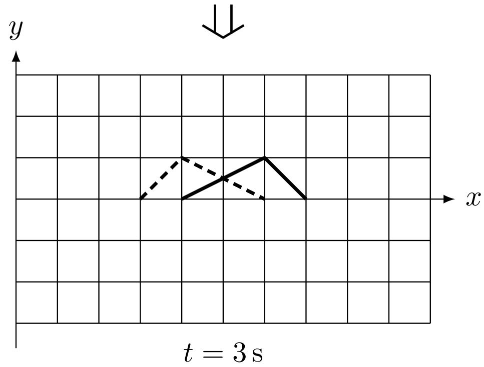
$t = 0\,\mathrm{s}$



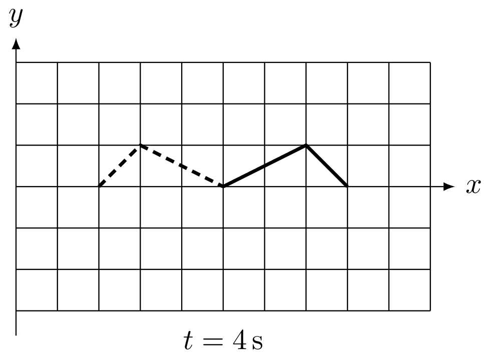
$t = 1\,\mathrm{s}$



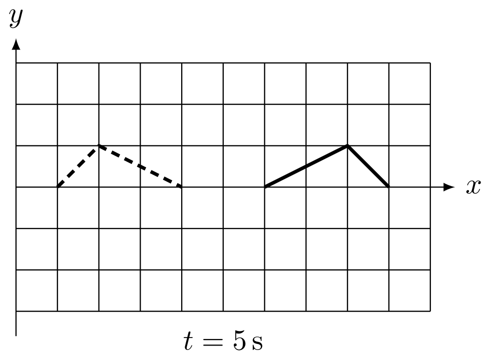
$t = 2\,\mathrm{s}$



$t = 3\,\mathrm{s}$

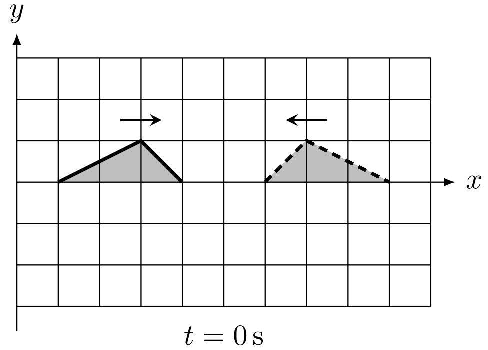


$t = 4\,\mathrm{s}$

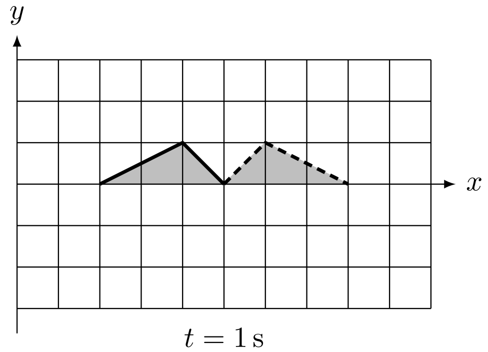


$t = 5\,\mathrm{s}$

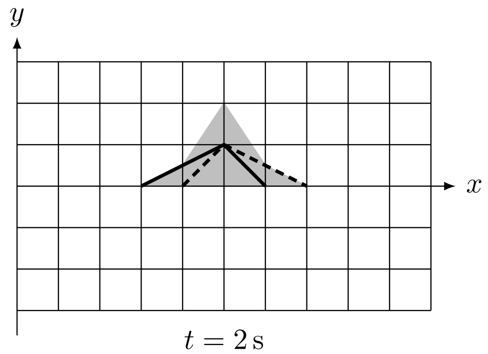
【解答】



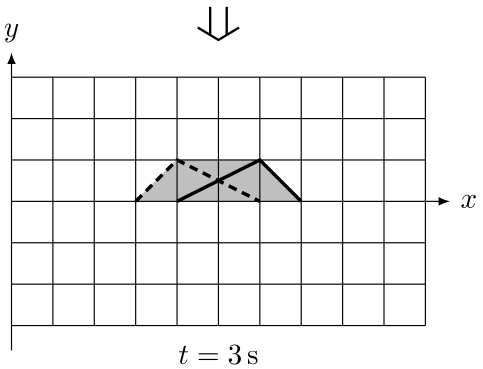
$t = 0\,\mathrm{s}$



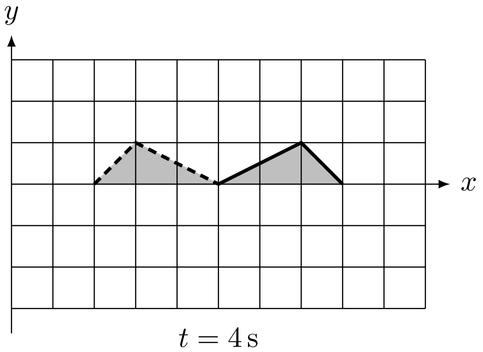
$t = 1\,\mathrm{s}$



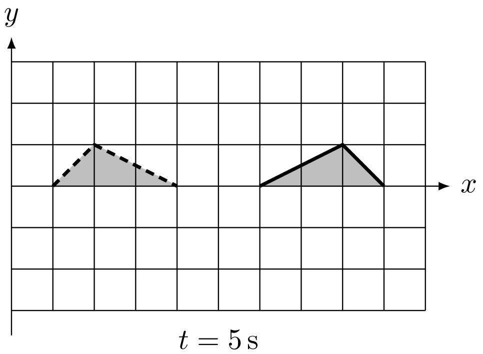
$t = 2\,\mathrm{s}$



$t = 3\,\mathrm{s}$



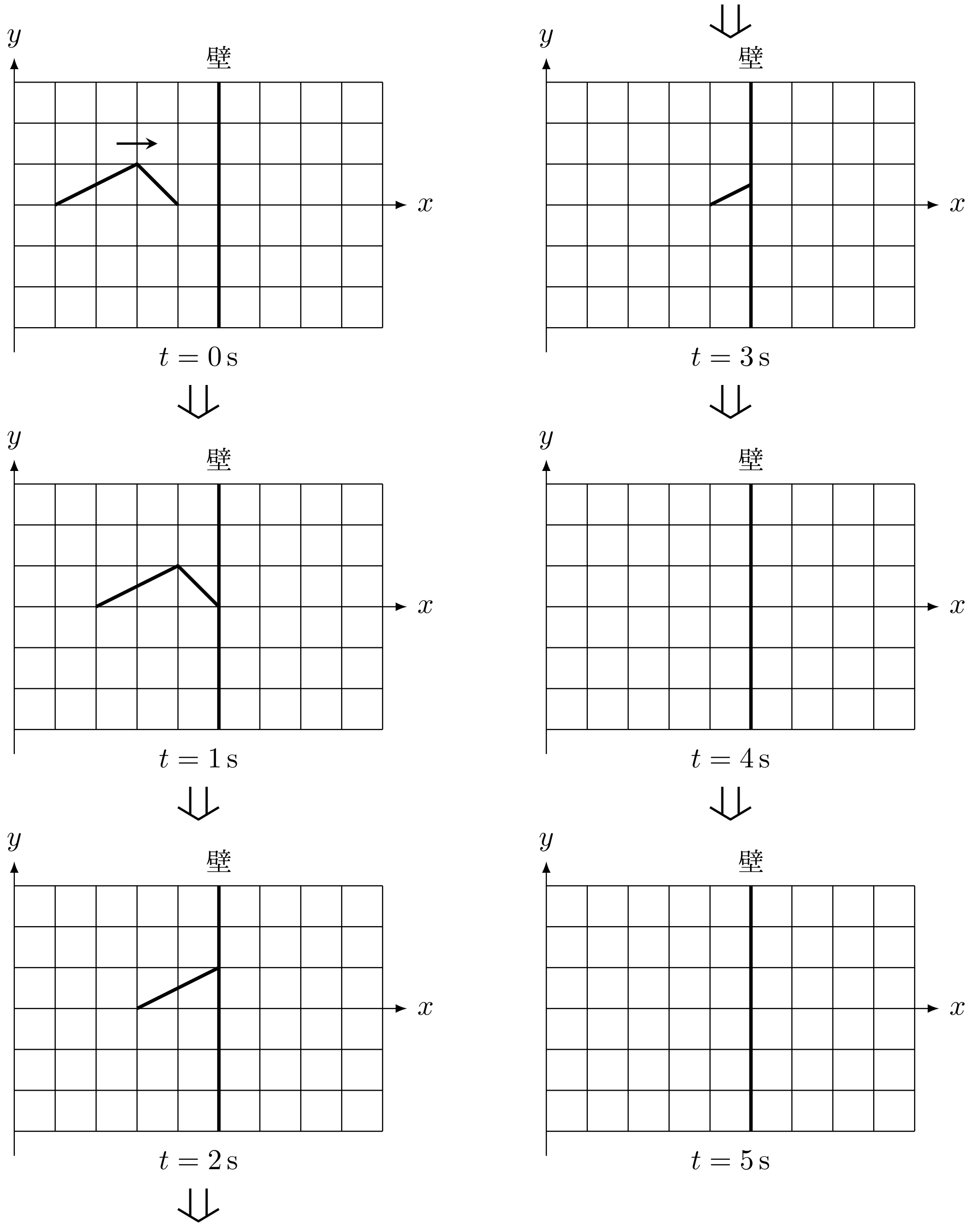
$t = 4\,\mathrm{s}$



$t = 5\,\mathrm{s}$

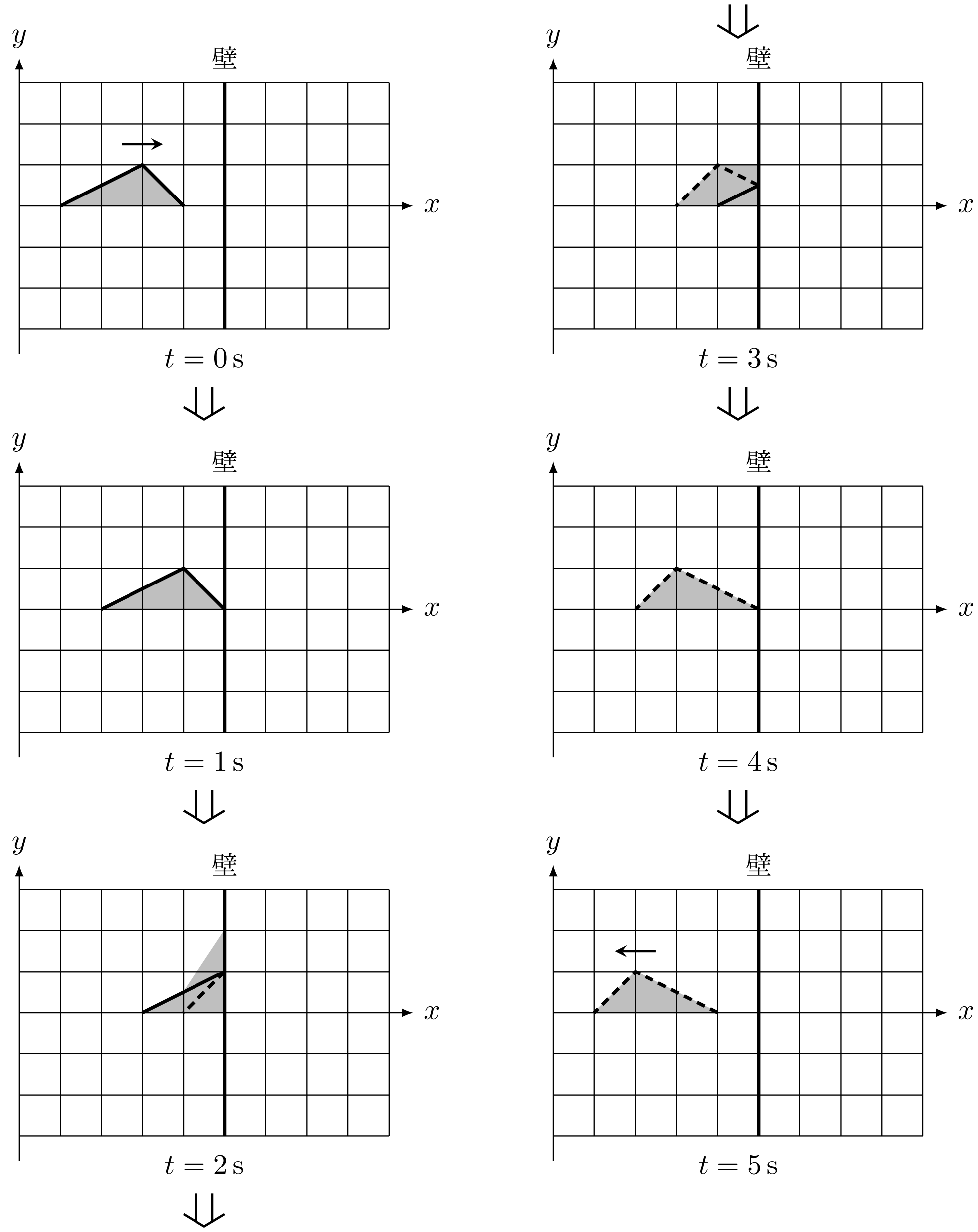
8. 反射波の作図①

図のように，実線で描かれた右向き進行波が壁（自由端）で反射する．各時刻で生じる反射波と，観測される合成波を作図せよ．



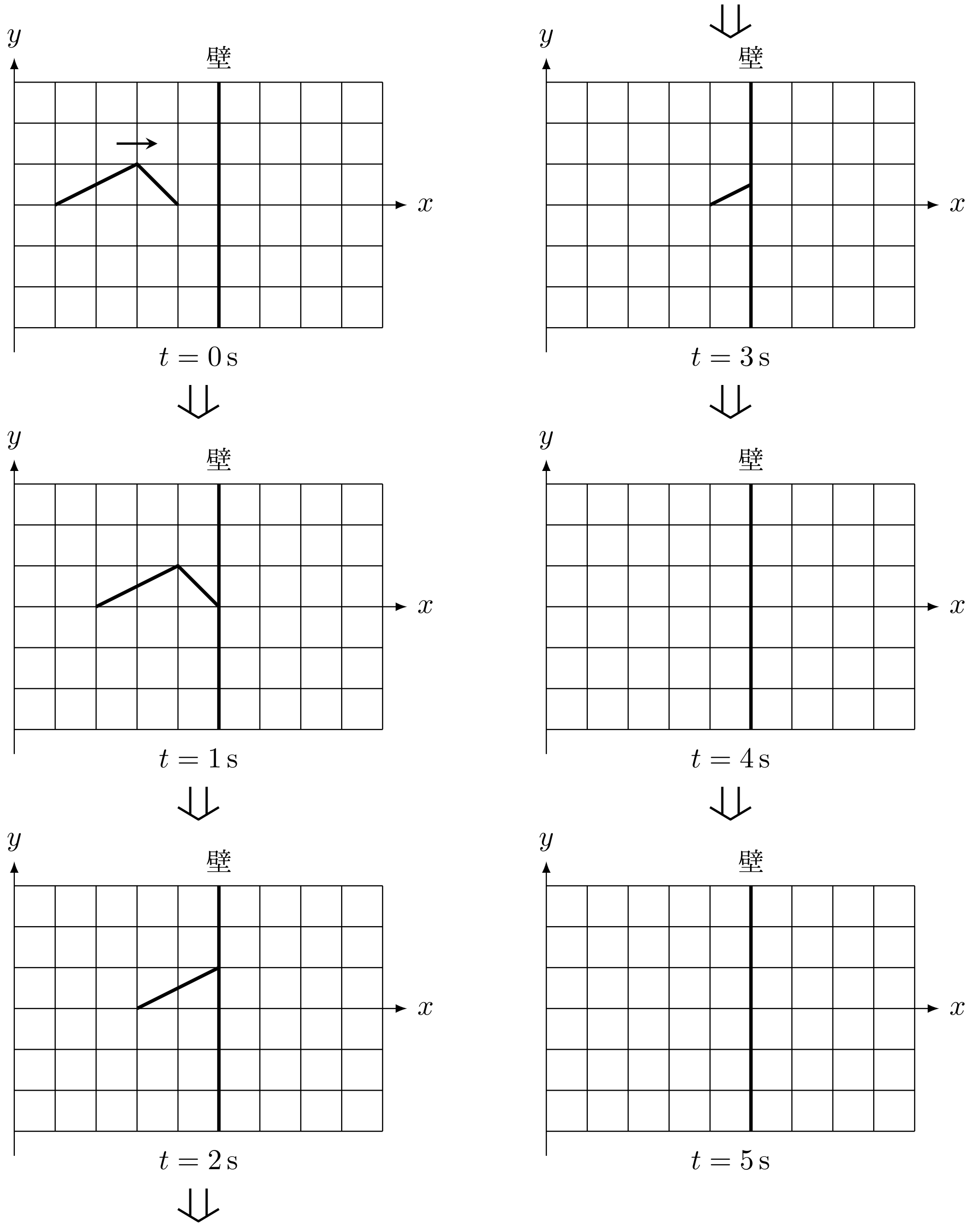
【解答】

反射波は破線，合成波は塗りつぶしで示す．



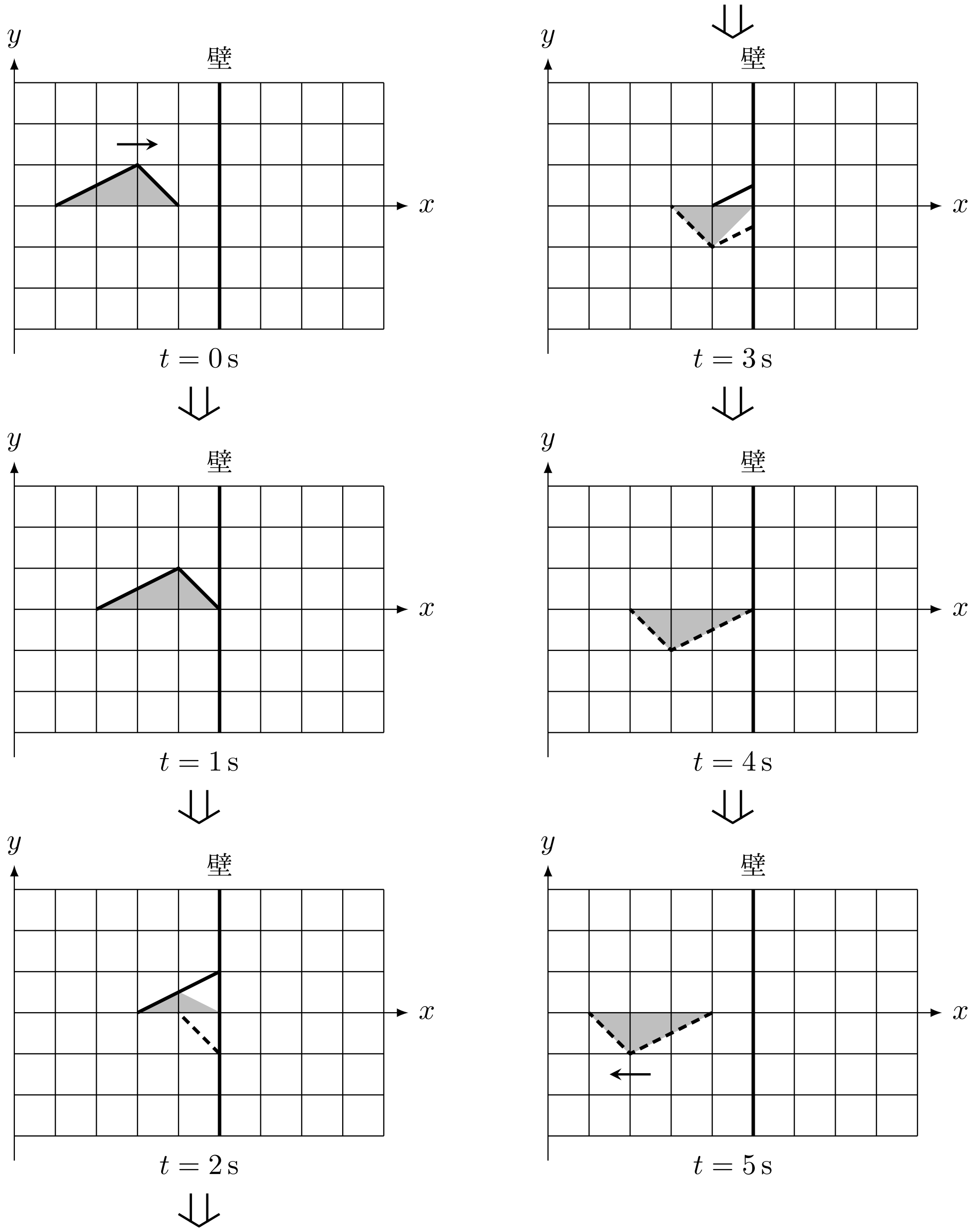
9. 反射波の作図②

図のように，実線で描かれた右向き進行波が壁（固定端）で反射する．各時刻で生じる反射波と，観測される合成波を作図せよ．



【解答】

反射波は破線，合成波は塗りつぶしで示す.



10. 波の反射

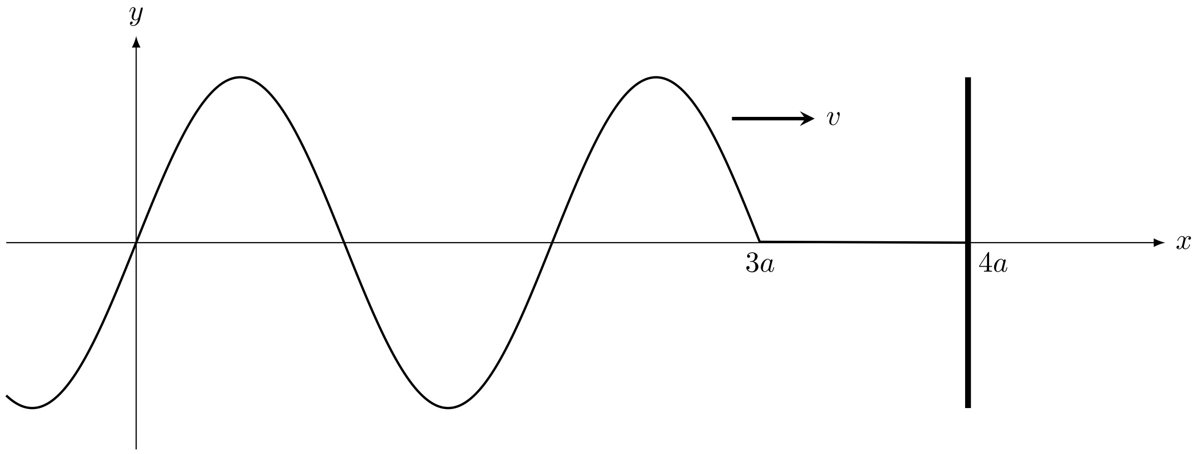
図のように，x 軸正方向に速さ v で伝播する正弦進行波（振幅 A）を考える．図は時刻 $t=0$ の瞬間を表している．$x=4a$ に反射板があり，進行波は反射板で自由端反射を行う．波の減衰は無視する．

(1)　媒質の振動周期 T を求めよ．

(2)　$0 \leq x \leq 4a$ の範囲で観測される定常波の節の数を求めよ．

(3)　$x=3a$ にある媒質の振動グラフを，$0 \leq t \leq 2T$ の範囲で図示せよ．

(4)　$x=\dfrac{7}{2}a$ にある媒質の振動グラフを，$0 \leq t \leq T$ の範囲で図示せよ．



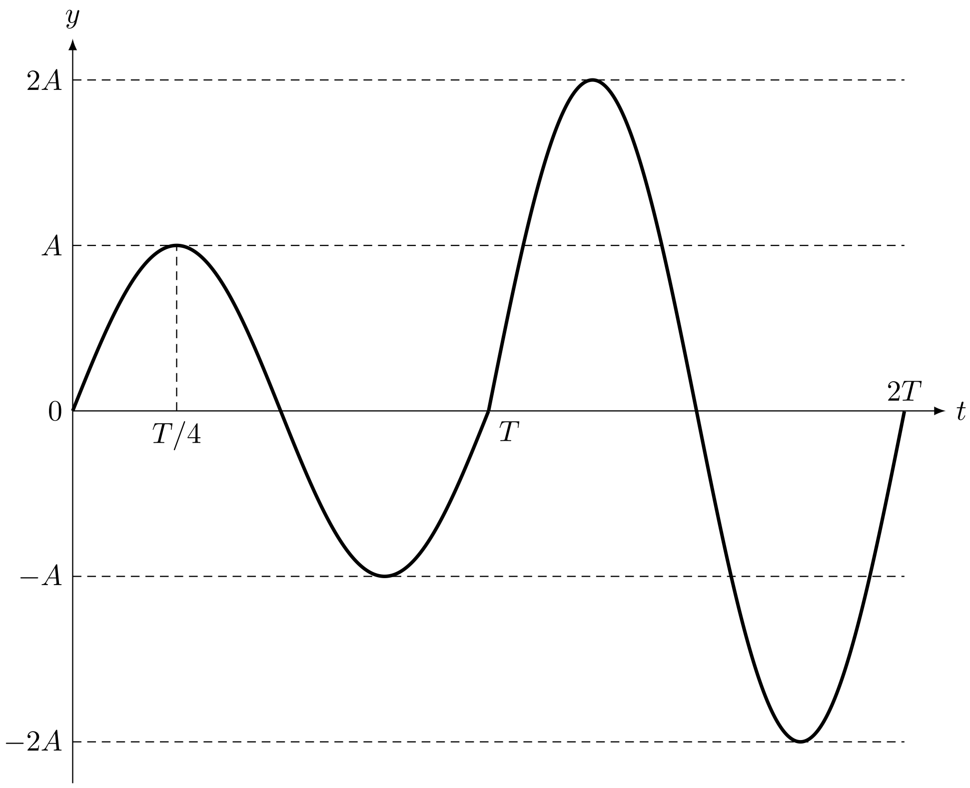
【解答】

(1)　波の基本式より,

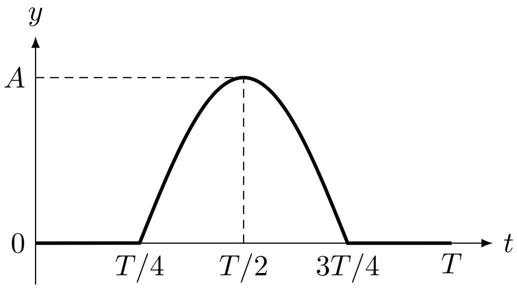
$$T=\frac{2a}{\underline{v}}.$$

(2)　自由端反射ゆえ $x=4a$ は腹となる．そこから半波長おきに節が生じるので 4 個.

(3)　$x=3a$ は腹となるので，グラフは以下のようになる．



(4)　$x=\frac{7}{2}a$ は節となるので，グラフは以下の通りになる．



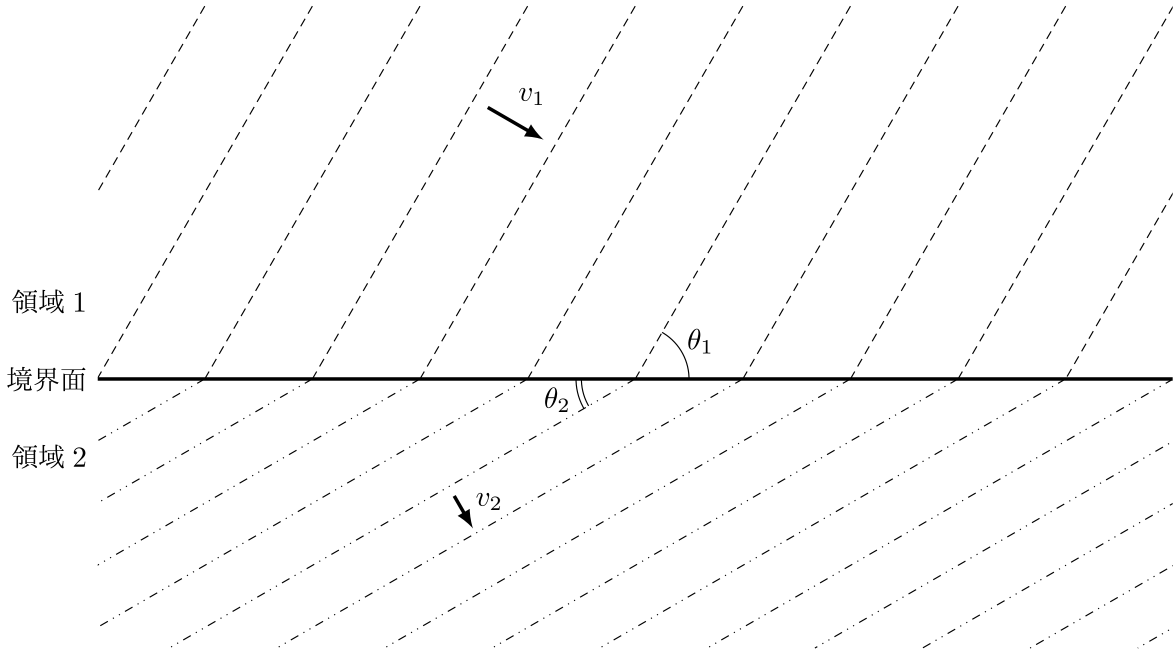
11. 波面を見る波の反射・屈折

領域 1 内を速さ v_1 で伝わる入射波（波長 λ_1）の反射，屈折について考える．領域 1 側の媒質 1 に対する領域 2 の媒質 2 の相対屈折率[*2]を n とする．

(1)　入射波の振動数 f を求めよ．

(2)　領域 2 における波の速さ v_2，および波長 λ_2，波の進行方向の正弦 $\sin\theta_2$ を求めよ．

(3)　領域 1 では，入射波と反射波による合成波が観測される．合成波の節をつないだ節線の間隔 d を求めよ．



[*2] 領域 1 の屈折率を 1 としたときの領域 2 の屈折率を指す．すなわち，基準物質の屈折率を 1 としたとき，媒質 1 の屈折率を n_1，媒質 2 の屈折率を n_2 としたとき，$\dfrac{n_2}{n_1}$ で定義される．

【解答】

(1)　波の基本式より，

$$f = \frac{v_1}{\lambda_1}\,.$$

(2)　両媒質間で振動数は不変であり，波長，速さはそれぞれ，

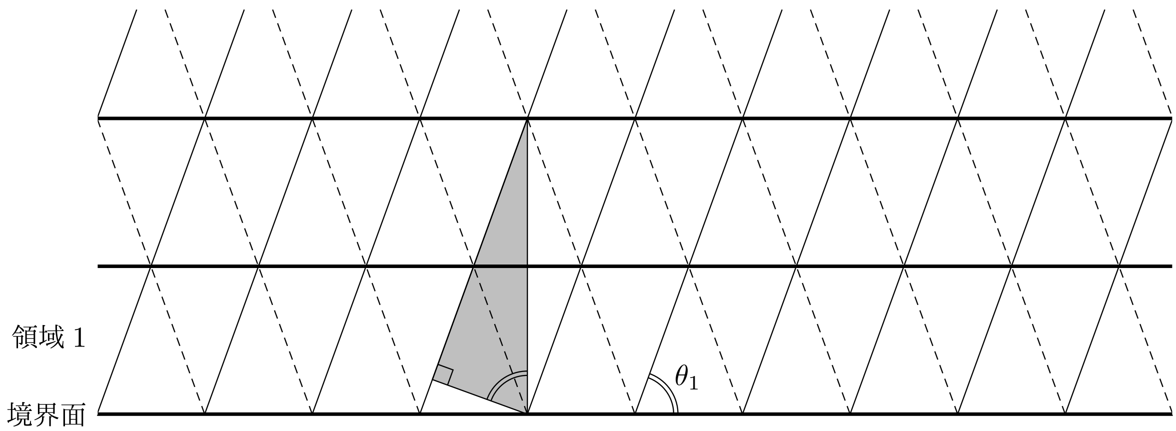
$$v_2 = \frac{v_1}{n}\,,\quad \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{n}\,.$$

また，スネル則より，

$$1 \cdot \sin\theta_1 = n \sin\theta_2\,, \qquad \therefore \sin\theta_2 = \frac{1}{n}\sin\theta_1\,.$$

(3)　以下の図より[*3]，

$$\lambda_1 = 2d\cos\theta_1\,, \qquad \therefore d = \frac{\lambda_1}{2\cos\theta_1}\,.$$



[*3] 入射波を実線，反射波を破線で示し，節線，もしくは腹線を太い実線で示した．固定端反射なら節線，自由端反射なら腹線となるが，ともに間隔は等しいので図に示した太い実線の間隔を計算すればよい．

12. 正弦波の式①（基本）

以下では，媒質を伝わる波の速さを v，媒質の振動周期を T とする．

(1)　x 軸に沿った媒質を正方向へ伝わる正弦波を考える．位置 $x=0$ における媒質の変位 y は，時刻 t の関数として，

$$y(0,t)=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

と表される．任意の時刻 t，位置 $x\,(>0)$ における媒質の変位 $y(x,t)$ を求めよ．

(2)　x 軸に沿った媒質を負方向へ伝わる正弦波を考える．位置 $x=0$ における媒質の変位 y は，時刻 t の関数として，

$$y(0,t)=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\phi_0\right)$$

と表される．任意の時刻 t，位置 $x\,(>0)$ における媒質の変位 $y(x,t)$ を求めよ．

（できる人は）$x<0$ の領域でも同じ波の式で表されることを確認せよ．

【解答】

(1)　原点から位置 x まで波が伝わるのに要する時間は $\dfrac{x}{v}$ である．よって，

$$\begin{pmatrix} \text{位置 } x \text{ での} \\ \text{今の変位} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{原点での} \\ x/v \text{ 前の変位} \end{pmatrix}$$

より，

$$y(x,t) = y\left(0, t - \frac{x}{v}\right) = A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)\right\}.$$

(2)　位置 x から原点まで波が伝わるのに要する時間は $\dfrac{x}{v}$ である．よって，

$$\begin{pmatrix} \text{位置 } x \text{ での} \\ \text{今の変位} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{原点での} \\ x/v \text{ 後の変位} \end{pmatrix}$$

より，

$$y(x,t) = y\left(0, t + \frac{x}{v}\right) = A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{v}\right) + \phi_0\right\}.$$

なお，$x < 0$ の領域についても，原点から位置 x まで波が伝わるのに要する時間は $\dfrac{|x|}{v}$ であるから，

$$\begin{pmatrix} \text{位置 } x \text{ での} \\ \text{今の変位} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{原点での} \\ |x|/v \text{ 前の変位} \end{pmatrix}$$

より[*4]，

$$y(x,t) = y\left(0, t - \frac{|x|}{v}\right) = A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{x}{v}\right) + \phi_0\right\}.$$

[*4] $x < 0$ ゆえ，$|x| = -x$ となることに注意．

13. 正弦波の式②（反射）

以下では，媒質を伝わる波の速さを v，媒質の振動数を f とする．

I　x 軸に沿った媒質を伝わる正弦波を考える．位置 $x=0$ には振動数 f で振動する波源があり，その変位 y は，時刻 t の関数として，

$$y(0,t)=A\sin(2\pi ft+\phi_0)$$

と表される．この振動によって生じた x 軸正方向に伝わる波を入射波と呼ぶ．位置 $x=L$ には反射板があり，入射波が反射板に入射することによって生じた波を反射波と呼ぶ．

(1)　任意の時刻 t，位置 $x\,(0<x<L)$ における入射波の変位 $y_{\mathrm{in}}(x,t)$ を求めよ．

(2)　反射は自由端反射の条件下で行われたものとする．任意の時刻 t，位置 $x\,(0<x<L)$ における反射波の変位 $y_{\mathrm{re}}(x,t)$ を求めよ．

(3)　反射は固定端反射の条件下で行われたものとする．任意の時刻 t，位置 $x\,(0<x<L)$ における反射波の変位 $y_{\mathrm{re}}(x,t)$ を求めよ．

II　x 軸に沿った媒質を伝わる正弦波を考える．位置 $x=0$ には反射板があり，また，$x=0$ における x 負方向に伝わる波（入射波と呼ぶ）の変位 y は，時刻 t の関数として，

$$y(0,t)=A\sin(2\pi ft+\phi_0)$$

と表される．入射波が反射板に入射することによって生じた波を反射波と呼ぶ[*5]．

(1)　任意の時刻 t，位置 $x\,(0<x<L)$ における入射波の変位 $y_{\mathrm{in}}(x,t)$ を求めよ．

(2)　反射は自由端反射の条件下で行われたものとする．任意の時刻 t，位置 $x\,(0<x<L)$ における反射波の変位 $y_{\mathrm{re}}(x,t)$ を求めよ．

(3)　反射は固定端反射の条件下で行われたものとする．任意の時刻 t，位置 $x\,(0<x<L)$ における反射波の変位 $y_{\mathrm{re}}(x,t)$ を求めよ．

[*5] このとき，反射波は x 正方向に伝搬する．

【解答】

I (1)　原点から位置 x まで波が伝わるのに要する時間は $\dfrac{x}{v}$ である．よって，

$$y_{\mathrm{in}}(x,t) = y\left(0, t-\frac{x}{v}\right) = A\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{x}{v}\right)+\phi_0\right\}.$$

(2)　自由端反射では波形がそのままの形で反射される[*6]．原点から位置 x まで波が伝わるのに要する時間は反射していることを考慮すれば $\dfrac{2L-x}{v}$ である．よって，

$$y_{\mathrm{re}}(x,t) = +y\left(0, t-\frac{2L-x}{v}\right) = A\sin\left\{2\pi f\left(t+\frac{x-2L}{v}\right)+\phi_0\right\}.$$

(3)　固定端反射では波形が上下反転して反射される[*7]．原点から位置 x まで波が伝わるのに要する時間は反射していることを考慮すれば $\dfrac{2L-x}{v}$ である．よって，

$$y_{\mathrm{re}}(x,t) = -y\left(0, t-\frac{2L-x}{v}\right) = -A\sin\left\{2\pi f\left(t+\frac{x-2L}{v}\right)+\phi_0\right\}.$$

II (1)　位置 x から原点まで波が伝わるのに要する時間は $\dfrac{x}{v}$ である．よって，

$$y_{\mathrm{in}}(x,t) = y\left(0, t+\frac{x}{v}\right) = A\sin\left\{2\pi f\left(t+\frac{x}{v}\right)+\phi_0\right\}.$$

(2)　自由端反射では波形がそのままの形で反射される．原点から位置 x まで波が伝わるのに要する時間は $\dfrac{x}{v}$ である．よって，

$$y_{\mathrm{re}}(x,t) = +y\left(0, t-\frac{x}{v}\right) = A\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{x}{v}\right)+\phi_0\right\}.$$

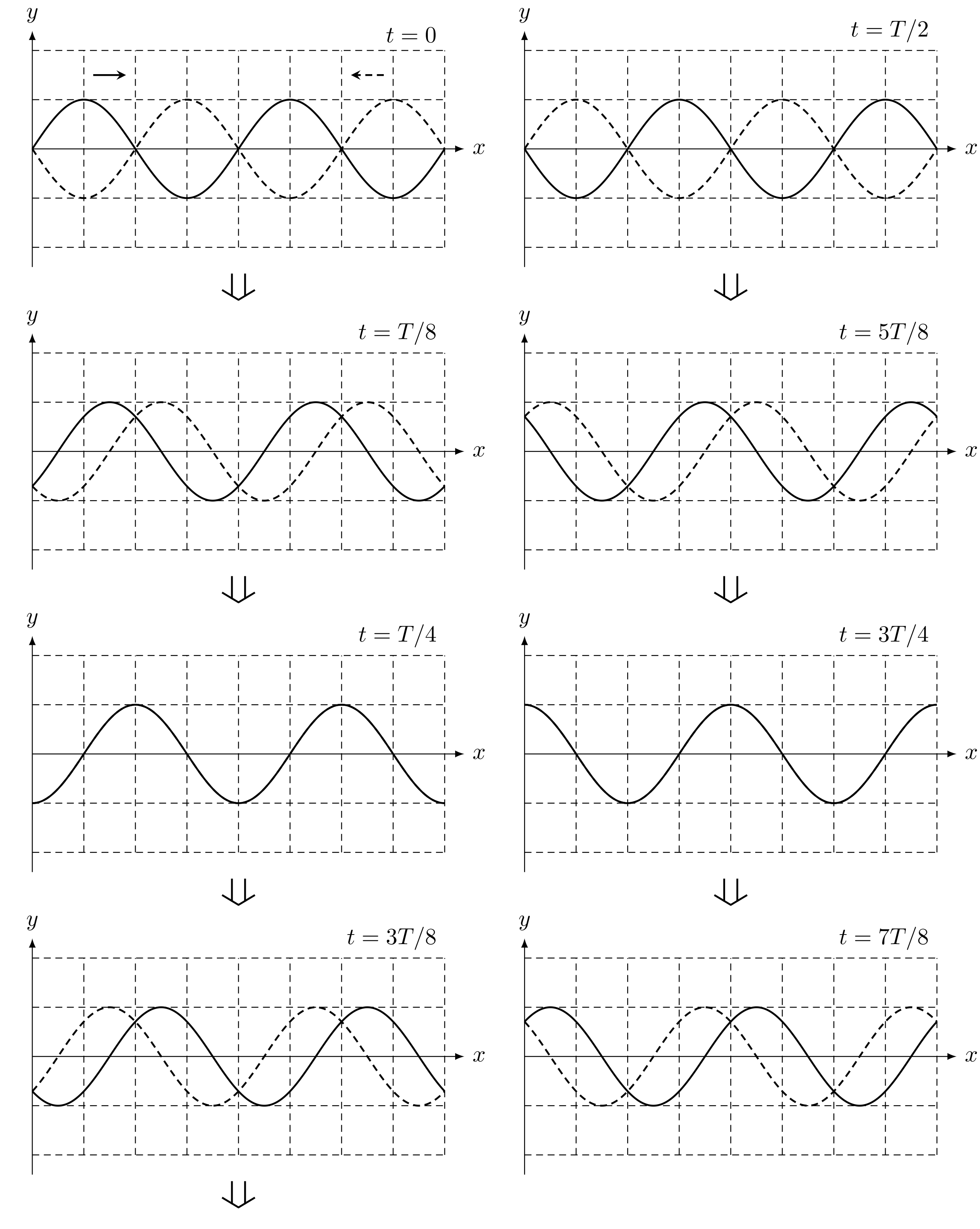
(3)　固定端反射では波形が上下反転して反射される．原点から位置 x まで波が伝わるのに要する時間は $\dfrac{x}{v}$ である．よって，

$$y_{\mathrm{re}}(x,t) = -y\left(0, t-\frac{x}{v}\right) = -A\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{x}{v}\right)+\phi_0\right\}.$$

[*6] 位相で言えば，位相のずれがない．
[*7] 位相で言えば，位相が π だけずれる．

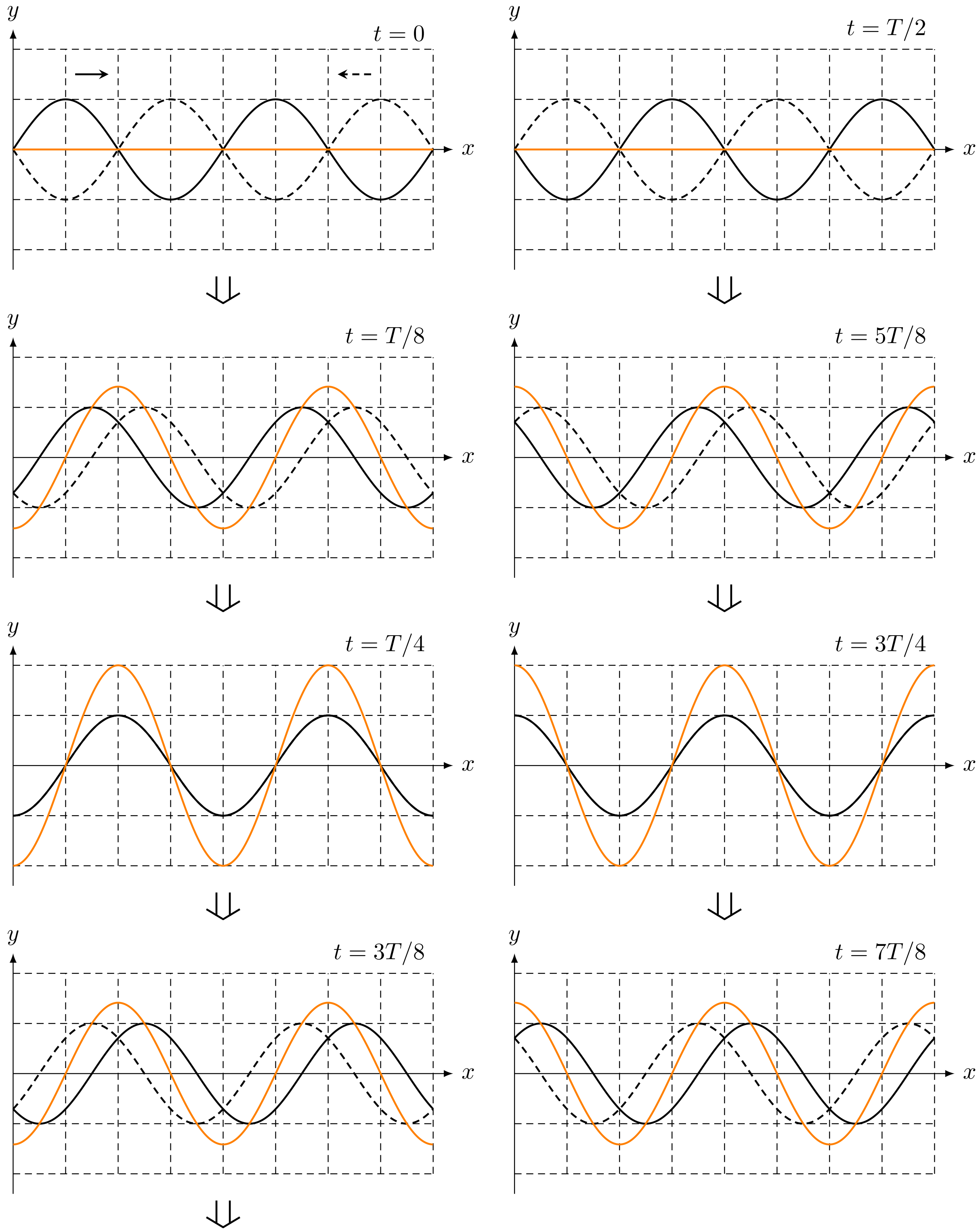
14. 干渉〜定常波のグラフ

図のように，振幅，波長，振動数が等しい互いに逆向きに伝搬する正弦波の合成波を作図せよ．



【解答】

合成波はオレンジの線で示す．



15. 干渉〜正弦波の式③（定常波）

x 軸に沿った媒質を伝わる正弦波を考える．振幅 A，波長 λ，振動数 f が等しく互いに逆向きに伝わる波の重ね合わせによって定常波が生じる．x 正方向に伝わる正弦波の時刻 t，位置 x における変位は，

$$y_+(x,t) = A\sin\left[2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right) + \phi_+\right],$$

と表され，x 負方向に伝わる正弦波の時刻 t，位置 x における変位は，

$$y_-(x,t) = A\sin\left[2\pi\left(ft + \frac{x}{\lambda}\right) + \phi_-\right],$$

と表される．任意の時刻 t，位置 x における定常波の変位 $Y(x,\,t)$ を，三角関数の積の形で表せ．

必要であれば，以下の三角関数の公式を用いてよい．

$$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

【解答】

重ね合わせを考えて，

$$\begin{aligned}
Y(x,t) &= y_+(x,t) + y_-(x,t) \\
&= A\left\{\sin(\text{●}) + \sin(\text{▲})\right\} \\
&= 2A\sin\left(\frac{\text{●}+\text{▲}}{2}\right)\cos\left(\frac{\text{●}-\text{▲}}{2}\right) \\
&= \underline{2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{\phi_+ - \phi_-}{2}\right)\sin\left(2\pi f t + \frac{\phi_+ + \phi_-}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

16. 水面波の干渉（**I，II** は全員取り組みたい）

水面上の 2 点 S_1，S_2 が周期 T，振幅 A で振動しており，波長 λ の円形波が送り出されている．図は時刻 $t=0$ における水面波の様子で，S_1，S_2 から出は波の山を実線，谷を破線で示してある．各波源からの波の減衰は考えないものとする．

I (1)　図の瞬間において点 A，B，C で観測される合成波の変位を求めよ．

(2)　点 A，B，C で観測される合成波の振幅を求めよ．

(3)　波源の振動の周期を T とする．水面波の伝わる速さ v を求めよ．

(4)　線分 S_1S_2 上では定常波が観測される．線分 S_1S_2 上で観測される腹，および節の個数をそれぞれ求めよ．ただし，波源 S_1，S_2 は数えないものとする．

II (1)　点 A で観測される水面波の変位の時間変化を $0 \le t \le \dfrac{3}{2}T$ の範囲で図示せよ．

(2)　線分 S_1S_2 の延長線上ではどのような波が観測されるか．簡単に説明せよ．

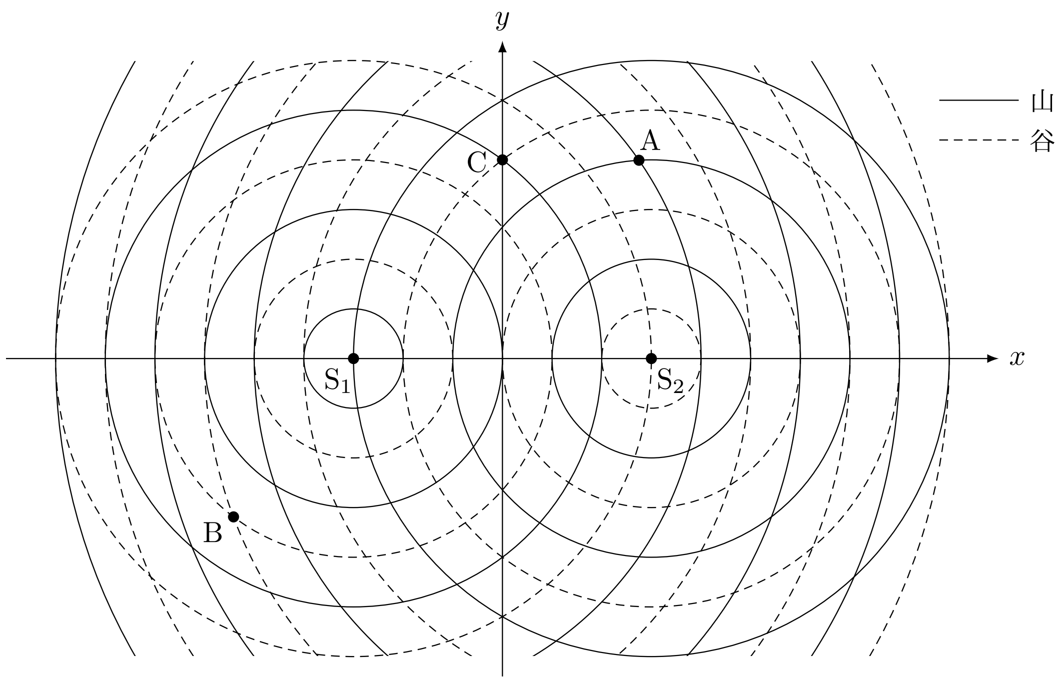
III　図のように，水面上に xy 平面を貼り，その原点を線分 S_1S_2 の中点に定める．原点から波源 S_1, S_2 それぞれまでの距離を a とし，xy 平面上の任意の点 $P(x,y)$ で観測される合成波について考える．以下では，波源 S_1，S_2 から点 P までの距離を $r_1=\sqrt{(x+a)^2+y^2}$，$r_2=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$ とし，時刻 t における波源の S_1, S_2 の振動はそれぞれ $y_1(0,t)=A\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$, $y_2(0,t)=-A\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$ と与えられる．

(1)　時刻 t に波源 S_1 から r_1 だけ離れた点 P に波源 S_1 からやってくる波の変位 $y_1(r_1,t)$ を求めよ．

(2)　時刻 t に波源 S_2 から r_2 だけ離れた点 P に波源 S_2 からやってくる波の変位 $y_2(r_2,t)$ を求めよ．

(3)　時刻 t に点 P で観測される合成波の変位 $y(x,y,t)$ を，r_1，r_2 を含む式で表せ．なお，三角関数の恒等式 $\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\left(\dfrac{\alpha\pm\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha\mp\beta}{2}\right)$ を用いて変形すること．

(4)　点 P での変位が恒等的に 0 となるような条件（弱め合いの条件）を，整数値 m を用いて表せ．


y
x
A
B
C
S_1
S_2
山
谷

【メモ】

干渉条件は，次の通り位相差で議論できるようにしておく（m は整数）．

$$(\text{位相差}) = \frac{2\pi}{\lambda}(\text{経路差}) = \begin{cases} 2m\pi & (\text{強め合い}), \\ (2m-1)\pi & (\text{弱め合い}). \end{cases}$$

なお，位相のずれがあれば左辺に π を足すか引くかしておけばよい．

【解答】

I (1)　図より，

$$y_{\mathrm{A}} = 2A, \quad y_{\mathrm{B}} = -2A, \quad y_{\mathrm{C}} = 0.$$

(2)　各点 A，B，C での位相差は，

$$\Delta\phi_{\mathrm{A}} = \frac{2\pi}{\lambda}\left\{2\lambda - \left(3\lambda + \frac{1}{2}\lambda\right)\right\} - \pi = -4\pi = 2\pi \cdot (-2),$$

$$\Delta\phi_{\mathrm{B}} = \frac{2\pi}{\lambda}\left\{\left(4\lambda + \frac{1}{2}\lambda\right) - 2\lambda\right\} - \pi = 4\pi = 2\pi \cdot 2,$$

$$\Delta\phi_{\mathrm{C}} = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{5}{2}\lambda - \frac{5}{2}\lambda\right) - \pi = -\pi = (2 \cdot 0 - 1)\pi.$$

よって，A は強め合い，B は強め合い，C は弱め合いの条件を満たしている．以上から[*8]，

$$A_{\mathrm{A}} = A_{\mathrm{B}} = 2A, \quad A_{\mathrm{C}} = 0.$$

(3)　波源が周期 T で振動する間に波面は λ だけ伝播するので[*9]，

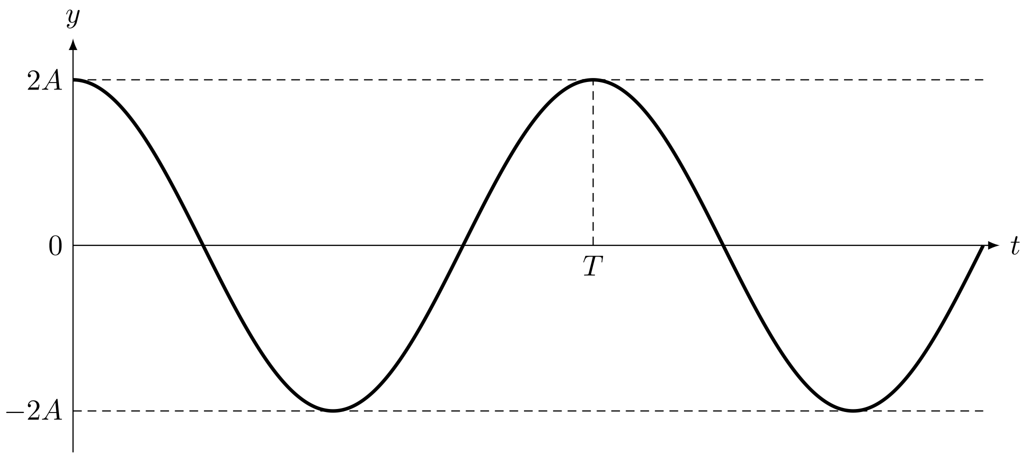
$$v = \frac{\lambda}{T}.$$

(4)　図より/(2) より，S_1 と S_2 の中点は節となる．節と節，腹と腹の間隔はそれぞれ $\dfrac{\lambda}{2}$ なので，節は 5 個，腹は 6 個 となる．

II (1)　時刻 $t = 0$ で変位 $2A$ であり，振幅 $2A$ であることから以下のようになる．

*8 このような計算をしなくとも，「(1) より」でもいいです．

*9 「波の基本式より」でいいです．



(2)　図より，振動は生じない[*10]．

III (1)　S_1 から距離 r_1 の位置 P まで波が伝わるのに要する時間 $\varDelta t_1$ は $\varDelta t_1 = \dfrac{r_1}{v} = \dfrac{r_1}{\lambda}T$ である．よって，

$$y_1(r_1, t) = y_1(0, t - \varDelta t_1) = A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}(t - \varDelta t_1)\right\} = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}r_1\right).$$

(2)　III(1) 同様に $r_1 \to r_2$ とすれば，

$$y_2(r_2, t) = y_2(0, t - \varDelta t_2) = -A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}(t - \varDelta t_2)\right\} = -A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}r_2\right).$$

(3)　III(1)，(2) より，

$$\begin{aligned} y(x, y, t) &= y_1(r_1, t) + y_2(r_2, t) \\ &= A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}r_2\right) - A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}r_2\right) \\ &= 2A\sin\left\{\frac{\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)\right\}\cos\left\{\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{\lambda}(r_1 + r_2)\right\}. \end{aligned}$$

[*10] III で与えられた関数形を用いると，時刻 t，位置 $x > a = \dfrac{3}{2}\lambda$ で観測される波源 S_1 からの波の変位 $y_1(x, t)$ は，

$$y_1(x, t) = A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x - a}{v}\right)\right\} = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{2\pi}{\lambda}\frac{3}{2}\pi\right) = -A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

となる．ここで，$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$ を用いている．同様にして，波源 S_2 からの波の変位 y_2 は，

$$y_2(x, t) = -A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x + a}{v}\right)\right\} = -A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{\lambda}\frac{3}{2}\pi\right) = +A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right).$$

よって，$|x| > a$ の領域で観測される合成波の変位は，

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = 0\,.$$

ここで，$2A\left|\sin\left\{\dfrac{\pi}{\lambda}(r_2-r_1)\right\}\right|$ が位置 (x,y) で観測される合成波の振幅を表す因子であり，$\cos\left\{\dfrac{2\pi}{T}t-\dfrac{2\pi}{\lambda}(r_1+r_2)\right\}$ が -1〜$+1$ の振動を表す因子である．

(4)　合成波の式において振幅因子の位相が π の整数倍となるような位置では，振幅因子は恒等的に 0 となり，弱め合いが観測される．よって[*11]，

$$\frac{\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=m\pi\,,\qquad \therefore\ \underline{r_2-r_1=m\lambda}\,.$$

[*11] 教科書ではこの結果のように経路差が波長の〇倍のように説明しているが，受験まで想定すれば位相差で議論できるようになった方が良い．

§6.2 固有振動

第 2 章では，弦，および気柱の固有振動を扱う．物体を揺らすとき，大きな揺れ（定常波）が生じるような振動数が存在し，この現象を固有振動，このときの振動数を固有振動数と呼ぶ．固有振動の問題は，図を描き，状況から弦長/管長と波長との対応関係を立式すればよい．また，うなりもこのセクションに入れてあるが，うなりの振動数/周期の公式の導出については授業内かどこかの補講内で扱う．

■簡単なまとめ

- 固有振動の分類：

$$\begin{cases} \text{弦} & \rightarrow & \text{固定端・固定端（節・節）} \\ \text{開管} & \rightarrow & \text{自由端・自由端（腹・腹）} \\ \text{閉管} & \rightarrow & \text{自由端・固定端（腹・節）} \end{cases}$$

  境界が自由端のものは，各境界ごとに開口端補正を考慮する．

- 弦を伝わる波の速さ V は，弦の線密度（単位長さ当たりの質量）ρ，弦にかかる張力 S を用いて，

$$V = \sqrt{\frac{S}{\rho}}.$$

- 振動数の近い波同士（f_1，f_2 とする）を重ね合わせるとうなりが生じる．うなりの振動数 f_{b}：

$$f_{\mathrm{b}} = |f_1 - f_2|.$$

  うなりの周期は $\dfrac{1}{f_{\mathrm{b}}}$ で与えられる．

1. 弦の固有振動①

長さ L の弦の固有振動について考える．

(1)　基本振動における波長 λ_1 を求めよ．

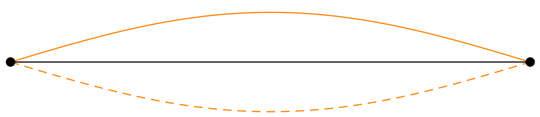
(2)　2 倍振動における波長 λ_2 を求めよ．

(3)　n 倍振動における λ_n を求めよ．

【解答】

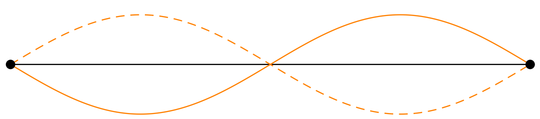
(1)　基本振動は下図のようになる．図より，

$$\lambda_1 = 2L\,.$$



(2)　2 倍振動は下図のようになる．図より，

$$\lambda_2 = L\,.$$



(3)　n 倍振動では，L の間に $\dfrac{\lambda_n}{2}$ が n 個含まれる．よって，

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}\,.$$

2. 弦の固有振動②

長さ L，線密度 ρ で両端が固定された弦 A があり，大きさ S_0 の張力で張られている．

(1)　弦 A の基本振動数 f_0 を求めよ．

(2)　中央部に軽く指を触れた状態で弦 A を弾く．このとき生じる音波の振動数のうち，最小のものを f_0 を用いて表せ．

(3)　長さ L で両端が固定された弦 B が大きさ S_0 の張力で張られている．弦 B の基本振動数が kf_0 となるとき，弦 B の線密度 ρ_B を求めよ．

【解答】

(1)　基本振動の波長は，

$$\lambda = 2L\,.$$

波の基本式・弦を伝わる波の速さの公式より，

$$f_0 = \frac{v}{\lambda} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{S_0}{\rho}}\,.$$

(2)　中央が節となる定常波を考えればよい．このとき，振動数が最小な固有振動は 2 倍振動であり，

$$f = 2f_0\,.$$

(3)　波の基本式・弦を伝わる波の速さの公式より，

$$\frac{k}{2L}\sqrt{\frac{S_0}{\rho}} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{S_0}{\rho_\mathrm{B}}}\,, \qquad \therefore \rho_\mathrm{B} = \frac{1}{k^2}\rho\,.$$

3. 気柱の固有振動①

長さ L の開管の固有振動について考える．開口端補正を $\varDelta L$ とする．

(1)　基本振動における波長 λ_1 を求めよ．

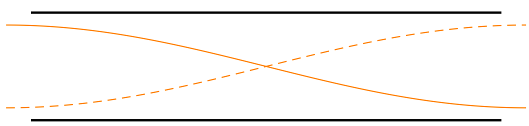
(2)　2 回目に共鳴したときの音波の波長 λ_2 を求めよ．

(3)　n 回目に共鳴したときの音波の波長 λ_n を求めよ．

【解答】

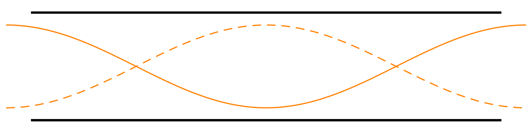
(1)　基本振動は下図のようになる．図より，

$$\frac{\lambda_1}{2}\cdot 1 = L + 2\varDelta L\,, \qquad \therefore\ \lambda_1 = 2(L + 2\varDelta L)\,.$$



(2)　2 回目の共鳴時の振動は下図のようになる．図より，

$$\frac{\lambda_2}{2}\cdot 2 = L + 2\varDelta L\,, \qquad \therefore\ \lambda_2 = L + 2\varDelta L\,.$$



(3)　n 回目の共鳴時，$L + \varDelta L$ の間には $\dfrac{\lambda_n}{2}$ が n 個含まれる．よって，

$$\frac{\lambda_n}{2}\cdot n = L + 2\varDelta L\,, \qquad \therefore\ \lambda_n = \frac{2}{n}(L + 2\varDelta L)\,.$$

4. 気柱の固有振動②

長さ L の閉管の固有振動について考える．開口端補正を $\varDelta L$ とする．

(1)　基本振動における波長 λ_1 を求めよ．

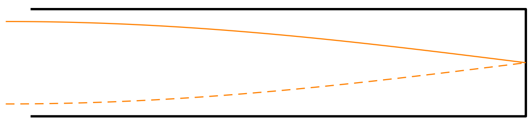
(2)　2 回目に共鳴したときの音波の波長 λ_3 を求めよ．

(3)　n 回目に共鳴したときの音波の波長 λ_{2n-1} を求めよ．

【解答】

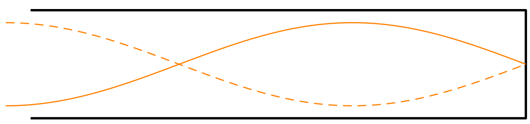
(1)　基本振動は下図のようになる．図より，

$$\frac{\lambda_1}{4}\cdot 1 = L+\varDelta L\,, \qquad \therefore\ \lambda_1 = 4(L+\varDelta L)\,.$$



(2)　2 回目の共鳴時の振動は下図のようになる．図より，

$$\frac{\lambda_2}{4}\cdot 3 = L+\varDelta L\,, \qquad \therefore\ \lambda_2 = \frac{4}{3}(L+\varDelta L)\,.$$



(3)　n 回目の共鳴時，$L+\varDelta L$ の間には $\dfrac{\lambda_n}{4}$ が $2n-1$ 個含まれる．よって，

$$\frac{\lambda_{2n-1}}{4}\cdot(2n-1) = L+\varDelta L\,, \qquad \therefore\ \lambda_{2n-1} = \frac{4}{2n-1}(L+\varDelta L)\,.$$

5. 気柱の固有振動③

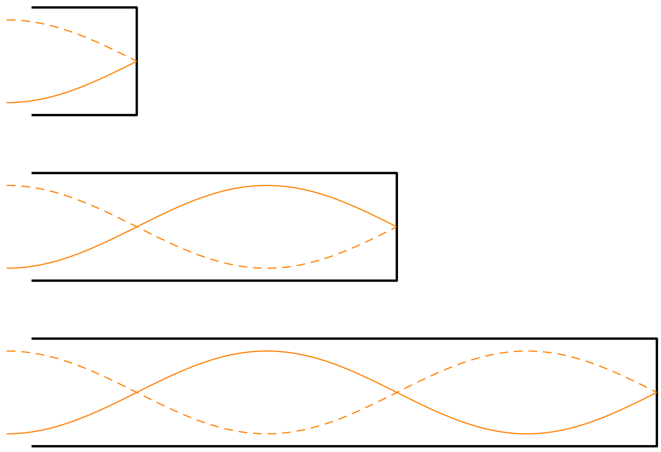
振動数 f の音源の近くに長さを変えることができる直線的な開管，および閉管がある．管の長さが L_1，L_2，L_3，$\cdots$ のとき閉管は共鳴し，管の長さが ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3，$\cdots$ のとき開管は共鳴した．音速を V，開口端補正を $\varDelta L$ とする．

(1)　L_1，L_2，L_3 をそれぞれ求めよ．

(2)　ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 をそれぞれ求めよ．

【解答】

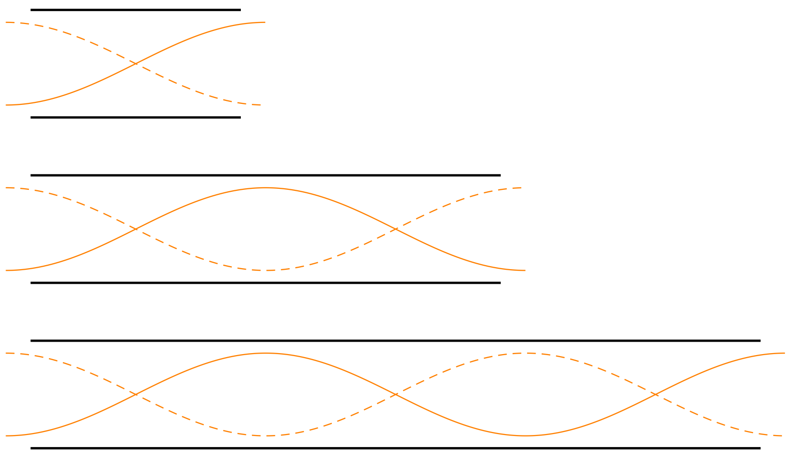
(1)　各振動の様子は下図のようになる．



図より，

$$L_1 = \frac{V}{4f} - \Delta L\,,\quad L_2 = \frac{3V}{4f} - \Delta L\,,\quad L_3 = \frac{5V}{4f} - \Delta L\,.$$

(2)　各振動の様子は下図のようになる．



図より，

$$\ell_1 = \frac{V}{2f} - 2\Delta L\,,\quad \ell_2 = \frac{V}{f} - 2\Delta L\,,\quad \ell_3 = \frac{3V}{2f} - 2\Delta L\,.$$

6. うなり

振動数 440 H z のおんさ 1 と振動数 f のおんさ 2 を同時に鳴らしたところ，毎秒 2 回のうなりが聞こえた．おんさ 2 の方がおんさ 1 よりも高い音を出すとき，f を求めよ．

【解答】

$f > 440\,\mathrm{Hz}$ ゆえ，うなりの公式より

$$2 = |f - 440| = f - 440\,, \qquad \therefore f = 442\,\mathrm{Hz}\,.$$

§6.3 ドップラー効果

第 3 章では，音波のドップラー効果を扱う．ドップラー効果は，大きく分けて，公式を導出する問題と，公式を使うだけの問題に分けられる．公式の標準的なな導出方法は授業で丁寧に扱うことにし，この冊子では公式を使うだけの問題，少し珍しいけどたまに聞かれる公式の導出を中心に扱う．以降の問題では，音速は一定で，特に言及していない限り風は吹いていないものとする．

■簡単なまとめ

- ドップラー効果の公式：

$$f = \frac{(\text{観測者の聞く音の音速})}{(\text{観測者の聞く音の波長})} = \frac{V \pm v_{\text{観測者}}}{\dfrac{V \pm v_{\text{音源}}}{f_0}} = \frac{V \pm v_{\text{観測者}}}{V \pm v_{\text{音源}}} f_0 \quad (f_0\text{: 音源の振動数})$$

1. 音源だけが動く

I　静止した観測者に速さ u で音源（振動数 f_0）が近づく．音速を V とする．

(1)　観測者が聞く音の波長 λ を求めよ．

(2)　波の基本式より，観測者が聞く音の振動数 f を求めよ．

II　静止した観測者に速さ u で音源（振動数 f_0）が遠ざかる．音速を V とする．

(1)　観測者が聞く音の波長 λ を求めよ．

(2)　波の基本式より，観測者が聞く音の振動数 f を求めよ．

【解答】

I (1)　$(V-u)t$ の区間に ft 個の波があるので[*12]，

$$\lambda = \underline{\frac{V-u}{f_0}}\,.$$

(2)　波の基本式より，

$$f = \underline{\frac{V}{V-u}f_0}\,.$$

II (1)　$(V+u)t$ の区間に ft 個の波があるので，

$$\lambda = \underline{\frac{V+u}{f_0}}\,.$$

(2)　波の基本式より，

$$f = \underline{\frac{V}{V+u}f_0}\,.$$

[*12] ここでは丁寧に計算しているが，f の公式を覚えて逆算に求めても良い．

2. 観測者だけが動く

I　静止した音源（振動数 f_0）に速さ v で観測者が近づく．音速を V とする．

(1)　観測者が聞く音の波長 λ を求めよ．

(2)　観測者が聞く音の振動数 f を求めよ．

II　静止した音源（振動数 f_0）に速さ v で観測者が遠ざかる．音速を $V\,(>v)$ とする．

(1)　観測者が聞く音の波長 λ を求めよ．

(2)　観測者が聞く音の振動数 f を求めよ．

【解答】

I (1)　音源は静止しているので，

$$\lambda = \frac{V}{f_0}\,.$$

(2)　t 秒間に $\dfrac{(V+u)t}{\lambda}$ 個の波を聞くので，

$$f = \frac{(V+v)t/\lambda}{t} = \frac{V+v}{V}f_0\,.$$

II (1)　音源は静止しているので，

$$\lambda = \frac{V}{f_0}\,.$$

(2)　t 秒間に $\dfrac{(V-u)t}{\lambda}$ 個の波を聞くので，

$$f = \frac{(V-v)t/\lambda}{t} = \frac{V-v}{V}f_0\,.$$

3. どっちも動く

(1)　音源（振動数 f_0）は速さ v で観測者に近づく向きに動き，音源と同じ方向に速さ u で観測者が動く．音速を V とする．観測者が聞く音の波長 λ，観測者が聞く音の振動数 f をそれぞれ求めよ．

(2)　音源（振動数 f_0）は速さ v で，観測者は速さ u で互いに近づき合う向きに動く．音速を $V\ (> v)$ とする．観測者が聞く音の波長 λ，観測者が聞く音の振動数 f をそれぞれ求めよ．

【解答】

(1)　公式より，

$$f = \frac{V-u}{V-v}f_0, \quad \lambda = \frac{V-v}{f_0}.$$

(2)　公式より，

$$f = \frac{V+u}{V-v}f_0, \quad \lambda = \frac{V-v}{f_0}.$$

4. 反射あり

I　音源（振動数 f），観測者 A，反射板の順に並んでいる．静止した音源，観測者に向かい速さ u で反射板が近づく．反射板には反射板と共に動く観測者 B いるものとし，音速を c とする．

(1)　観測者 B が聞く音の波長 λ_1，観測者 B が聞く音の振動数 f_1 をそれぞれ求めよ．

(2)　観測者 A が聞く反射板によって反射された音の波長 λ_2，観測者 A が聞く反射板によって反射された音の振動数 f_2 をそれぞれ求めよ．

(3)　観測者 A が聞く音波はうなりとなって聞こえた．うなりの振動数 f_{b} を求めよ．

II　音源（振動数 f），観測者 A，反射板の順に並んでいる．静止した音源，観測者から速さ u で反射板が遠ざかる．反射板には反射板と共に動く観測者 B いるものとし，音速を c とする．

(1)　観測者 B が聞く音の波長 λ_3，観測者 B が聞く音の振動数 f_3 をそれぞれ求めよ．

(2)　観測者 A が聞く反射板によって反射された音の波長 λ_4，観測者 A が聞く反射板によって反射された音の振動数 f_4 をそれぞれ求めよ．

(3)　観測者 A が聞く音波はうなりとなって聞こえた．うなりの振動数 f_{b} を求めよ．

【解答】

I (1)　公式より，

$$f_1 = \frac{c+u}{c}f\,,\quad \lambda_1 = \frac{c}{f}\,.$$

(2)　公式より，

$$f_2 = \frac{c}{c-u}f_1 = \frac{c+u}{c-u}f\,,\quad \lambda_2 = \frac{c-u}{f_1} = \frac{c-u}{c+u}\frac{c}{f}\,.$$

(3)　公式より，

$$f_{\mathrm{b}} = |f_2 - f| = f_2 - f = \frac{2u}{c-u}f\,.$$

II (1)　公式より，

$$f_3 = \frac{c-u}{c}f\,,\quad \lambda_3 = \frac{c}{f}\,.$$

(2)　公式より，

$$f_4 = \frac{c}{c+u}f_3 = \frac{c-u}{c+u}f\,,\quad \lambda_4 = \frac{c+u}{f_3} = \frac{c+u}{c-u}\frac{c}{f}\,.$$

(3)　公式より，

$$f_{\mathrm{b}} = |f_3 - f| = f_3 - f = \frac{2u}{c+u}f\,.$$

5. 風が吹く場合①

Ⅰ　音源（振動数 f）は速さ v で観測者から遠ざかる向きに動き，音源と同じ方向に速さ u で観測者が動く．このとき，観測者の動く向きと同じ方向に風速 w の風が吹いている．音速を V とする．観測者が聞く音の波長 λ，観測者が聞く音の振動数 f をそれぞれ求めよ．

Ⅱ　音源（振動数 f），観測者 A，壁の順に並んでいる．音源は静止しており，観測者 A は音源から遠ざかる向きに速さ u で動き，壁は音源・観測者 A に向かい速さ v で近づく．壁には壁と共に動く観測者 B いるものとし，観測者 A の動く向きと逆方向に風速 w の風が吹いている．音速を V とする．

(1)　観測者 A が音源から直接聞く音の波長 λ_1，振動数 f_1 をそれぞれ求めよ．

(2)　観測者 B が聞く音の波長 λ_2，振動数 f_2 をそれぞれ求めよ．

(3)　観測者 A が聞く壁によって反射された音の波長 λ_3，振動数 f_3 をそれぞれ求めよ．

【解答】

Ⅰ　公式より $V \to V - w$ として，

$$f = \frac{V-w-u}{V-w+v}f\,,\quad \lambda = \frac{V-w+v}{f}\,.$$

Ⅱ (1)　公式より $V \to V + w$ として，

$$f_1 = \frac{V+w-u}{V+w}f\,,\quad \lambda_1 = \frac{V+w}{f}\,.$$

(2)　公式より $V \to V + w$ として，

$$f_2 = \frac{V+w+v}{V+w}f\,,\quad \lambda_2 = \frac{V+w}{f}\,.$$

(3)　公式より $V \to V - w$ として，

$$f_3 = \frac{V-w+u}{V-w-v}f_2 = \frac{(V-w+v)(V+w+u)}{(V+w)(V-w-v)}f\,,\quad \lambda_3 = \frac{(V+w)(V-w-v)}{(V+w+v)f}\,.$$

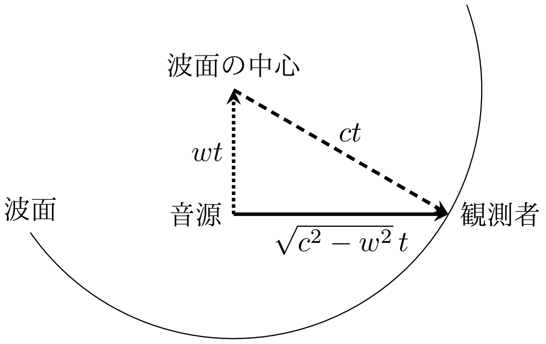
6. 風が吹く場合②

音源（振動数 f）は速さ v で観測者に近づく向きに動き，音源と逆方向に速さ u で観測者が動く．このとき，観測者の動く向きと直行した方向に風速 w の風が吹いている．音速を c とする．

観測者が聞く音の波長 λ，観測者が聞く音の振動数 f をそれぞれ求めよ．

【解答】

時刻 $t=0$ に生じた音を，時刻 t に観測者が聞く様子は図のようである[*13]．



よって，音源から観測者の届く音の速さ c^* は，

$$c^* = \frac{\sqrt{c^2-w^2}\,t}{t} = \sqrt{c^2-w^2}\,.$$

以上から，公式より，

$$f = \frac{\sqrt{c^2-w^2}+u}{\sqrt{c^2-w^2}-v}f\,,\quad \lambda = \frac{\sqrt{c^2-w^2}-v}{f}\,.$$

*13 簡単のため，音源と観測者の運動は図示していない．

7. 斜め方向その①（公式の丁寧な確認）

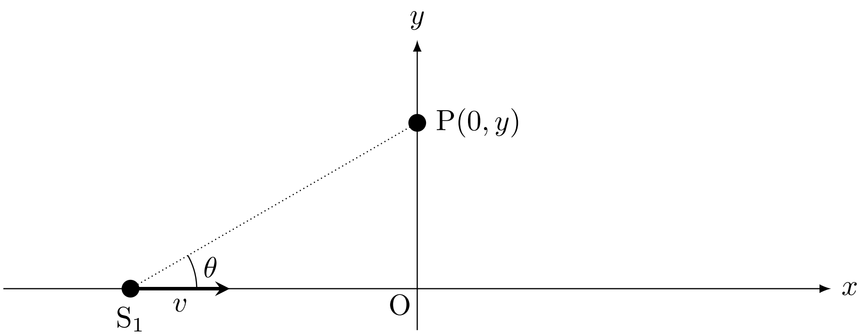
水平面内に xy 平面とその原点 O を定める．x 軸に沿って x 正方向に音源（振動数 f）を速さ v で運動しており，y 軸上の点 $\mathrm{P}(0, y)$ にいる観測者（静止）が音源から発された音を観測している．時刻 $t = 0$ における音源の位置を $\mathrm{S_1}$ とし，$\angle \mathrm{PS_1O} = \theta$ とする．音源が $\mathrm{S_1}$ を通過するとき，ごく短い時間 t だけ音源から音を発した．時刻 t における音源の位置を $\mathrm{S_2}$ とし，音速を V とする．

(1)　時刻 $t = 0$ に音源が $\mathrm{S_1}$ で発した音波の波面が観測者の届く時刻 t_1 を求めよ．

(2)　t がごく短いことから，$\overline{\mathrm{S_1S_2}}$ が $\overline{\mathrm{S_1P}}$ に比べて十分小さく，$\overline{\mathrm{S_1P}}$ と $\overline{\mathrm{S_2P}}$ は平行とみなせる．$\overline{\mathrm{S_1P}} - \overline{\mathrm{S_2P}}$ を求めよ．

(3)　音源が $\mathrm{S_2}$ で発した音波の波面が観測者の届く時刻 t_2 を求めよ．

(4)　音源が $\mathrm{S_1}$ で発した音波が点 P で観測されるときの振動数 f' を求めよ．



【解答】

(1)　$\overline{\mathrm{S_1P}} = Vt_1$，$\cos\theta = \dfrac{y}{\overline{\mathrm{S_1P}}}$ より，

$$t_1 = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{y}{V\cos\theta}}\,.$$

(2)　$\mathrm{S_2}$ から $\mathrm{S_1P}$ に下ろした垂線と $\mathrm{S_1P}$ との交点を H とすると，

$$\overline{\mathrm{S_1P}} - \overline{\mathrm{S_2P}} \fallingdotseq \overline{\mathrm{S_1P}} - \overline{\mathrm{HP}} = \overline{\mathrm{S_1H}} = \underset{\sim\sim\sim}{vt\cos\theta}\,.$$

(3)　状況を丁寧に整理して，

$$t_2 = t + \frac{\overline{\mathrm{S_2P}}}{V} = t + \frac{\overline{\mathrm{S_1P}} - vt\cos\theta}{V} = \underset{\sim\sim\sim}{t\left(1 - \frac{v}{V}\cos\theta\right) + \frac{y}{V\cos\theta}}\,.$$

(4)　観測者は $t_2 - t_1$ 間音を聞くので

$$f'(t_2 - t_1) = ft\,, \qquad \therefore f' = \frac{t}{t_2 - t_1}f = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{V}{V - v\cos\theta}f}\,.$$

8. 斜め方向その②（公式処理）

水平面内に xy 平面とその原点 O を定める．x 軸に沿って x 正方向に音源（振動数 f）を速さ v で運動しており，y 軸上の点 P にいる観測者（静止）が音源から発された音を観測している．時刻 t における音源の位置を S_1 とし，$\angle \mathrm{PS_1O} = \theta$，音速を c とする．

I　音源が S_1 で発した音波を観測者が観測するときの振動数 λ を求めよ．

II　以下のそれぞれの場合について，点 P で観測される振動数 f' を求めよ．

(1)　音源が x 軸負方向の十分遠方にあるときに発された音を観測した場合の振動数.

(2)　音源が x 軸正方向の十分遠方にあるときに発された音を観測した場合の振動数.

(3)　音源が原点を通過した瞬間に発された音を観測した場合の振動数.

(4)　音源が原点を通過する瞬間に聞く音の振動数.

【解答】

I　公式より，

$$\lambda = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{c - v\cos\theta}{f}}\,, \quad f' = \frac{c}{c - v\cos\theta} f\,.$$

II (1)　公式より，$\theta = 0$ として，

$$f' = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{c}{c - v}} f\,.$$

(2)　公式より，$\theta = \pi$ として，

$$f' = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{c}{c + v}} f\,.$$

(3)　公式より，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ として，

$$f' = \underset{\sim}{f}\,.$$

(4)　音を発した時刻を $t = 0$ とし，その瞬間の音源の位置を S，原点を通過する時刻を t とすると，$\overline{\mathrm{SO}} = vt$，$\overline{\mathrm{SP}} = ct$ より，$\cos\theta = \dfrac{v}{c}$ である．よって，

$$f' = \underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{c^2}{c^2 - v^2}} f\,.$$

9. 斜め方向その③（公式処理，難しいので解く/解かないは各自で判断）

図のように，点 O から距離 d の位置に音源 S（振動数 f）の音源があり，点 O から距離 $r\,(>d)$ を保ちながら単位時間当たりの回転角 ω で反時計回りに円運動をしている観測者 P が，S からの音を観測している．P の速さは，円の接線方向に大きさ $r\omega$ で与えられる．時刻 t において $\angle\mathrm{POS}=\omega t\,(0\leq\omega t\leq 2\pi)$ とし，$t=0$ において P には S からの音は届いているものとする．音速を c とする．

I　$t>0$ の時刻 t において，再び f の振動数を観測する最初の時刻 t_1 を求めよ．

II　時刻 t において，P で観測される音の振動数 $f_{\mathrm{P}}(t)$ を，以下の手順に従って求めよ．

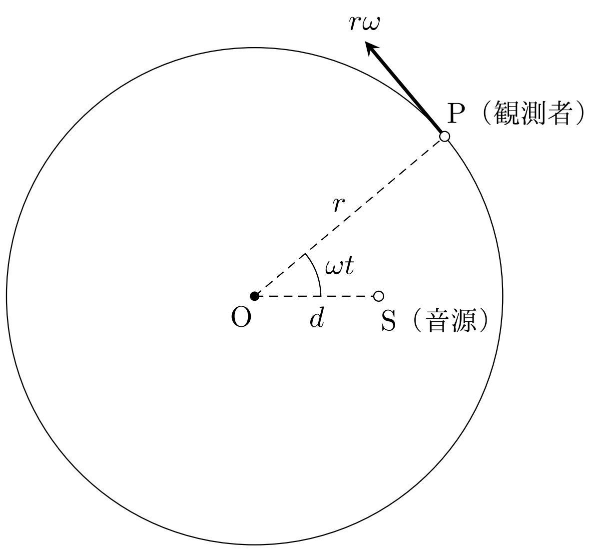
(1)　$\overline{\mathrm{PS}}$ を求めよ．

(2)　$\angle\mathrm{OPS}=\phi$ とする．$\sin\phi$ を求めよ．

(3)　$f_{\mathrm{P}}(t)$ を求めよ．

III　$\cos(\omega t)=\dfrac{d}{r}$ を満たす時刻 t_{m}，$t_{\mathrm{M}}\,(>t_{\mathrm{m}})$ において，$f_{\mathrm{P}}(t)$ は最小値 $\min\{f_{\mathrm{P}}\}=f_{\mathrm{P}}(t_{\mathrm{m}})$，および最大値 $\max\{f_{\mathrm{P}}\}=f_{\mathrm{P}}(t_{\mathrm{M}})$ を取る[*14]．$f_{\mathrm{P}}(t_{\mathrm{m}})$，$f_{\mathrm{P}}(t_{\mathrm{M}})$ をそれぞれ求めよ．

IV　$r=2d$ のとき，$t_{\mathrm{M}}-t_{\mathrm{m}}$ を求めよ．



[*14] 関数 $g(\theta)=\dfrac{rd\sin\theta}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}}$ を微分して，その増減を確認すればよい．

【メモ】

図形の考察は，閃きではなくパターン処理できる．詳しくは幾何光学の分野で紹介する．

【解答】

I　半周した位置ゆえ，

$$t_1 = \underset{\sim}{\frac{\pi}{\omega}}\,.$$

II (1)　余弦定理より，

$$\overline{\mathrm{PS}} = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos(\omega t)}}\,.$$

(2)　正弦定理より，

$$\sin\phi = \frac{d\sin(\omega t)}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos(\omega t)}}\,.$$

(3)　観測者が音源から遠ざかる速度成分は $r\omega\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$ である．よって，公式より[*15]，

$$f_{\mathrm{P}}(t) = \frac{c - r\omega\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \phi\right)}{c} f = \frac{c - \dfrac{rd\omega\sin(\omega t)}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos(\omega t)}}}{c}\,.$$

III　上記の結果より，$\sin(\omega t_{\mathrm{m}}) = \dfrac{\sqrt{r^2 - d^2}}{r}$，$\sin(\omega t_{\mathrm{M}}) = -\dfrac{\sqrt{r^2 - d^2}}{r}$ を代入して，

$$f_{\mathrm{P}}(t_{\mathrm{m}}) = \frac{c - d\omega}{c} f\,,\quad f_{\mathrm{P}}(t_{\mathrm{M}}) = \frac{c + d\omega}{c} f\,.$$

IV　与えられた数値より，

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\,,\qquad \therefore t = \frac{\pi}{3\omega}\,,\ \frac{5\pi}{3\omega}\,.$$

よって，

$$t_{\mathrm{M}} - t_{\mathrm{m}} = \frac{5\pi}{3\omega} - \frac{\pi}{3\omega} = \underset{\sim}{\frac{4\pi}{3\omega}}\,.$$

[*15] $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin\phi\,.$

10. ドップラー効果の公式の導出いろいろ①（時系列）

水平右向きに x 軸を定める．時刻 $t=0$ に音源 P（振動数 f_0）は位置 $x=0$ にあり，反射板 Q は位置 $x=\ell$ にある．P は速度 v，Q は速度 u で運動している．音速を V とし，P および Q の速度の大きさは音速よりも小さいものとする．$t=0$ に音源は音を発し始めた．

I　Q が聞く音の振動数について考える．

(1)　Q が音を聞き始める時刻 t_1 を求めよ．

(2)　Q が，時刻 t に P が発した音を聞く時刻 t_2 を求めよ．

(3)　Q が聞く音の振動数 f を求めよ．

II　P が聞く Q による反射音の振動数について考える．Q で音を反射し始めた時刻を改めて $T=0$ と定義し，このときの PQ 間の距離を L とする．

(1)　P が反射音を聞き始める時刻 T_1 を求めよ．

(2)　P が，時刻 T に Q から反射された音を聞く時刻 T_2 を求めよ．

(3)　P が聞く反射音の振動数 F を求めよ．

【解答】

I (1)　図 1 より，音速 V で距離 $L+ut_1$ だけ進む時間を求めて，

$$Vt_1 = \ell + ut_1\,, \qquad \therefore t_1 = \frac{\ell}{V-u}\,.$$

(2)　図 1 より，

$$vt + V(t_2 - t) = \ell + ut_2\,, \qquad \therefore t_2 = \frac{\ell + (V-v)t}{V-u}\,.$$

(3)　$t_2 - t_1$ の間に $f_0 t$ 個の波形を受けるので，

$$f(t_2 - t_1) = ft\,, \qquad \therefore f = \frac{V-u}{V-v}f_0\,.$$

II (1)　図 2 より，音速 V で距離 $L-vT_1$ だけ進む時間を求めて，

$$VT_1 = L - vt_1\,, \qquad \therefore t_1 = \frac{L}{V+v}\,.$$

(2)　図 2 より，

$$vT_2 + V(T_2 - T) = L + uT\,, \qquad \therefore T_2 = \frac{L + (V+u)T}{V+v}\,.$$

(3)　$T_2 - T_1$ の間に fT 個の波形を受けるので，

$$F(T_2 - T_1) = fT\,, \qquad \therefore F = \frac{V+v}{V+u}f = \frac{V+v}{V+u}\frac{V-u}{V-v}f_0\,.$$

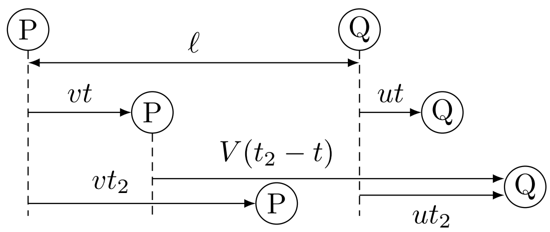


図 1

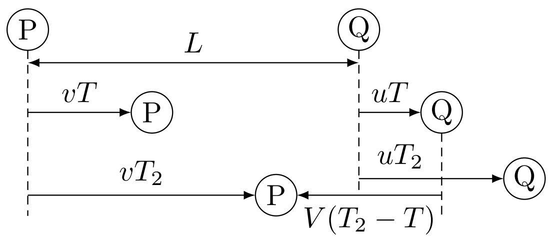


図 2

11. ドップラー効果の公式の導出いろいろ②（正弦波の式）

x 軸上の原点に音源 S があり，S からは以下の関数形で表される音波が発されている．なお，y は音波の変位，A は振幅，f は振動数を表し，以下では，時刻 $t=0$ での観測者 P の位置を $x\,(>0)$，音速を c とする．

$$y_{\mathrm{S}}(0,t)=A\sin\left(2\pi ft\right)$$

I　S，および P がともに静止している場合を考える．P で観測される波の式を求めよ．

II　S が速さ v で静止している P に近づく場合を考える．

(1)　P が時刻 t に聞く音は，時刻 t_0 に $x_{\mathrm{S}}=vt_0$ の位置で音源が発した音であるとする．t_0 を求めよ．

(2)　P で観測される波の式は，以下のようになる．$\boxed{\text{あ}}$，$\boxed{\text{い}}$ を求めよ．

$$y_{\mathrm{P}}(x,t)=A\sin\left\{2\pi\boxed{\text{あ}}\left(t-\frac{x}{\boxed{\text{い}}}\right)\right\}$$

III　P が速さ u で静止している S に近づく場合を考える．P で観測される波の式は，以下のようになる．$\boxed{\text{う}}$，$\boxed{\text{え}}$ を求めよ．

$$y_{\mathrm{P}}(x,t)=A\sin\left\{2\pi\boxed{\text{う}}\left(t-\frac{x}{\boxed{\text{え}}}\right)\right\}$$

【解答】

I　原点から位置 x まで波が伝わるのに要する時間は $\dfrac{x}{v}$ である．よって，

$$\begin{pmatrix} \text{位置 } x \text{ での} \\ \text{時刻 } t \text{ の変位} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{原点での} \\ x/c \text{ 前の変位} \end{pmatrix}$$

より，

$$y_{\mathrm{P}}(x,t) = y_{\mathrm{S}}\left(0, t - \frac{x}{v}\right) = A\sin\left\{2\pi f\left(t - \frac{x}{v}\right)\right\}.$$

II (1)　状況を整理して，

$$x = c(t - t_0) + vt_0\,, \qquad \therefore t_0 = \frac{c}{c-v}\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

(2)　II(1) より，

$$\begin{pmatrix} \text{位置 } x \text{ での} \\ \text{時刻 } t \text{ の変位} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{位置 } vt_0 \text{における} \\ \text{時刻 } t_0 \text{での変位} \end{pmatrix}$$

ゆえ，

$$y_{\mathrm{P}}(x,t) = y_{\mathrm{S}}\left(0, t - \frac{x}{v}\right) = A\sin\left\{2\pi\frac{c}{c-v}f\left(t - \frac{x}{c}\right)\right\}.$$

よって，

$$\boxed{\text{あ}} = \frac{c}{c-v}f\,, \quad \boxed{\text{い}} = c\,.$$

III　時刻 t において，$x_{\mathrm{P}} = x - ut$ より，

$$\begin{pmatrix} \text{位置 } x - ut \text{ での} \\ \text{時刻 } t \text{ の変位} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{原点での} \\ (x-ut)/c \text{ 前の変位} \end{pmatrix}$$

ゆえ，

$$y_{\mathrm{P}}(x,t) = y_{\mathrm{S}}\left(0, t - \frac{x-ut}{c}\right) = A\sin\left\{2\pi\frac{c+u}{c}f\left(t - \frac{x}{c+u}\right)\right\}.$$

よって，

$$\boxed{\text{う}} = \frac{c+u}{c}f\,, \quad \boxed{\text{え}} = c + u\,.$$

7

波動後半

第 7 部波動後半では，光波に関する内容を扱う．第 1 章では，幾何光学を扱う．幾何光学では，物理法則はスネルの法則だけであり，幾何光学の難しい部分は図形の考察である．図形の考察もパターン処理できるので，この章では図形の考察の仕方の基本を身に着けたい．第 2 章では，レンズ・球面鏡の性質について扱う．特徴的な光線の作図の仕方を覚えた後，レンズの写像公式の導出を行い，写像公式を使う練習を行う．第 3 章では，光速の測定実験と，光の干渉について扱う．光の干渉は光分野の最も比重の大きな分野である．学習形態としては，各有名テーマを押さえていくような学習となる．また，光速の測定実験についてはフィゾーの実験とフーコーの実験を扱う．

§7.1 幾何光学

第 1 章では，幾何光学を扱う．幾何光学では，現象を支配する物理法則はスネルの法則（屈折の法則）のみであり，物理以外の知識として図形の考察を行う．図形の考察も考え方の基本が存在するので，基本に忠実に計算できるよう練習したい．

■簡単なまとめ

- スネルの法則：
  媒質 1 側の屈折率を n_1，入射角を θ，媒質 2 側の屈折率を n_2，屈折角を θ_2 とする．

  $$n_1 \sin\theta = n_2 \sin\theta_2$$

  境界間で振動数は保存し，波が屈折率 n_1 の領域から n_2 の領域に透過したとき，その波長は $\lambda \to \dfrac{\lambda}{n_2/n_1}$ となる（波の基本式より v も同様）．なお，全反射は屈折角が存在しない条件を考えればよい．

- 図形の考察：与えられている量の組み合わせによって，以下のように考える．

$$\begin{cases} \text{角度のみ} & \to \begin{cases} \text{三角形の内外角に注目（二等辺三角形に注意）} \\ \text{平行性の性質を利用（錯角・同位角）} \end{cases} \\ \text{辺のみ} & \to \ \text{相似な三角形の相似比を利用} \\ \text{角と辺} & \to \ \text{三角比を利用（正弦定理・余弦定理に注意）} \end{cases}$$

1. 見かけの深さ（虚像）

空気中（屈折率 1）から水中の物体を観察するとき，実際の深さとは異なる位置に物体が観察される．空気の屈折率を 1 とする．

I　はじめ，水（屈折率 n）と空気の境界面（水面）から深さ d の位置に物体（大きさ無視）を置いた．光源から水面に向かう光線の入射角を θ，屈折角を ϕ，物体の見かけの深さを d^* とする．

(1)　スネルの法則を記せ．

(2)　$\triangle$OPA，$\triangle$OP$'$A に注目し，$\overline{\mathrm{OA}}$ を 2 通りで表せ．

(3)　θ，ϕ が微小角のとき，d^* を n，d を用いて表せ．なお，微小量 $x\,(|x| \ll 1)$ に対して成り立つ近似式 $\sin x \fallingdotseq x$，$\cos x \fallingdotseq 1$，$\tan x \fallingdotseq x$ を用いてよい．

(4)　光源 P の真上に半径 R の円板を置くと，ある半径 R_{c} の大きさで光源 P が視認できなくなる．視認できなくなるための R の条件を求めよ．

II　続いて，水（屈折率 n）の上に油（屈折率 n'，厚さ d'）を流した．角度 θ，θ'，ϕ を図 2 のように定める．物体の見かけの深さを d^* とする．

(1)　各境界面におけるスネルの法則を記せ．

(2)　$\overline{\mathrm{O'A}}$ を 2 通りで表せ．

(3)　全ての角度が微小角のとき，d^* を n，n'，d，d' を用いて表せ．

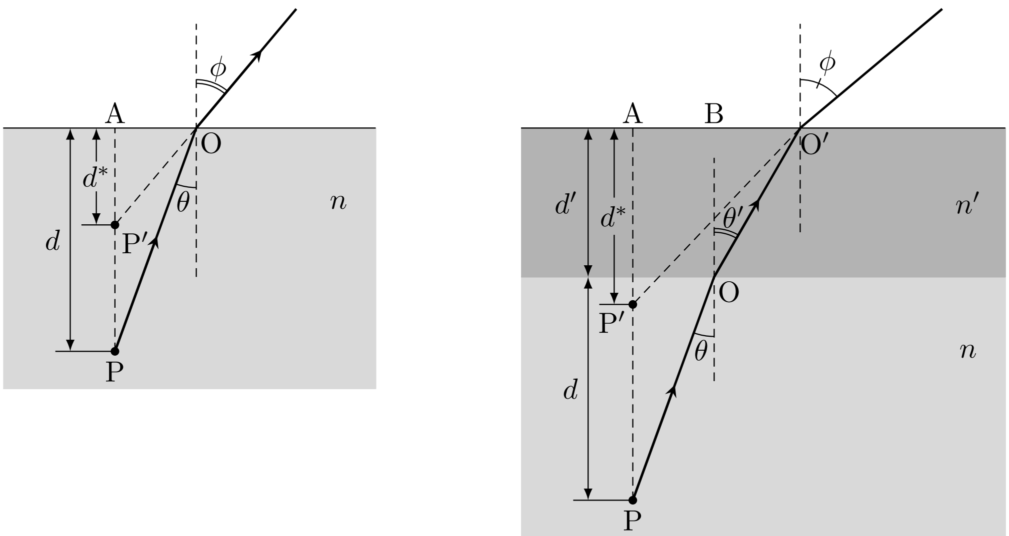


図 1　　　図 2

【メモ】

角度と辺から図形を考察するので，三角比を利用する．

【解答】

I (1)　$\underset{\sim\sim\sim}{n\sin\theta = 1\cdot\sin\phi}$.

(2)　△OPA，△OP′A に注目し[*1]

$$\overline{\mathrm{OA}} = \underset{\sim}{d\tan\theta} = \underset{\sim}{d^*\tan\phi}\,.$$

(3)　スネル則，および図形の考察より，近似式を施し，

$$\begin{cases} n\theta \fallingdotseq \phi\,, \\ \overline{\mathrm{OA}} \fallingdotseq d\theta \fallingdotseq d^*\phi\,, \end{cases} \qquad \therefore d^* = \underset{\sim}{\frac{d}{n}}\,.$$

(4)　スネル則より $\sin\phi = n\sin\theta$ であり，状況から $\sin\theta = \dfrac{R}{\sqrt{R^2+d^2}}$ である．ϕ が存在しない条件 $\sin\phi > 1$ を考えて，

$$\sin\phi = n\sin\theta = \frac{nR}{\sqrt{R^2+d^2}} > 1\,, \qquad \therefore \underset{\sim}{R > \frac{d}{\sqrt{n^2-1}}}\,.$$

II (1)

$$\underset{\sim}{\begin{cases} n\sin\theta = n'\sin\theta'\,, \\ n'\sin\theta' = 1\cdot\sin\phi\,. \end{cases}}$$

(2)　$\overline{\mathrm{O'A}} = \overline{\mathrm{O'B}} + \overline{\mathrm{BA}}$ より，

$$\overline{\mathrm{O'A}} = \underset{\sim}{d^*\tan\phi} = \underset{\sim}{d\tan\theta + d'\tan\theta'}\,.$$

(3)　スネル則，および図形の考察より，近似式を施し，

$$\begin{cases} n\theta \fallingdotseq n'\theta'\,, \\ n'\theta' \fallingdotseq \phi\,, \\ \overline{\mathrm{OA}} \fallingdotseq d^*\phi \fallingdotseq d\theta + d'\theta'\,, \end{cases} \qquad \therefore d^* = \underset{\sim}{\frac{d}{n} + \frac{d'}{n'}}\,.$$

[*1] 辺と角が与えられているので三角比を利用する．

2. プリズム

図 1 のように，このプリズムの AB 面上の点 O から単色光を入射したところ，AC 面上の点 P に到達した．∠BAC を α，この単色光におけるガラスの屈折率を $n\,(>1)$，点 O における入射角と屈折角をそれぞれ i，r，点 P における入射角と屈折角をそれぞれ θ，ϕ とし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqq i < \dfrac{\pi}{2}$ のときを考える．

(1)　点 O で屈折の法則から得られる関係式を n，i，r を用いて表せ．

(2)　点 P での入射角 θ を r，α を用いて表せ．

(3)　点 P における屈折角の正弦 $\sin\phi$ を n，i，α を用いて表せ．

(4)　$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，入射角 i に関わらず点 P で全反射しない屈折率 n の条件を記せ．

(5)　次に，図 1 と同じ三角プリズムの点 O に白色光を入射した．入射した光は分散し，図 2 のように設置したスクリーン上では連続スペクトルが観測された．このとき，光の三原色として知られている『青』,『赤』,『緑』は，a から b の方向でどのような順に並んでいるか．

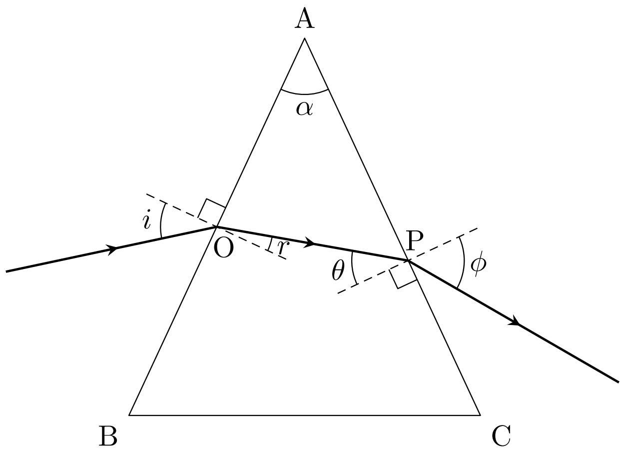


図 1

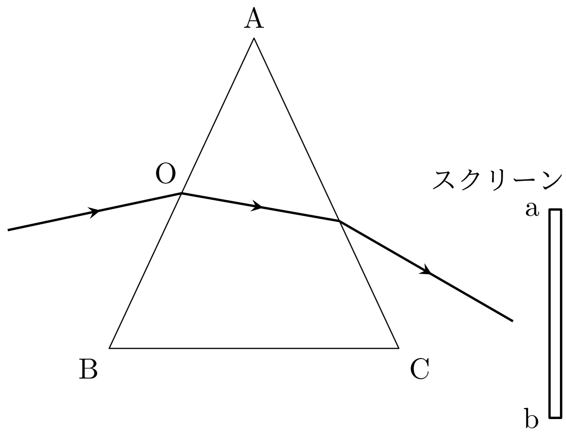


図 2

【メモ】

角度のみから図形を考察する．今の場合，平行線がないため，三角形の内角・外角を見るほかない．

【解答】

(1)　点 O でのスネル則より，

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{1 \cdot \sin i = n \sin r}\,.$$

(2)　$\triangle$AOP に注目して[*2]，

$$\left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \alpha = \pi \qquad \therefore \theta = \underset{\sim\sim\sim}{\alpha - r}\,.$$

(3)　点 P での屈折の法則より，

$$1 \cdot \sin\phi = n\sin\theta = n\sin(\alpha - r) = n(\sin\alpha\cos r - \cos\alpha\sin r)\,.$$

ここに，(1) より，

$$\sin r = \frac{\sin i}{n}\,, \quad \cos r = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin i}{n}\right)^2}$$

であることを用いて，

$$\sin\phi = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sin\alpha\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos\alpha\sin i}\,.$$

(4)　$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，全反射しない（角 ϕ が存在する）条件は，

$$\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \sin i\right) < 1\,.$$

これが任意の角 i に対して成り立てばよい．この式において ϕ が最大となるのは $i = 0$ のときゆえ，$i = 0$ で成り立てば十分である[*3]．よって，

$$\underset{\sim\sim\sim\sim}{n < \sqrt{2}}\,.$$

(5)　赤→緑→青 の順．

[*2] 角から角の対応を付けるので，三角形の内角・外角か，平行線に注目することになる．今の場合，図形に平行な線がないため，三角形の内角・外角に注目することになる．

[*3] 式の形から，i に関して減少関数となっていることは明らか．

3. 虹

雨上がりの晴れた空に見られる虹について，その原理について考える．図に示されるように，空中に浮遊している完全な球と見なせる雨粒を考え，これに特定に波長の可視光（ここでは緑とする）が点 A で入射する．入射した光は点 B で一部が反射，一部が透過し，反射した光の一部は点 C で透過する．点 A における入射角を i，屈折角を θ，点 C における屈折角を t，入射光と反射光のなす角を ϕ とする．空気の屈折率を 1，水の屈折率を $n\,(n>1)$ とする．

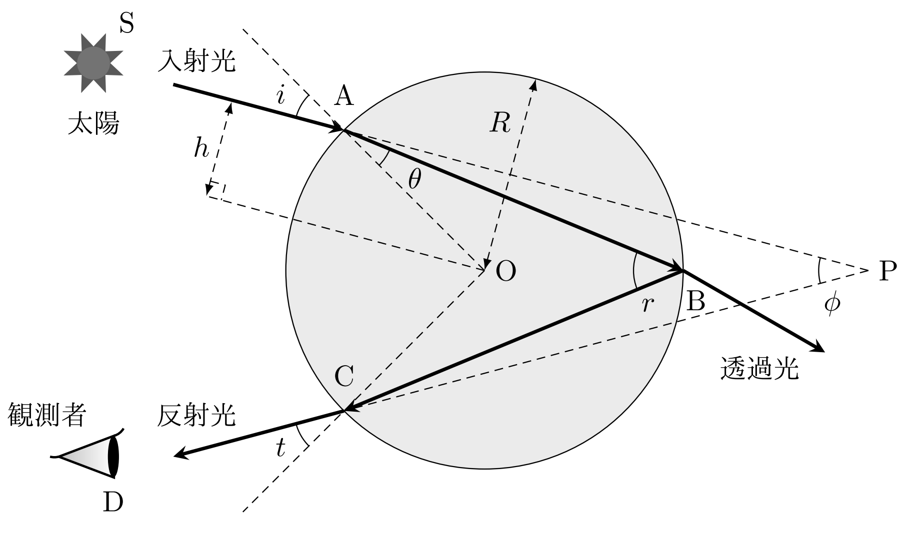
(1) A におけるスネルの法則を立式せよ．

(2) 適当な三角形に注目し，r を θ を用いて表せ．

(3) C におけるスネルの法則より，t を i を用いて表せ．

(4) 適当な三角形に注目し，ϕ を i，θ を用いて表せ．

(5) 余力がある人は，解説に載っている補足計算を追ってみよう．



【メモ】

角度のみから図形を考察する．今の場合，平行線がないため，三角形の内角・外角を見るほかない．

【解答】

(1)　$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{1\cdot\sin i = n\sin\theta}$.

(2)　△OAB，△OCB は合同な二等辺三角形である．よって，二等辺三角形の底角は等しく，

$$\frac{r}{2} = \theta\,,\qquad \therefore r = \underset{\sim}{2\theta}\,.$$

(3)　スネル則より，

$$1\cdot\sin t = n\sin\theta = \sin i\,,\qquad \therefore t = i\,.$$

(4)　$\angle\mathrm{AOC}\,(<\pi)$ は，△OAB，△OCB それぞれの外角から[*4]，

$$\angle\mathrm{AOC} = \left(\frac{r}{2}+\theta\right)\times 2 = r + 2\theta = 4\theta\,.$$

よって，△OAB，△OCB の内角[*5]，

$$\phi + 2i + (\pi - 2\theta)\times 2 = 2\pi\,,\qquad \therefore \phi = \underset{\sim\sim\sim\sim}{4\theta - 2i}\,.$$

[*4] “ひらめけば” 円周角と中心核の関係を用いてもよい．
[*5] 2 つを合わせた図形四角形 OAPC の内角を見ても同じ．

【補足】虹を見上げる角度と色の配置

図のように，雨粒の半径を R，入射光と平行な球の中心 O を通る軸と入射光の距離を h とし，相対入射位置 $k=\dfrac{h}{R}$ と定義する．すると，図より，

$$k=\frac{h}{R}=\sin i=n\sin\theta\,.$$

ここで，$i=2\theta-\dfrac{\phi}{2}$ より，

$$k=\sin\left(2\theta-\frac{\phi}{2}\right).$$

θ はスネル則より n，k のみで表せるので，上式は ϕ と k の間の関係式となる[*6]．これをグラフにすると以下のようになる[*7]．

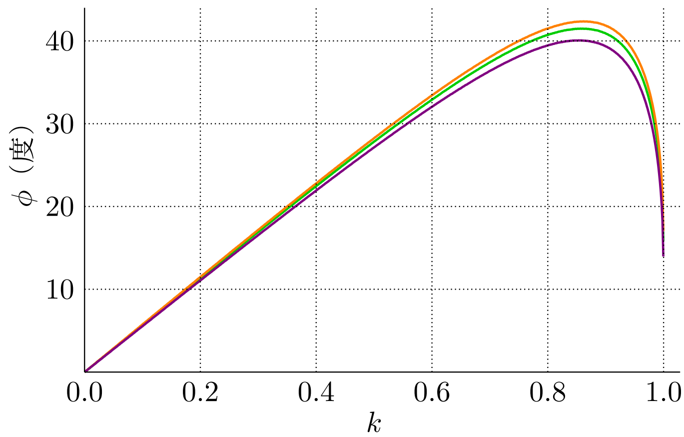


図 1　仰角 ϕ の k 依存性

図 1 から，およそ $\phi\fallingdotseq 40^\circ$ の方向に最も強く光が反射されることがわかる．太陽光線はほとんど水平と見なせることから，角度 ϕ は仰角と見なせ，虹を見上げる角度はおよそ $\phi\fallingdotseq 40^\circ$ となる．

また，図 1 から赤に近いほど仰角 ϕ が大きく，紫に近いほど仰角 ϕ は小さくなる．すなわち，虹は外側（上側）が赤，内側（下側）が紫となる．なお，これは屈折率の波長依存性（光の分散）からもわかり，波長が短い光ほどよく屈折するので，屈折の様子は以下の図 2 のようになる．

[*6] 逆三角関数を用いれば，

$$\begin{cases} k=n\sin\theta\,, \\ k=\sin\left(2\theta-\dfrac{\phi}{2}\right), \end{cases}\qquad \therefore\ \phi=4\arcsin\left(\frac{k}{n}\right)-2\arcsin k$$

と表せる．これをプロットしたものが解答のグラフである．

[*7] 屈折率は波長によって異なり，波長が短いほど屈折率は大きくなる．グラフは，色に対応した屈折率で線を引いている．

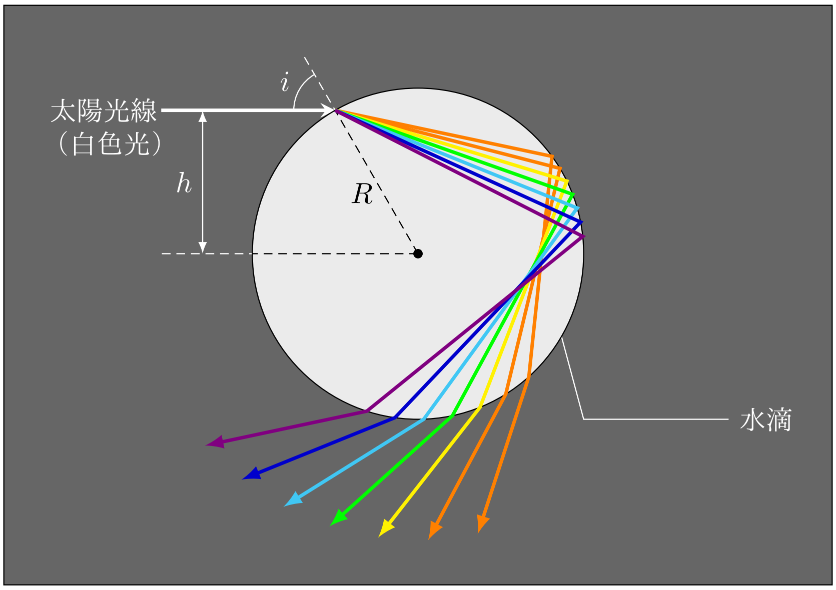


図 2　光の分散：$k = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$i = 60^\circ$ とした

図 2 からも，赤色は高い位置の雨粒からの光を，紫色は低い位置の雨粒からの光を見ていることが読み取れる．

4. レンズの仕組み

凸レンズは光を 1 点に集光する性質がある．ここでは，凸レンズの仕組みについて考えよう．次の文章を読み，$\boxed{}$ に適した式，または数値を解答せよ．なお，$\boxed{\boxed{}}$ は，すでに $\boxed{}$ で与えられたものと同じものを表す．以下では，プリズム，および凸レンズの屈折率を n，空気の屈折率を 1 とする．必要であれば，微小量 $x\,(|x| \ll 1)$ について成り立つ近似式 $\sin x \fallingdotseq x$，$\tan x \fallingdotseq x$ を用いてよい．

(1)　図 1 の頂角 θ のプリズムの点 $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ それぞれの点における光線の屈折について考える．$\mathrm{P_1}$ における入射角を i，屈折角を r とすると，屈折の法則から $\sin r = \boxed{\text{①}}$ が成り立ち，同様にして，$\mathrm{P_1}$ における入射角を i'，屈折角を r' とすると，屈折の法則から $\sin i' = \boxed{\text{②}}$ が成り立つ．ここで，光線として近軸光線[*8]のみを考えると，i，r，i'，r' はそれぞれ微小量と見なすことができ，$\boxed{\boxed{\text{①}}}$ より $r \fallingdotseq \boxed{\text{③}}$ を，$\boxed{\boxed{\text{②}}}$ より $i' \fallingdotseq \boxed{\text{④}}$ を得る．

さて，図 1 の $\triangle\mathrm{OP_1P_2}$ に注目すると，i' は r，θ を用いて $i' = \boxed{\text{⑤}}$ と表すことができるため，全屈折角 δ は，θ，n を用いて $\delta = \boxed{\text{⑥}}$ となる．

(2)　図 2 のように，点 A から出た光線が凸レンズで屈折され点 B に達する状況を考える．凸レンズは十分薄く，レンズの中心から点 A までの距離を a，点 B までの距離を b とすると，$\overline{\mathrm{AH_1}} \fallingdotseq a$，$\overline{\mathrm{BH_2}} \fallingdotseq b$ が成り立つ．点 A のある側をレンズ前方，点 B のある側をレンズ後方と呼び，レンズ前方の光線と光軸のなす角を α，レンズ後方の光線と光軸のなす角を β とする．近軸光線のみを考える場合，α，β はともに微小量として扱え，また，$h = \overline{\mathrm{P_1H_1}} \fallingdotseq \overline{\mathrm{P_2H_2}}$ が成り立つ．このとき，図 2 − 2 中の $\triangle\mathrm{AP_1H_1}$ に注目することで，α は a，h を用いて $\alpha \fallingdotseq \boxed{\text{⑦}}$ と表せる．同様にして，b，h を用いて $\beta \fallingdotseq \boxed{\text{⑧}}$ と表せるので，全屈折角 δ は，a，b，h を用いて $\delta = \boxed{\text{⑨}}$ となる．

(3)　図 2 の凸レンズによる光線の屈折は，図 3 のような点 $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ で凸レンズに接するようなプリズムによる光線の屈折と考えることができる．凸レンズは，半径 R_1，R_2 の球レンズの一部を組み合わて作られており，半径 R_1 の球の中心を $\mathrm{O_1}$，半径 R_2 の球の中心を $\mathrm{O_2}$，光軸と線分 $\mathrm{O_1P_1}$ とのなす角を θ_1，$\mathrm{O_2P_2}$ とのなす角を θ_2 とする．このとき，$\boxed{\boxed{\text{⑥}}}$，$\boxed{\boxed{\text{⑨}}}$ の結果を利用することで，

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \boxed{\text{⑩}}$$

と整理できる．この式の右辺をの凸レンズの焦点距離と呼ぶ．

[*8] 光軸付近の光線のこと．

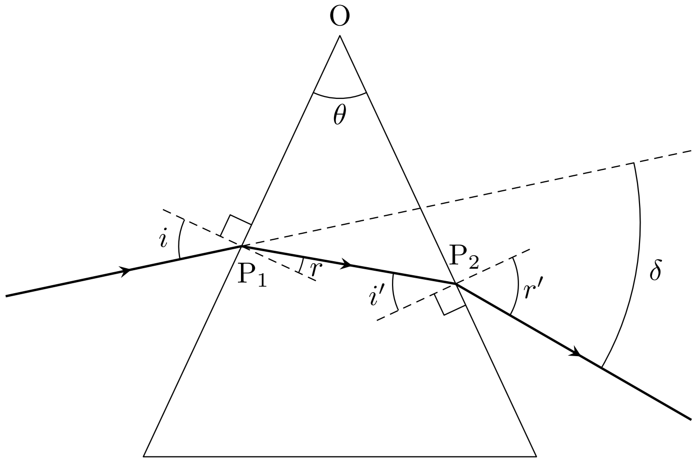


図 1

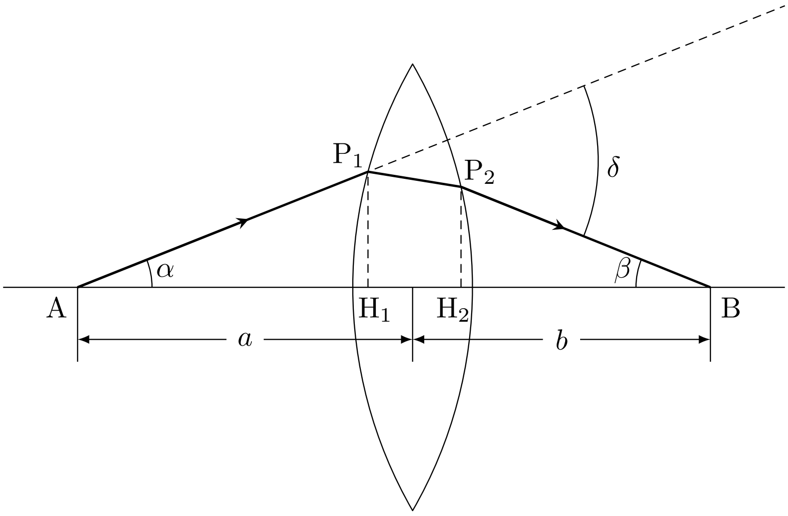


図 2

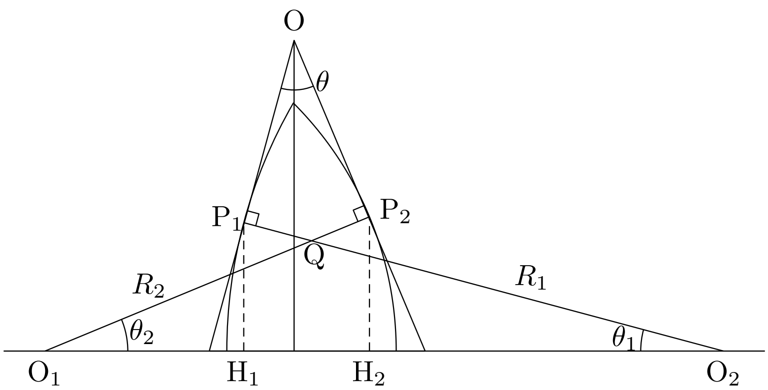


図 3

【メモ】

・(1) は角度のみから図形を考察する．今の場合，平行線がないため，三角形の内角・外角を見るほかない．

・(2) は辺と角度から図形を考察するので，三角比を利用する．

・(3) は角度のみからの考察，角度と辺からの考察の両方を含む．

【解答】

(1)　$\mathrm{P_1}$，および $\mathrm{P_2}$ における屈折の法則より，

$$\begin{cases} n\sin r = \sin i\,, \\ n\sin i' = \sin r'\,, \end{cases} \qquad \therefore \sin r = \underbrace{\frac{1}{n}\sin i}_{①}\ ,\quad \sin i' = \underbrace{\frac{1}{n}\sin r'}_{②}\ .$$

この結果に近軸近似を行って，

$$r \fallingdotseq \underbrace{\frac{i}{n}}_{③}\ ,\quad i' \fallingdotseq \underbrace{\frac{r'}{n}}_{④}\ .$$

ここで，$\triangle \mathrm{OP_1P_2}$ の内角に注目して，

$$\left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - i'\right) + \theta = \pi\,, \qquad \therefore i' = \underbrace{\theta - r}_{⑤}\ .$$

以上より，全屈折角 δ は[*9]，

$$\begin{aligned} \delta &= (r' - i') + (i - r) \\ &\fallingdotseq (n-1)i' + (n-1)r \\ &= (n-1)(\theta - r) + (n-1)r = \underbrace{(n-1)\theta}_{⑥}\ . \end{aligned}$$

(2)　図より，

$$\alpha \fallingdotseq \tan\alpha = \underbrace{\frac{h}{a}}_{⑦}\ ,\quad \beta \fallingdotseq \tan\beta = \underbrace{\frac{h}{b}}_{⑧}\ .$$

よって，図より[*10]，

$$\delta = \alpha + \beta = \underbrace{\frac{h}{a} + \frac{h}{b}}_{⑨}\ .$$

(3)　図より，

$$\theta_1 \fallingdotseq \sin\theta_1 = \frac{h}{R_1}\,,\quad \theta_2 \fallingdotseq \sin\theta_2 = \frac{h}{R_2}$$

[*9] $\mathrm{P_2}$ から出る光線をプリズム内部まで延長した直線と入射光線の延長線によってできた三角形の外角を考えればよい．

[*10] 直線 $\mathrm{BP_2}$ を延長し，$\mathrm{AP_1}$ との交点から光軸に平行な直線を考えると，平行線の錯角・同位角から δ が決定される．

であり，平行線の錯角，および $\triangle \mathrm{OP_1P_2}$ の内角に注目して，

$$\theta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) = \pi\,, \qquad \therefore \theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{h}{R_1} + \frac{h}{R_2}\,.$$

よって，

$$\frac{h}{a} + \frac{h}{b} = (n-1)\left(\frac{h}{R_1} + \frac{h}{R_1}\right) = \frac{1}{f}\,, \qquad \therefore f = \frac{1}{n-1}\frac{R_1R_2}{R_1 + R_1}{}_{⑩}\,.$$

§7.2 レンズと球面鏡

第 2 章では，レンズ（と鏡）の性質について扱う．内容としては，(i) 写像公式の導出，(ii) 写像公式を使うだけの問題となる．写像公式の導出は，前章問題 4 でやったように，スネルの法則からきちんと議論するものもあるが，この章では，辺の情報だけから（すなわち相似な図形に注目する）写像公式の導出を行う（像の倍率を 2 通りで表現するだけ）．なお，写像公式の導出全パターンは授業内で行う．

■簡単なまとめ

- 凸レンズ・凹レンズの写像公式：
  レンズと物体の距離を a，レンズと像の距離を b，レンズの焦点距離を f とする．
  $$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\begin{cases}\dfrac{1}{f} & \text{（凸レンズ）}\\ -\dfrac{1}{f} & \text{（凹レンズ）}\end{cases}$$
  なお，レンズ前方に生じるような像（虚像）の場合 $b<0$ となり，組み合わせレンズを考える場合，1 つ目のレンズによって $a<0$ となる位置に仮想的に結像する像を虚光源という．また，レンズの倍率 m は，
  $$m=\left|\frac{b}{a}\right|$$
  となり，中身の符号が正であれば倒立，負であれば正立である．
- 凸面鏡・凹面鏡の写像公式：
  凸面鏡は凹レンズと，凹面鏡は凸レンズと同様の写像公式となる．なお，b の正の側がレンズと逆向きになっていることに注意．

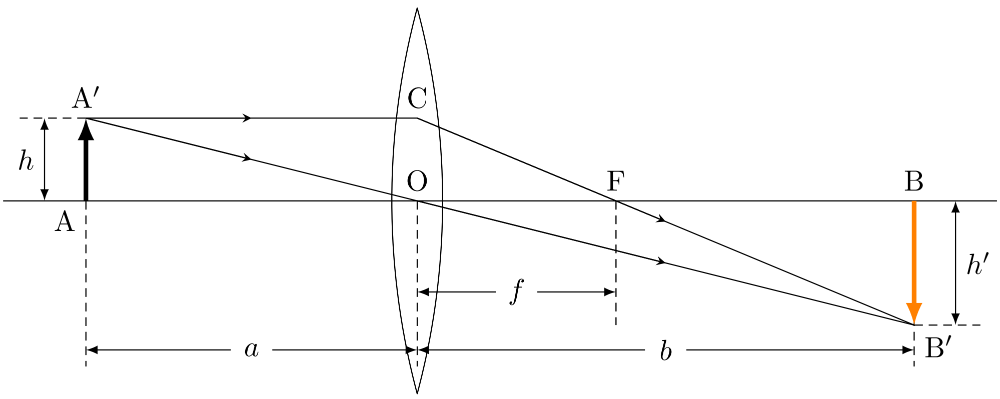
1. 凸レンズの写像公式

図のように各点 O，A，A′，B，B′，C，F（焦点）を定める．$\overline{\mathrm{OA}} = a$，$\overline{\mathrm{OB}} = b$，$\overline{\mathrm{OF}} = f < a$，物体（黒い矢印）の高さを $\overline{\mathrm{AA'}} = h$，観測される像（オレンジの矢印）の高さを $\overline{\mathrm{BB'}} = h'$ とする[*11]．

(1)　図中の相似な図形に注目することで，像の倍率 $\dfrac{h'}{h}$ を，a，b を用いて表せ．

(2)　図中の相似な図形に注目することで，像の倍率 $\dfrac{h'}{h}$ を，b，f を用いて表せ．

(3)　f を，a，b を用いて表せ．



【メモ】

辺のみから図形を考察するので，相似な図形に注目する．$f > a$ の場合は授業ノートを参照．

【解答】

(1)　$\triangle\mathrm{OAA'} \sim \triangle\mathrm{OBB'}$ より，

$$\frac{h'}{h} = \frac{b}{a}\,.$$

(2)　$\triangle\mathrm{FOC} \sim \triangle\mathrm{FBB'}$ より，

$$\frac{h'}{h} = \frac{b-f}{f}\,.$$

(3)　(1)，(2) より，

$$\frac{b}{a} = \frac{b-f}{f}\,, \qquad \therefore f = \frac{ab}{a+b} \quad \left(\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \right).$$

---

*11 図ではレンズの中心で屈折しているように描いているが，実際は前章の問題 *4* のように屈折している．

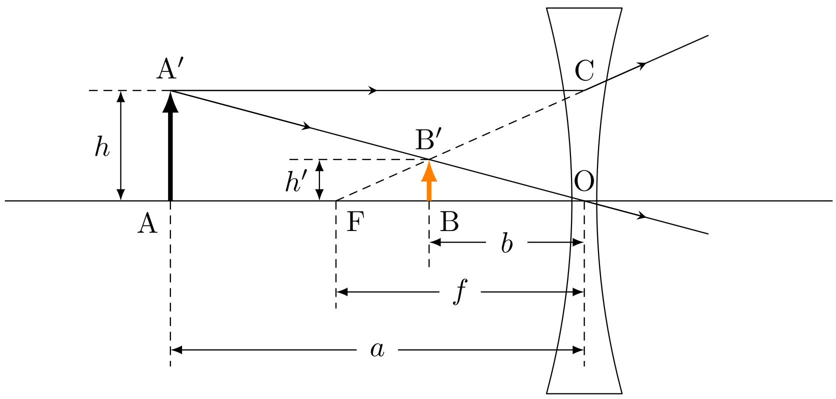
2. 凹レンズの写像公式

図のように各点 O，A，A′，B，B′，C，F（焦点）を定める．$\overline{\mathrm{OA}} = a$，$\overline{\mathrm{OB}} = b$，$\overline{\mathrm{OF}} = f$，物体（黒い矢印）の高さを $\overline{\mathrm{AA'}} = h$，観測される像（オレンジの矢印）の高さを $\overline{\mathrm{BB'}} = h'$ とする．

(1)　図中の相似な図形に注目することで，像の倍率 $\dfrac{h'}{h}$ を，a，b を用いて表せ．

(2)　図中の相似な図形に注目することで，像の倍率 $\dfrac{h'}{h}$ を，b，f を用いて表せ．

(3)　f を，a，b を用いて表せ．



【解答】

(1)　$\triangle\mathrm{OAA'} \sim \triangle\mathrm{OBB'}$ より，

$$\frac{h'}{h} = \frac{b}{a}.$$

(2)　$\triangle\mathrm{FOC} \sim \triangle\mathrm{FBB'}$ より，

$$\frac{h'}{h} = \frac{f-b}{f}.$$

(3)　(1)，(2) より，

$$\frac{b}{a} = \frac{b-f}{f}, \qquad \therefore f = \frac{ab}{a-b} \quad \left(\iff \frac{1}{a} + \frac{1}{-b} = -\frac{1}{f}\right).$$

3. 球面鏡の焦点距離と半径の関係

図のように各点 C（球面の中心），A，A′，F（焦点），Q（P から光軸に下した垂線と光軸の交点）を定める．$\overline{\mathrm{OF}} = f$，鏡面の半径を R，$\angle \mathrm{A'PF} = \theta$ とする．近軸光線ゆえ θ は微小角と見なせ，以下では $\sin\theta \fallingdotseq \theta$，$\cos\theta \fallingdotseq 1$，$\tan\theta \fallingdotseq \theta$ と近似せよ．

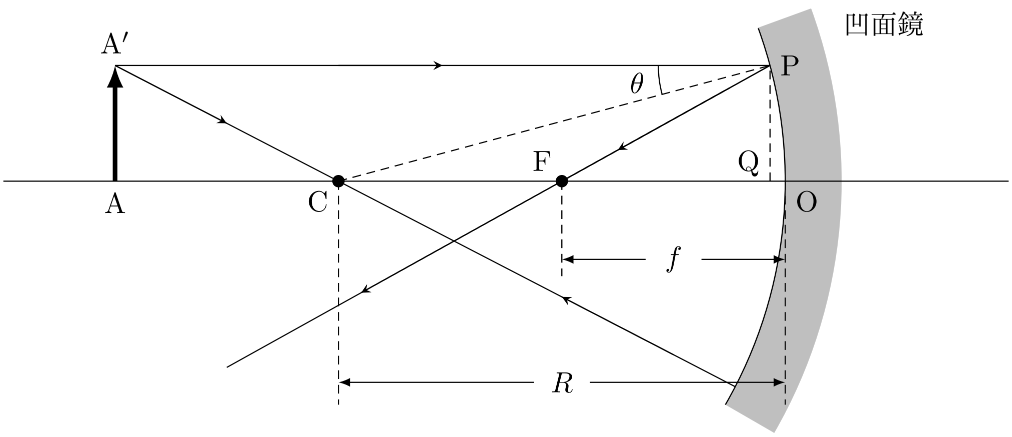
(1)　入射角と反射角が等しいことから，$\angle \mathrm{A'PC} = \angle \mathrm{CPF}$ が成り立つ．$\angle \mathrm{PFQ} = \theta$ を求めよ．

(2)　$\triangle \mathrm{CPQ}$ に注目し，$\overline{\mathrm{PQ}}$ を R，θ を用いて表せ．

(3)　$\triangle \mathrm{CPQ}$，線分 CO に注目し，$\overline{\mathrm{OQ}} \fallingdotseq 0$ を示せ．

(4)　$\triangle \mathrm{FPQ}$ に注目し，$\overline{\mathrm{PQ}}$ を f，θ を用いて表せ．

(5)　f を R を用いて表せ．



【解答】

(1)　入射角と反射角は等しく $\angle \mathrm{A'PC} = \angle \mathrm{CPF} = \theta$ であり，平行線の錯角から $\angle \mathrm{A'PC} = \angle \mathrm{PCF} = \theta$ である．よって，$\triangle \mathrm{CPF}$ の外角より $\angle \mathrm{PFQ} = 2\theta$．

(2)　$\overline{\mathrm{PQ}} = R\sin\theta \fallingdotseq R\theta$.

(3)　図より $\overline{\mathrm{CO}} = \overline{\mathrm{CQ}} + \overline{\mathrm{OQ}}$ より，

$$R = R\cos\theta + \overline{\mathrm{OQ}}\,, \qquad \therefore \overline{\mathrm{OQ}} = R(1-\cos\theta) \fallingdotseq 0\,.$$

(4)　$\overline{\mathrm{PQ}} \fallingdotseq f\tan 2\theta \fallingdotseq 2f\theta$.

(5)　(2)，(3) に近軸近似を施して，

$$f\cdot 2\theta \fallingdotseq R\theta\,, \qquad \therefore f = \frac{R}{2}\,.$$

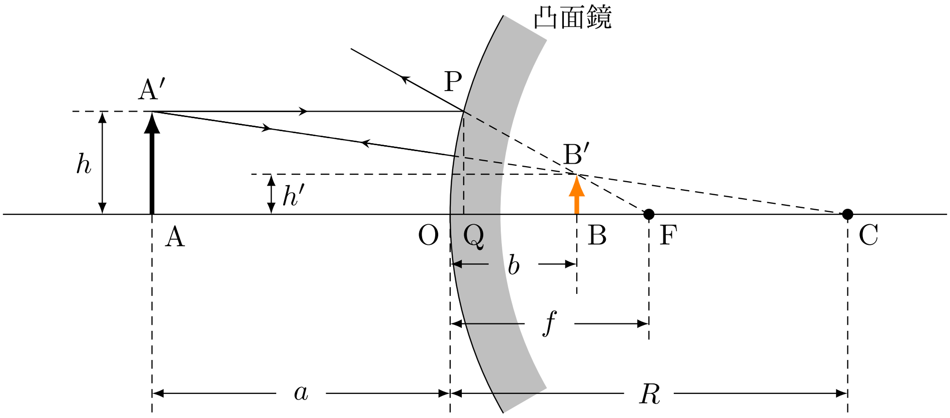
4. 凸面鏡の写像公式

図のように各点 C（球面の中心），A，A′，B，B′，O（光軸と鏡面の交点），F（焦点），Q（P から光軸に下した垂線と光軸の交点）を定める．$\overline{\mathrm{OA}} = a$，$\overline{\mathrm{OB}} = b$，$\overline{\mathrm{OF}} = f$，物体（黒い矢印）の高さを $\overline{\mathrm{AA'}} = h$，観測される像（オレンジの矢印）の高さを $\overline{\mathrm{BB'}} = h'$ とし，近軸光線を考える場合 $\overline{\mathrm{OF}} \fallingdotseq \overline{\mathrm{QF}}$ が成り立つ．

(1)　図中の相似な図形に注目することで，像の倍率 $\dfrac{h'}{h}$ を，a，b，R を用いて表せ．

(2)　図中の相似な図形に注目することで，像の倍率 $\dfrac{h'}{h}$ を，b，f を用いて表せ．

(3)　$R = 2f$ を用い，f を a，b を用いて表せ．



【解答】

(1)　$\triangle\mathrm{CAA'} \sim \triangle\mathrm{CBB'}$ より，

$$\frac{h'}{h} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{R-b}{a+R}}.$$

(2)　$\triangle\mathrm{FPQ} \sim \triangle\mathrm{FBB'}$ より，

$$\frac{h'}{h} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{f-b}{f}}.$$

(3)　(1)，(2) より，

$$\frac{R-b}{R+a} = \frac{f-b}{f}, \qquad \therefore f = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{ab}{a-b}} \quad \left(\iff \ \frac{1}{a} + \frac{1}{-b} = -\frac{1}{f} \right).$$

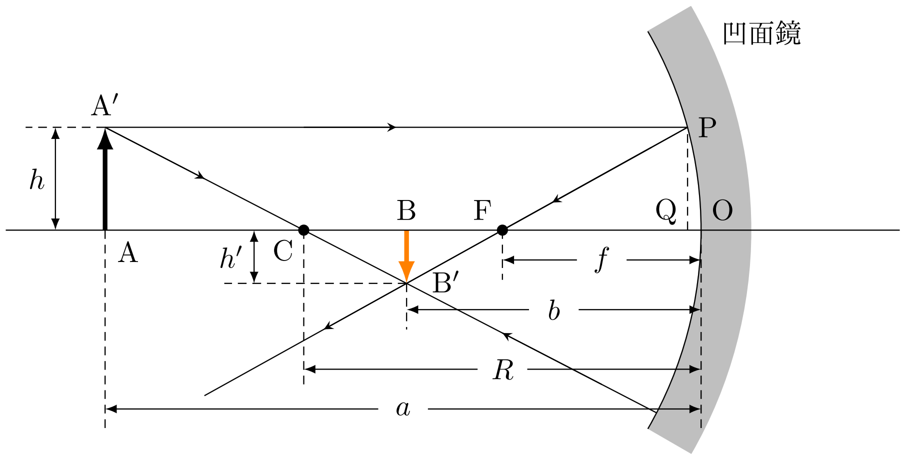
5. 凹面鏡の写像公式

図のように各点 C（球面の中心），A，A′，B，B′，O（光軸と鏡面の交点），F（焦点），Q（P から光軸に下した垂線と光軸の交点）を定める．$\overline{\mathrm{OA}} = a$，$\overline{\mathrm{OB}} = b$，$\overline{\mathrm{OF}} = f < a$，物体（黒い矢印）の高さを $\overline{\mathrm{AA'}} = h$，観測される像（オレンジの矢印）の高さを $\overline{\mathrm{BB'}} = h'$ とし，近軸光線を考える場合 $\overline{\mathrm{OF}} \fallingdotseq \overline{\mathrm{QF}}$ が成り立つ．

(1)　図中の相似な図形に注目することで，像の倍率 $\dfrac{h'}{h}$ を，a，b，R を用いて表せ．

(2)　図中の相似な図形に注目することで，像の倍率 $\dfrac{h'}{h}$ を，b，f を用いて表せ．

(3)　$R = 2f$ を用い，f を a，b を用いて表せ．



【メモ】

$f > a$ で虚像が生じる場合は授業ノートを参照．

【解答】

(1)　$\triangle\mathrm{CAA'} \sim \triangle\mathrm{CBB'}$ より，

$$\frac{h'}{h} = \underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{R-b}{a-R}}.$$

(2)　$\triangle\mathrm{FPQ} \sim \triangle\mathrm{FBB'}$ より，

$$\frac{h'}{h} = \underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{b-f}{f}}.$$

(3)　(1)，(2) より，

$$\frac{R-b}{a-R} = \frac{b-f}{f}, \qquad \therefore f = \underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{ab}{a+b}} \quad \left(\iff \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}\right).$$

6. 写像公式使うだけ①

レンズ，球面鏡に対して生じる像に関して考察する．レンズ，および球面鏡に対し物体の側をレンズ前方，逆側をレンズ後方と呼ぶ．以下の設問では，「レンズ前方 10 cm の位置に倍率 3 倍の正立虚像」のように解答せよ．

(1)　凸レンズ（焦点距離 6 cm）から 10 cm 離した位置に物体を置く．観測される像の種類，位置を求めよ．また，物体に対する像の倍率を求めよ．

(2)　凸レンズ（焦点距離 6 cm）から 4 cm 離した位置に物体を置く．観測される像の種類，位置を求めよ．また，物体に対する像の倍率を求めよ．

(3)　凹レンズ（焦点距離 8 cm）から 12 cm 離した位置に物体を置く．観測される像の種類，位置を求めよ．また，物体に対する像の倍率を求めよ．

(4)　凹面鏡（曲率半径 16 cm）から 12 cm 離した位置に物体を置く．観測される像の種類，位置を求めよ．また，物体に対する像の倍率を求めよ．

(5)　凹面鏡（曲率半径 16 cm）から 6 cm 離した位置に物体を置く．観測される像の種類，位置を求めよ．また，物体に対する像の倍率を求めよ．

(6)　凸面鏡（曲率半径 18 cm）から 6 cm 離した位置に物体を置く．観測される像の種類，位置を求めよ．また，物体に対する像の倍率を求めよ．

【解答】

写像公式を用いて計算すると以下のようになる．

(1)　レンズ後方 15 cm の位置に倍率 1.5 倍の倒立実像.

(2)　レンズ前方 12 cm の位置に倍率 3 倍の正立虚像.

(3)　レンズ前方 4.8 cm の位置に倍率 0.4 倍の正立虚像.

(4)　鏡前方 24 cm の位置に倍率 2 倍の倒立実像.

(5)　鏡後方 24 cm の位置に倍率 4 倍の正立虚像.

(6)　鏡後方 3.6 cm の位置に倍率 0.6 倍の正立虚像.

7. 写像公式使うだけ②

焦点距離 8 cm の凸レンズ（レンズ 1）周辺に物体（大きさ 4 cm）を置き，観測される像について考える．レンズに対し物体の側をレンズ前方，逆側をレンズ後方と呼ぶ．以下の設問では，「レンズ前方 10 cm の位置に大きさ 4 cm の正立虚像」のように解答せよ．

(1)　レンズ 1 前方 12 cm の位置に物体を置き，レンズ 1 後方 48 cm の位置に焦点距離 12 cm の凸レンズ（レンズ 2）を置く．最終的に観測される像について述べよ．

(2)　レンズ 1 前方 12 cm の位置に物体を置き，レンズ 1 後方 16 cm の位置に焦点距離 12 cm の凹レンズ（レンズ 2）を置く．最終的に観測される像について述べよ．

(3)　レンズ 1 後方 x の位置に焦点距離 12 cm の凸レンズ（レンズ 2）を置くと，最終的にレンズ 2 前方 24 cm の位置に虚像が観測された．x を求めよ．

(4)　レンズ 1 前方 12 cm の位置に物体を置き，レンズ 1 後方 16 cm の位置に曲率半径 16 cm の凹面鏡を置く．最終的に観測される像について述べよ．

【解答】

(1)　レンズ 1 に対して写像公式を用い，

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{b}=\frac{1}{8}, \qquad \therefore b=24\,\mathrm{cm}.$$

同様にレンズ 2 に対して写像公式を用い，

$$\frac{1}{24}+\frac{1}{b'}=\frac{1}{12}, \qquad \therefore b'=24\,\mathrm{cm}.$$

よって，総合倍率は，

$$m=\left|\frac{24}{12}\right|\cdot\left|\frac{24}{24}\right|=2.$$

以上より，レンズ 2 後方 24 cm の位置に大きさ 8 cm の正立実像 となる．

(2)　レンズ 1 に対して写像公式を用い，

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{b}=\frac{1}{8}, \qquad \therefore b=24\,\mathrm{cm}.$$

よって，レンズ 2 に対してはこの像を虚光源と見なし写像公式を用いて，

$$\frac{1}{-8}+\frac{1}{b'}=-\frac{1}{12}, \qquad \therefore b'=24\,\mathrm{cm}.$$

よって，総合倍率は，

$$m=\left|\frac{24}{12}\right|\cdot\left|\frac{24}{-8}\right|=6.$$

以上より，レンズ 2 後方 24 cm の位置に大きさ 24 cm の倒立実像 となる．

(3)　レンズ 1 に対して写像公式を用い，

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{b}=\frac{1}{8}, \qquad \therefore b=24\,\mathrm{cm}.$$

同様にレンズ 2 に対して写像公式を用い[*12]，

$$\frac{1}{x-24}+\frac{1}{-24}=\frac{1}{12}, \qquad \therefore x=32\,\mathrm{cm}.$$

(4)　レンズ 1 に対して写像公式を用い，

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{b}=\frac{1}{8}, \qquad \therefore b=24\,\mathrm{cm}.$$

[*12] $x>24\,\mathrm{cm}$ の場合を考えると，虚光源として扱って $a=-x-24$ となり式と結果ともに同じものとなる．

よって，凹面鏡に対してはこの像を虚光源と見なし写像公式を用いて，

$$\frac{1}{-8}+\frac{1}{b'}=\frac{1}{8}\,,\qquad \therefore b'=4\,\mathrm{cm}$$

となり，凹面鏡前方 4 cm の位置に実像が生じる．更にこれの像に対してレンズ 1 の写像公式を用いれば，鏡によって光軸（光の進行方向）が反転することに注意して[*13]，

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{b''}=\frac{1}{8}\,,\qquad \therefore b''=24\,\mathrm{cm}\,.$$

以上より，総合倍率は，

$$m=\left|\frac{24}{12}\right|\cdot\left|\frac{4}{-8}\right|\cdot\left|\frac{24}{12}\right|=2$$

であり，レンズ 1 左方 24 cm の位置に大きさ 8 cm の正立実像 となる．

[*13] 普段右向き対して正負を考えているものを左向きに対して正負を考える．

§7.3 光の干渉

第 3 章では，光の干渉を主に扱う．光の干渉は，ヤングの実験を始めとした有名テーマ毎に押さえていく．なお，はじめに光速の測定に関する話題も触れておく．

■簡単なまとめ

- 干渉：

  干渉条件は位相差で議論できるようにしておく．

$$
\begin{aligned}
(\text{位相差}) &= \frac{2\pi}{\lambda}(\text{経路差}) + (\text{初期位相差}) + (\text{反射に伴う位相のずれ}) \\
&= \begin{cases} 2m\pi & (\text{強めあい}), \\ (2m-1)\pi & (\text{弱めあい}). \end{cases}
\end{aligned}
$$

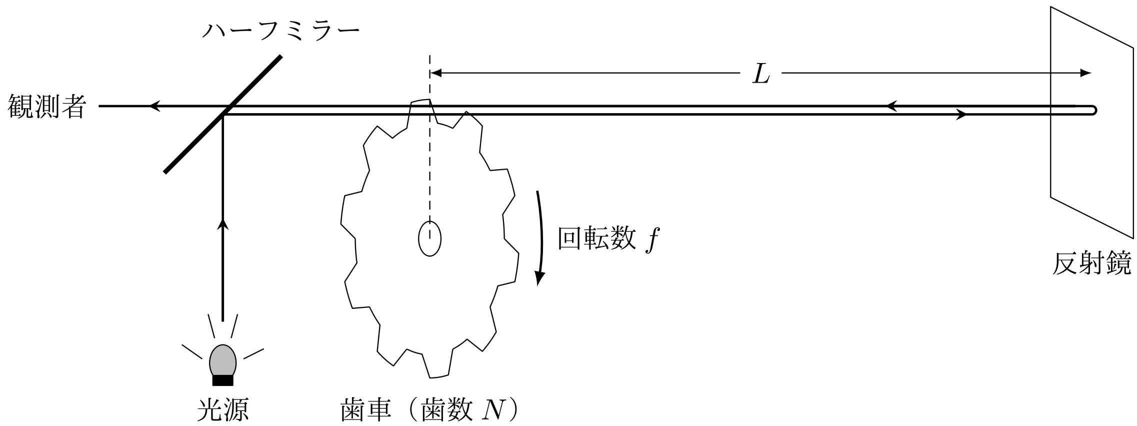
1. 光速の測定実験①

フィゾーは，1849 年に地上で初めて光速の測定を行った．図は，その実験装置の模式図である．光源から出た光の一部がハーフミラーで反射され，歯数 N の歯車の隙間を通過し，歯車から距離 L だけ離れた反射鏡で反射された光が再び歯車を通過し，ハーフミラーを透過して観測者によって観測される仕組みとなっている．歯車の回転数（単位時間当たりの回転回数）が小さいとき観測者は絶え間なく光を観測するが，回転数が f となったとき，初めて光が観測されなくなった．光速を c とする．

(1)　光が歯車の隙間を通過し，鏡で反射され，再び歯車に戻ってくるまでの時間 t_1 を，c，L を用いて表せ．

(2)　歯車の回転数が f のとき，光が往復する間の時間に歯車はちょうど歯 1 個分（歯のある部分が歯のない部分へ 1 個ずれる）だけ回転する．歯車が歯 1 個分だけ回転する時間 t_2 を，f，N を用いて表せ．

(3)　t_1 と t_2 が等しいことから，c を，f，N，L で表せ．



【解答】

(1)　$t_1 = \dfrac{2L}{c}$.

(2)　歯数が N 個のため，この間，歯車は $\dfrac{1}{2N}$ 周する．よって，

$$ft_2 = \frac{1}{2N}, \qquad \therefore t_2 = \frac{1}{2fN}.$$

(3)　$c = 4fNL$.

2. 光速の測定実験②

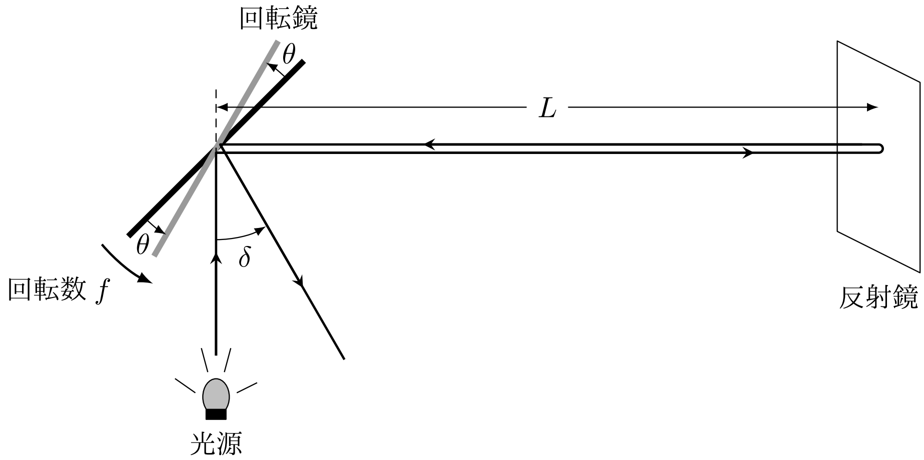
フーコーは 1862 年に光速の測定を行った．図は，その実験装置の模式図である．光源から出た光が回転鏡（回転数 f）で反射され，回転鏡から距離 L だけ離れた位置にある反射鏡で反射された後，再び回転鏡で反射される．このとき，戻ってきた反射光は，入射した光に対し δ だけずれた方向に観測される．光速を c とする．

(1)　光が回転鏡で反射され反射鏡で反射された後，再び回転鏡に戻ってくるまでの時間 t_1 を，c，L を用いて表せ．

(2)　光が 1 回目に回転鏡を反射してから 2 回目に反射するまでの回転鏡の回転角を θ とする．回転鏡の回転角が θ となる時間 t_2 を，f，θ を用いて表せ．

(3)　θ を，δ を用いて表せ．

(4)　t_1 と t_2 が等しいことから，c を，f，δ，L で表せ．



【解答】

(1)　$t_1 = \dfrac{2L}{c}$．

(2)　回転鏡の単位時間当たりの回転角は $\dfrac{1}{2\pi f}$ ゆえ，θ 回転するのに要する時間 t_2 は，

$$t_2 = \frac{\theta}{2\pi f}.$$

(3)　図より，$\theta = \dfrac{\delta}{2}$．

(4)　$c = \dfrac{8\pi f L}{\delta}$．

3. ヤングの実験（I は基本）

図のように，単色光（波長 λ）がスリット $\mathrm{S_0}$ で回折し，そこから 2 つのスリット $\mathrm{S_1}$，$\mathrm{S_2}$ で回折され，スクリーン上では干渉縞が観測された．スリット $\mathrm{S_0}$ と $\mathrm{S_1}$，$\mathrm{S_2}$ の距離を ℓ，スリット $\mathrm{S_1}$，$\mathrm{S_2}$ とスクリーンの距離を L，$\mathrm{S_1}$ と $\mathrm{S_2}$ の間隔を d とする．この装置全体は真空中に在り，真空の屈折率を 1 とする．以下では，L，ℓ 以外の長さに関する量は全て L，ℓ に比べて十分に小さいとする．

スリット $\mathrm{S_1}$，$\mathrm{S_2}$ の垂直二等分線とスクリーンの交点を原点 O とし，図のように x 軸を定める．スクリーン上の位置 x_m にある点 P では，m 次の明線が観測された（m は整数）．

I　まず，ヤングの実験の基本的な計算を行う．

(1)　スリット $\mathrm{S_1}$，$\mathrm{S_2}$ から点 P で観測される 2 つの光の位相差 $\Delta\phi$ を，以下の 2 通りによって d，L，x_m，λ を用いて表せ[*14]．

(a)　図 2 のように両スリットから点 P に届く光は平行と見なせるとし，その方向 θ は微小で，微小角 θ に対して成り立つ近似式 $\sin\theta \fallingdotseq \tan\theta$ を用いることで経路差を計算する．

(b)　三平方の定理から $\overline{\mathrm{S_1P}}$，$\overline{\mathrm{S_2P}}$ をそれぞれ計算し，$|\varepsilon| \ll 1$ の微小量 ε に対して成り立つ近似式 $\sqrt{1+\varepsilon} \fallingdotseq 1 + \dfrac{1}{2}\varepsilon$ を用いることで経路差を計算する．

(2)　O 付近で観測される明線の間隔 Δx を，d，L，λ を用いて表せ．

II　I の装置に対して，以下の条件を付与したときの明線の状況を考える．

(1)　単色光ではなく白色光を入射した場合，明線付近の明線の様子はどうなるか．

(2)　スリット $\mathrm{S_1}$ の手前側に厚さ a，屈折率 n の媒質を貼り付けたとき，0 次の明線が観測される位置は，はじめと比べてどれだけずれるか．

(3)　スリット $\mathrm{S_1}$ の媒質を除く．スリット $\mathrm{S_0}$ を x 軸正方向に $h\,(>0)$ だけ動かしたとき，0 次の明線が観測される位置は，はじめと比べてどれだけずれるか．ただし，$h \ll \ell$ とする．

(4)　$\mathrm{S_1}$，$\mathrm{S_2}$ の位置にあるスリットの数を 2 つから増やしていくと，観測される明線の様子はどのようになっていくか（この問題の定量的解説は問題 *9* に）．

[*14] この 2 通りとさらに異なるやり方については授業内で紹介します．

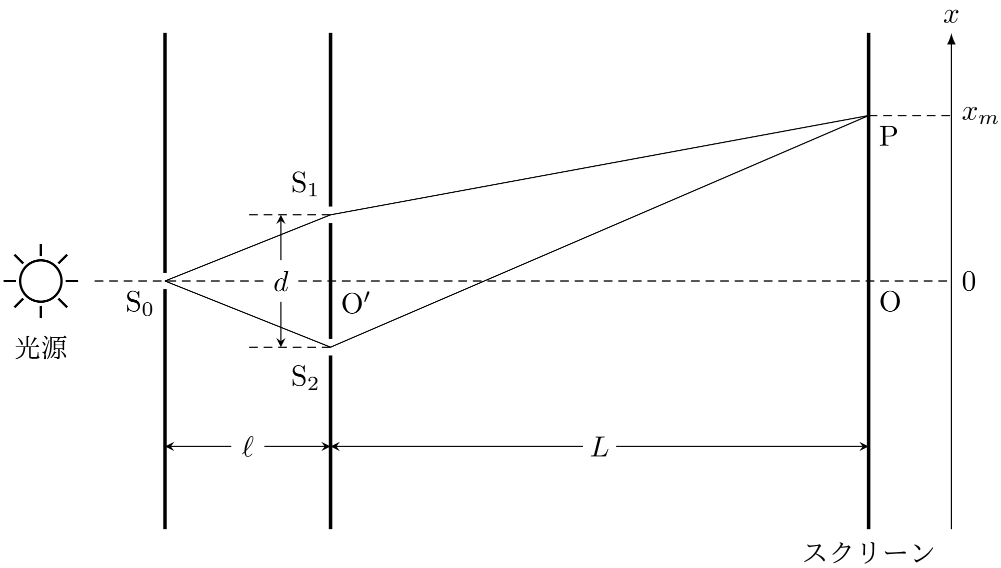


図 1

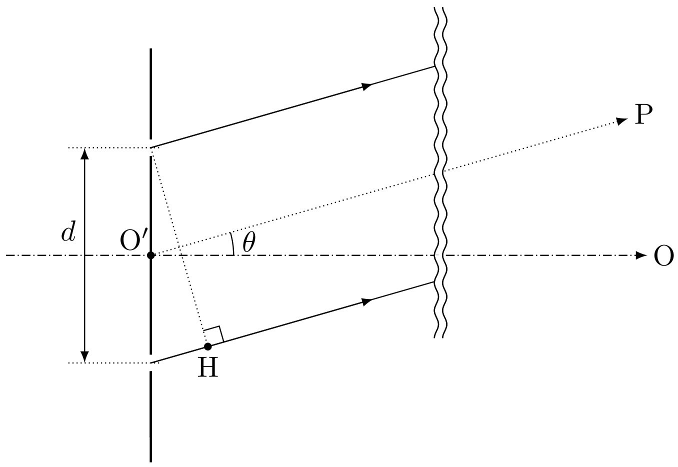


図 2

【解答】

I (1) (a)　2 つの光の経路差は $d\sin\theta \fallingdotseq d\tan\theta$ であり，図 2 より $\tan\theta = \dfrac{x_m}{L}$ である．近似式を用いて，

$$\Delta\phi = \underline{\frac{2\pi}{\lambda}\frac{dx_m}{L}}\,.$$

(b)　2 つの光の経路差は

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{S_1P}} - \overline{\mathrm{S_2P}} &= \sqrt{L^2 + \left(x_m + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{L^2 + \left(x_m - \frac{d}{2}\right)^2}\\ &= L\left\{\sqrt{1 + \left(\frac{x_m + d/2}{L}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{x_m - d/2}{L}\right)^2}\right\}\\ &\fallingdotseq L\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x_m + d/2}{L}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x_m - d/2}{L}\right)^2\right)\right\}\\ &= \frac{dx_m}{L}\,.\end{aligned}$$

よって，位相差は，

$$\Delta\phi = \underline{\frac{2\pi}{\lambda}\frac{dx_m}{L}}\,.$$

(2)　明線条件を考えて，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{dx_m}{L} = 2m\pi\,, \qquad \therefore x_m = \frac{L\lambda}{d}m\,.$$

よって，

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \underline{\frac{L\lambda}{d}}\,.$$

II (1)　明線間隔は $\dfrac{L\lambda}{d}$ ゆえ，λ が大きいほど明線間隔もまた大きくなる．すなわち，O ではすべての波長の光が強め合い白色の明線が生じ，そこから離れた位置では O に近い側から青→緑→赤のように波長が短い順に明線が生じる．

(2)　位相差は，

$$\Delta\phi = \left(\frac{2\pi}{\lambda}t + \frac{2\pi}{\lambda}\overline{\mathrm{S_2P}}\right) - \left(\frac{2\pi}{\lambda/n}t + \frac{2\pi}{\lambda}\overline{\mathrm{S_1P}}\right) \fallingdotseq \frac{2\pi}{\lambda}\left\{(1-n)t + \frac{dx_m}{L}\right\}\,.$$

よって，m 次の明線が観測される位置は，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left\{(1-n)a + \frac{dx_m}{L}\right\} = 2m\pi\,, \qquad \therefore x_m = \frac{L\lambda}{d}m + (n-1)\frac{La}{d}$$

であり，0 次の明線が観測される位置は $\underline{x \text{ 軸正方向に } (n-1)\dfrac{La}{d}}$ 動く．

(3)　位相差は，

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\overline{\mathrm{S_0S_2}} + \overline{\mathrm{S_2P}}\right) - \frac{2\pi}{\lambda}\left(\overline{\mathrm{S_0S_1}} + \overline{\mathrm{S_1P}}\right) \fallingdotseq \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{dh}{\ell} + \frac{dx_m}{L}\right).$$

よって，m 次の明線が観測される位置は，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{dh}{\ell} + \frac{dx_m}{L}\right) = 2m\pi\,, \qquad \therefore x_m = \frac{L\lambda}{d}m - \frac{Lh}{\ell}$$

であり，0 次の明線が観測される位置は x 軸負方向に $\dfrac{Lh}{\ell}$ 動く．

(4)　鋭い明線が観測されるようになる．

4. 回折格子（I は基本）

図 1 のように，単色光（波長 λ）を回折格子（格子定数 d）に入射し，回折格子から十分離れた位置にあるスクリーンで明線を観測する．図 2 のように，m 次の明線が観測される方向を θ_m（反時計回りを正）とする[*15]．この装置全体は真空中に在り，真空の屈折率を 1 とする．以下では，L，ℓ 以外の長さに関する量は全て L，ℓ に比べて十分に小さいとする．

I　まず，回折格子の光の干渉における基本的な計算を行う[*16]．

(1)　d が一定なことから，隣り合う 2 つの光が強め合いの条件を満たせば全ての光が強め合う．m 次の明線が観測される方向の条件を求めよ．

(2)　図 3 のように，回折格子へ入射する光を反時計回りに α だけ傾けた．このとき，m 次の明線が観測される方向の条件を求めよ．

(3)　図 4 のような反射光型の回折格子を考える．入射角 β で入射したとき，角度 θ_m の方向で m 次の明線が観測される条件を求めよ．

II　I(1) について，以下の条件を付与したときの明線の状況を考える．

(1)　$\lambda = 400\,\mathrm{nm}$ で回折格子には $1\,\mathrm{mm}$ あたり 1000 本の溝があるとき，明線の観測される方向の正弦 $\sin\theta$ を有効数字 1 桁で求めよ．

(2)　スクリーンに観測される明線が 3 本となるための λ の範囲を求めよ．

[*15] θ_m は微小角でないことに注意.

[*16] 反射型回折格子については時間があれば授業内で扱います.

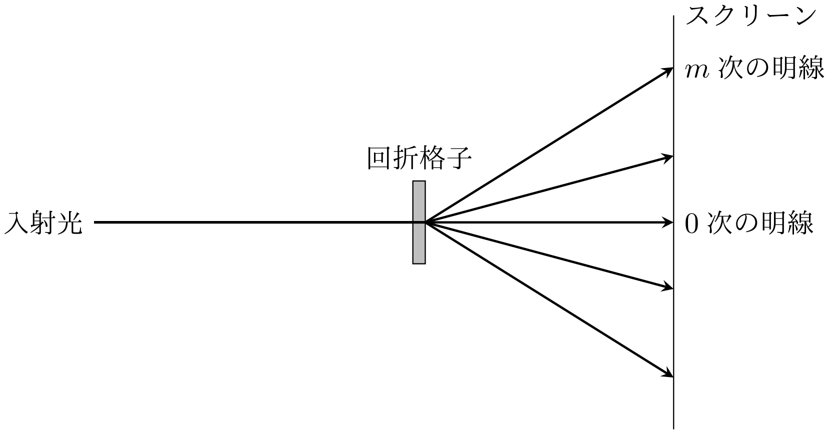

スクリーン
m 次の明線
回折格子
入射光
0 次の明線

図 1

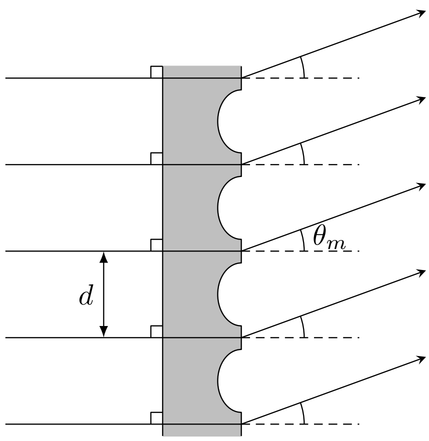

θ_m
d

図 2

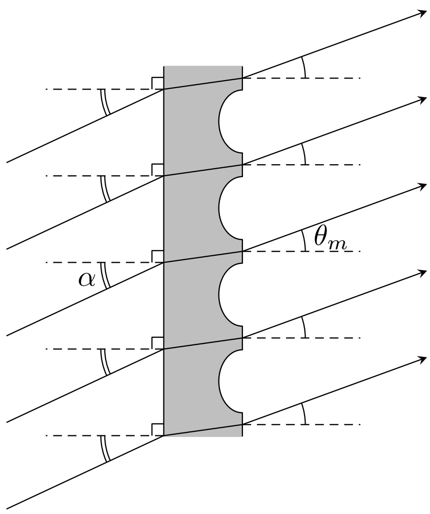

θ_m
α

図 3

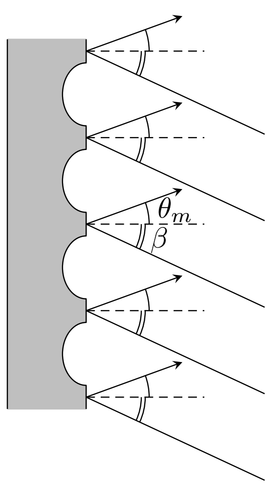

θ_m
β

図 4

【解答】

I (1)　隣り合う 2 つの光の経路差は $d\sin\theta_m$ ゆえ，

$$\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta_m = 2m\pi\,, \qquad \therefore \sin\theta_m = \frac{\lambda}{d}m\,.$$

(2)　隣り合う 2 つの光の経路差は $d\sin\theta_m - d\sin\alpha$ ゆえ，

$$\frac{2\pi}{\lambda}d(\sin\theta_m - \sin\alpha) = 2m\pi\,, \qquad \therefore \sin\theta_m = \frac{\lambda}{d}m + \sin\alpha\,.$$

(3)　隣り合う 2 つの光の経路差は $d\sin\theta_m - d\sin\beta$ ゆえ，

$$\frac{2\pi}{\lambda}d(\sin\theta_m - \sin\beta) = 2m\pi\,, \qquad \therefore \sin\theta_m = \frac{\lambda}{d}m + \sin\beta\,.$$

II (1)　$d = 1\times10^{-6}\,\mathrm{m}$ である．$-1 < \sin\theta_m < 1$ より，

$$-1 < \frac{400\times10^{-9}}{1\times10^{-6}}m < 1\,, \qquad \therefore -2.5 < m < 2.5\,.$$

よって，この範囲の整数 m は 0，±1，±2 の 5 つであり，この m に対応する正弦は，

$$\sin\theta_m = 0\,,\ \pm0.4\,,\ \pm0.8\,.$$

(2)　$-1 < \sin\theta_m < 1$ より，

$$-1 < \frac{\lambda}{d}m < 1\,, \qquad \therefore -\frac{d}{\lambda} < m < \frac{d}{\lambda}\,.$$

この範囲の整数が 3 個となるためには，

$$\begin{cases} 2 < \dfrac{d}{\lambda}\,, \\ \dfrac{d}{\lambda} \leq 3\,, \end{cases} \qquad \therefore \frac{d}{3} \leq \lambda < \frac{d}{2}\,.$$

5. 薄膜干渉（**I** は基本）

薄膜上に生じる干渉縞を観測する．図のように，空気中（屈折率 1）から薄膜（屈折率 n，厚さ d）に単色光（波長 λ）を入射角 i で入射し屈折した後，屈折率 n' の媒質との境界面上の点 C で反射し，点 D で再び空気中に屈折し透過する．経路 A → B → C → D をたどる光線と薄膜表面で反射した経路 A′→ B′ をたどる光が干渉しあい，干渉縞が生じる．AA′ は入射光の波面，BB′ は屈折光の波面である．

I　まず，薄膜で生じる干渉の基本的な計算を行う．なお，$1 < n < n'$ とし，屈折角を θ とする．

(1)　スネル則より，$\sin\theta$ を i，n を用いて表せ．

(2)　観測される 2 つの光の位相差 $\Delta\phi$ を，d，n，θ，λ を用いて表せ．

(3)　m 次の明線が観測される方向を i_m とする．$\sin i_m$ を，m，d，n，λ を用いて表せ．なお，m は整数を表す．

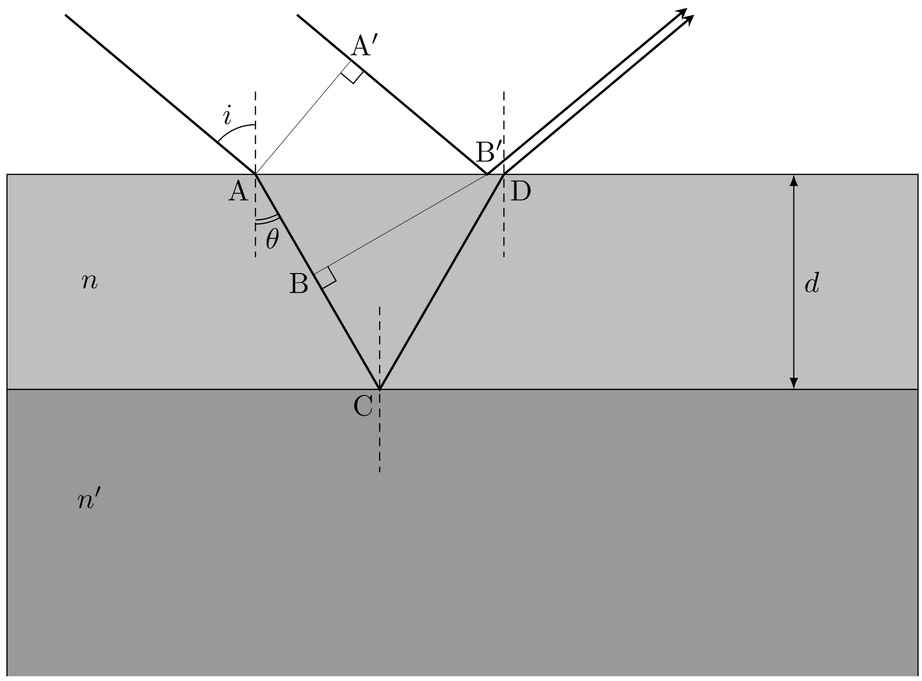
II　以下の状況を考える．

(1)　$1 < n' < n$ としたとき，$\sin i_m$ はどうなるか．

(2)　$i = 0$，$n = 1.2$，$n' = 1$，$d = 1 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$ の場合を考える．このとき，強め合いが生じるような色を答えよ．なお，色と波長の関係は（だいたい）以下のようになっている．

紫: 380 nm〜450 nm	青: 450 nm〜500 nm	緑: 500 nm〜565 nm
黄: 565 nm〜590 nm	橙: 590 nm〜625 nm	赤: 625 nm〜780 nm

(3)　$1 < n < n'$，$i = 0$ とする．膜の厚さ d が λ に比べて十分小さいとき，薄膜の上側での光は必ず強め合うことを示せ．また，膜の厚さ d を徐々に厚くしていったとき，2 度目に弱め合ったときの厚さ d^* を求めよ．


A′
i
B′
A
D
θ
n
B
d
C
n′

【解答】

I (1)　スネル則より，

$$n\sin\theta = 1\cdot\sin i\,,\qquad \therefore \sin\theta = \frac{1}{n}\sin i\,.$$

(2)　隣り合う 2 つの光の経路差 $\varDelta\ell$ は △BCD に注目して[*17][*18]，

$$\begin{aligned}\varDelta\ell &= \frac{d}{\cos\theta} + \frac{d}{\cos\theta}\cos 2\theta \\ &= \frac{d}{\cos\theta}(1+\cos 2\theta) \\ &= 2\cos^2\theta\frac{d}{\cos\theta} \\ &= 2d\cos\theta\,.\end{aligned}$$

よって，位相差はともに反射によって π ずつ位相がずれていることを考慮して，

$$\varDelta\phi = \frac{2\pi}{\lambda/n}\varDelta\ell + \pi - \pi = \frac{4\pi}{\lambda}nd\cos\theta\,.$$

(3)　強め合いの条件を考えて，

$$\frac{4\pi}{\lambda}nd\cos\theta = 2m\pi\,.$$

スネル則より $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin^2 i}$ ゆえ，

$$\frac{4\pi}{\lambda}nd\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin^2 i_m} = 2m\pi\,.,\qquad \therefore \sin i_m = \sqrt{n^2-\left(\frac{\lambda}{2d}m\right)^2}\,.$$

II (1)　下の面で反射する光線の反射の際に生じる位相のずれがなくなるため位相差は，

$$\varDelta\phi = \frac{2\pi}{\lambda/n}\varDelta\ell + \pi = \frac{4\pi}{\lambda}nd\cos\theta + \pi$$

となり，強め合いの条件は，

$$\frac{4\pi}{\lambda}nd\cos\theta + \pi = 2m\pi\,,\qquad \therefore \sin i_m = \sqrt{n^2-\left\{\frac{\lambda}{2d}\left(m-\frac{1}{2}\right)\right\}^2}\,.$$

[*17] 2 倍角の公式 $\cos 2\theta = 2\cos\theta - 1$ を利用している．

[*18] この計算は閃きいらずだが，計算はやや難しく感じられるかもしれない．やや閃きのいる最も一般的なやり方は授業内で扱う．

(2)　干渉条件より，

$$\cos 0 = \frac{\lambda}{2nd}\left(m - \frac{1}{2}\right)\,, \qquad \therefore \lambda = \frac{2nd}{m - \dfrac{1}{2}} = \frac{3 \times 10^{-7}}{m - \dfrac{1}{2}}\,\mathrm{m}\,.$$

ここで，可視光領域の範囲内での干渉を考えることから，

$$380 \times 10^{-9} \leq \frac{2.4 \times 10^{-7}}{m - \dfrac{1}{2}} \leq 780 \times 10^{-9}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{24}{76} \leq m \leq \frac{1}{2} + \frac{24}{38}\,, \qquad \therefore m = 1\,.$$

よって，$m = 1$ に対応する光の波長は，

$$\lambda = \frac{2.4 \times 10^{-7}}{1 - \dfrac{1}{2}}\,\mathrm{m} = 480\,\mathrm{nm}$$

であり，これは 青 とわかる．

(3)　強め合い，弱め合いの条件は，

$$\frac{4\pi}{\lambda}nd + \pi - \pi = \begin{cases} 2m\pi & \text{強め合い} \\ (2m-1)\pi & \text{弱め合い} \end{cases}$$

ここで，$\dfrac{d}{\lambda} \fallingdotseq 0$ では左辺は 0 となり，これは強め合いの条件の $m = 0$ に相当する．よって，このような場合常に強め合いを示すことがわかる．また，この状態から次の強め合いは $m = 1$ を考えればよく，

$$\frac{4\pi}{\lambda}nd^* = 2\pi\,, \qquad \therefore d^* = \frac{\lambda}{2n}\,.$$

6. 楔形干渉（**I** は基本）

図 1 のように，屈折率 n の平板ガラスで厚さ D のフィルムを挟み（隙間には空気がある），上から波長 λ の単色光を入射した．ガラスの左端からフィルムまでの距離を L とし，この向きに x 軸を定める（左端を原点に定める）．装置の上側から干渉縞を観測する．空気の屈折率を 1 とする．

I　まず，楔形干渉の基本的な計算を行う．

(1)　ガラスの隙間の角度を θ とする．$\tan\theta$ を D，L を用いて表せ．

(2)　m 番目の明線の位置を x_m とする（m は自然数）．x_m を，m，λ，D，L を用いて表せ．

(3)　θ を微小角とする．前問の x_m を，m，λ，θ を用いて表せ．

II　以下の状況を考える．

(1)　図 2 のように下側から観測したとき，上側で明線だった位置では明線と暗線のどちらが観測されるか．

(2)　再度上側で観測する．下側のガラスを下に d だけ下げたところ，m 次の明線の位置は Δx だけ x 軸負方向にずれた．Δx を求めよ．

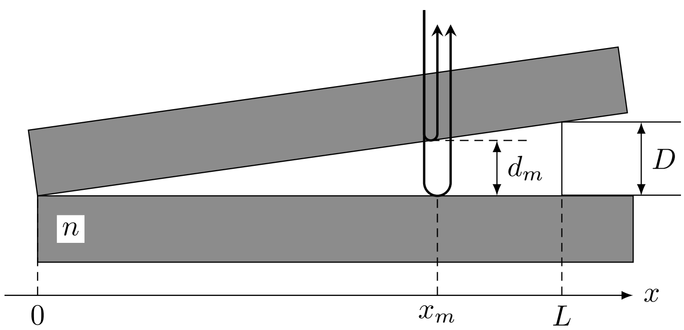


図 1

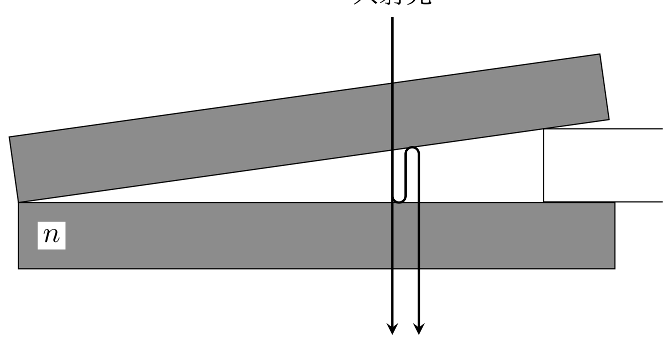


図 2

【解答】

I (1)　$\tan\theta = \dfrac{D}{L}$.

(2)　$d_m = \dfrac{D}{L}x_m$ ゆえ反射による位相のずれを考慮して，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2\frac{D}{L}x_m + \pi = 2m\pi\,, \qquad \therefore x_m = \frac{L\lambda}{2D}\left(m - \frac{1}{2}\right).$$

(3)　$\tan\theta \fallingdotseq \theta$ より $\dfrac{D}{L} \fallingdotseq \theta$ である．よって，

$$x_m = \frac{\lambda}{2\theta}\left(m - \frac{1}{2}\right).$$

II (1)　反射による位相のずれが 2π となるので強め合いの条件は，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2\frac{D}{L}x_m + 2\pi = 2m\pi\,, \qquad \therefore x_m = \frac{L\lambda}{2D}(m-1)$$

となり，これは上から見たときの弱め合いの条件（$m-1$ 番目の暗線）と一致する．したがって，上から観測して明線となる位置を下から見たとき暗線が観測される．

(2)　強め合いの条件より，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(2\frac{D}{L}x_m + 2d\right) + \pi = 2m\pi\,, \qquad \therefore x_m = \frac{L\lambda}{2D}\left(m - \frac{1}{2}\right) - \underbrace{\frac{L}{D}d}_{=\Delta x}.$$

7. ニュートンリング（I は基本）

図のように，屈折率 n の平板ガラスと半径 R の平凸レンズを重ねて置く．平凸ガラスの上から単色光（波長 λ）を入射した．図のように x 軸を定め，m 番目の強め合いが作る環（明環）の半径を r_m とする（m は整数）．

I　まず，ニュートンリングの基本的な計算を行う．

(1)　m 番目の強め合い（明環）が観測される位置の平板ガラスと平凸レンズの間の距離を d_m とする．$d_m \fallingdotseq \dfrac{1}{2}\dfrac{{r_m}^2}{R}$ となることを示せ．なお，$d_m \ll R$ とする．

(2)　r_m を，m，λ，R を用いて表せ．

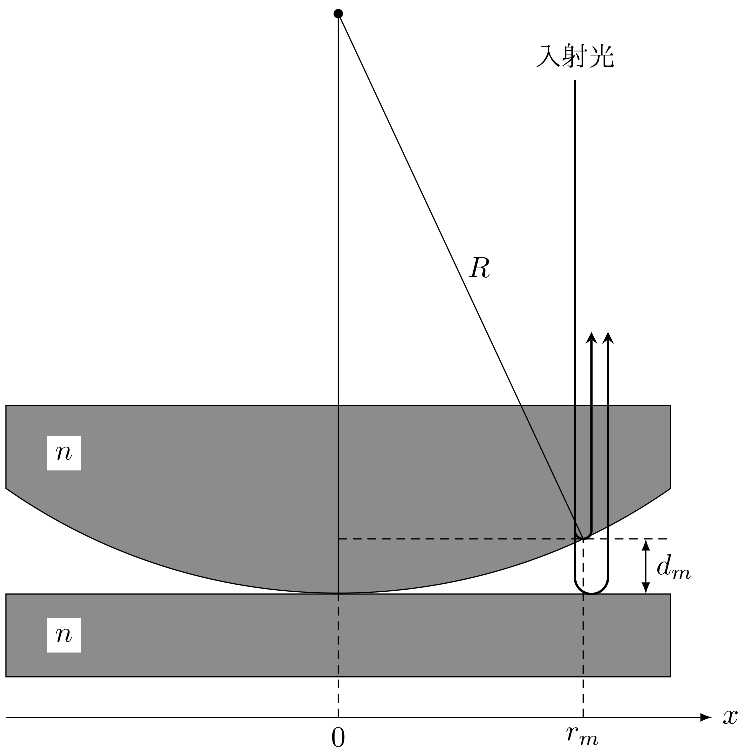
(3)　$x = 0$ に生じるのは明環，暗環のいずれか答えよ．

(4)　$m+1$ 次の明環の半径は，m 次の明環の半径の何倍か．

II　以下の状況を考える．

(1)　隙間をガラスよりも屈折率の大きい屈折率 n の媒質で満たしたとき，r_m はどのようになるか．

(2)　赤と青のうち，明環の間隔が狭くなるのはいずれか．



【解答】

I (1)　図より，

$$
\begin{aligned}
{r_m}^2 + (R - d_m)^2 &= R^2 \\
\left(\frac{r_m}{R}\right)^2 + \left(1 - \frac{d_m}{R}\right)^2 &= 1 \\
\left(\frac{r_m}{R}\right)^2 + \left(1 - 2\frac{d_m}{R}\right) &\fallingdotseq 1\,, \qquad \therefore d_m = \frac{1}{2}\frac{{r_m}^2}{R}\,.
\end{aligned}
$$

(2)　反射による位相のずれを考慮して，

$$
\frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2d_m + \pi = 2m\pi\,, \qquad \therefore r_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)R\lambda}\,.
$$

(3)　暗環の半径 r'_m は前問同様にして計算すると $r'_m = \sqrt{mR\lambda}$ であり，中心部 $r = 0$ を満たす m が存在するのは暗環の条件である．すなわち，中心では暗環が観測される．

(4)　明環の半径の式から，

$$
\frac{r_{m+1}}{r_m} = \frac{\sqrt{\left(m + 1 - \frac{1}{2}\right)R\lambda}}{\sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)R\lambda}} = \sqrt{\frac{2m+1}{2m-1}}\,.
$$

II (1)　$\lambda \to \dfrac{\lambda}{n}$ となるので，

$$
r_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{R\lambda}{n}}
$$

と $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 倍となる．

(2)　明環間隔は，

$$
r_{m+1} - r_m = \left(\sqrt{2m+1} - \sqrt{2m-1}\right)\sqrt{R\lambda}
$$

であり，λ が大きいほどその間隔もまた大きくなる．よって．間隔が狭いのは 青．

8. マイケルソン干渉計（I は基本）

図 4 − 1 の HM はハーフミラーで，光路に対して 45° の角度で置かれている．A と B はそれぞれ，光路に対して垂直に置かれた 2 つの平面鏡の上の点である．HM の O に図の左から入射した単色光は透過光と反射光に分かれ，透過光は平面鏡の A で反射された後，さらに HM の O で反射されて光検出器 D に到達し，一方反射光は平面鏡の B で反射された後，HM の O を通過して光検出器 D に到達する．

2 つの平面鏡の O 点からの距離を $\mathrm{OA} - \mathrm{OB} = d$ になるように置く．入射光の波長を変化させていくと，光路 O → A → O → D と，光路 O → B → O → D を経た光の干渉によって，D で検出される光の強度が変化する．

I　まず，マイケルソン干渉計の基本的な計算を行う．

(1)　図 1 の装置を考える．m を自然数として，観測される光の強度が極大となる条件を立式せよ．

II　以下の状況を考える．

(1)　d を大きくしていくと，$d \to \alpha d\,(1 < \alpha < 2)$ となったとき次の極大が観測された．λ，および m を，α，d を用いて表せ．

(2)　図 1 で λ を大きくしていく実験を行う．$\lambda = \lambda_1$ のとき極大を観測しており，$\lambda = \lambda_2$ で次の極大が観測された．m，および d を，λ_1，λ_2 を用いて表せ．

(3)　図 2 に示すように，A を $\varDelta d$ だけ O に近づけ，O と A との間に厚さ t の透明平行板（屈折率 n）を挿入した．

(a)　ℓ を整数として，観測される光の強度が極大となる条件を立式せよ．ただし，$t < d - \varDelta d$ とする．

(b)　図 2 で λ を大きくしていく実験を行う．$\lambda = \lambda_1$ のとき II(2) のときと同じく極大を観測しており，$\lambda = \lambda_2$ でも同じようにして次の極大が観測された．ℓ を m を用いて表せ．

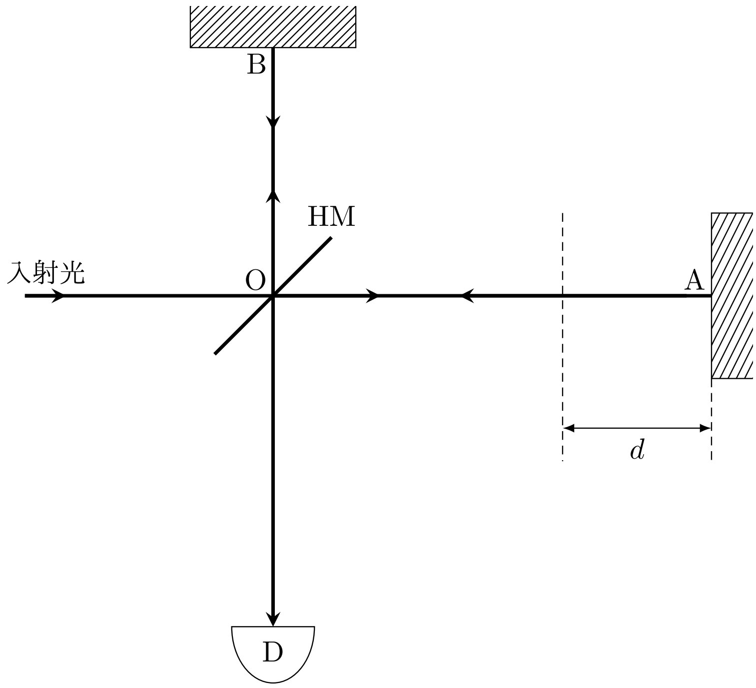


図 1

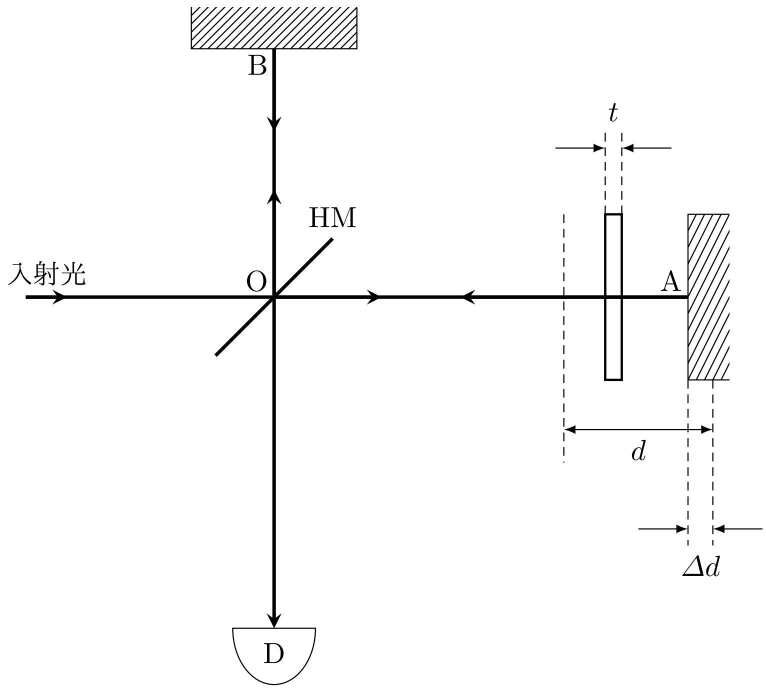


図 2

【解答】

I (1)　2 つの光は同位相である．強め合いの条件を考えて，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2d = 2m\pi\,, \qquad \therefore\ 2d = m\lambda\,.$$

II (1)　λ 一定の下で $d \to \alpha d$ としたとき，左辺が大きくなることから次の極大では $m \to m+1$ となる．よって，

$$\begin{cases} 2d = m\lambda\,, \\ 2\alpha d = (m+1)\lambda \end{cases} \qquad \therefore\ m = \frac{1}{\alpha - 1}\,, \quad \lambda = 2(\alpha-1)d\,.$$

(2)　d 一定の下で λ を大きくすると，左辺が一定なことから次の極大では $m \to m-1$ となる．よって，

$$\begin{cases} 2d = m\lambda_1\,, \\ 2d = (m-1)\lambda_2\,, \end{cases} \qquad \therefore\ m = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\,, \quad d = \frac{1}{2}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\,.$$

(3) (a)　強め合いの条件は，

$$\frac{2\pi}{\lambda_1/n}\cdot 2t + \frac{2\pi}{\lambda_1}\cdot 2(d - \varDelta d - t) = 2\ell\pi\,, \qquad \therefore\ 2\{(n-1)t + d - \varDelta d\} = \ell\lambda_1\,.$$

(b)　同様にして，

$$\begin{cases} 2\{(n-1)t + d - \varDelta d\} = \ell\lambda_1\,, \\ 2\{(n-1)t + d - \varDelta d\} = (\ell-1)\lambda_2\,, \end{cases} \qquad \therefore\ \ell = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = m\,.$$

9. 多重スリット干渉の一般論（難しい）

以下の文章を読み，$\boxed{}$ に適した式，または数値を解答せよ．

(1)　まず，2 つの波源 $\mathrm{S_1}$，$\mathrm{S_2}$ から点 P に届くの波の干渉を考える．$\mathrm{S_1}$ から P に届いた波の時刻 t における振動を $A\sin(\omega t)$ としたとき，$\mathrm{S_2}$ から P に届いた波の時刻 t における振動は $A\sin(\omega t-\delta)$ と表される．このとき，P で観測される合成波 Y の振動は，

$$Y(t)=A\sin(\omega t)+A\sin(\omega t-\delta)=2A\cos\left(\boxed{①}\right)\sin\left(\omega t-\boxed{①}\right)$$

と表され，$2A\left|\cos\left(\boxed{①}\right)\right|$ が P で観測される波の振幅を与える．光の観測強度 I は振幅の 2 乗に比例しその比例定数を k とすれば，$\delta=0$ での観測強度 I_0 は $I_0=\boxed{②}$ であり，位相差 δ となる位置 P での観測強度 I と I_0 の比は $\dfrac{I}{I_0}=\boxed{③}$ となる．ここで，観測強度が最大となる条件，すなわち強め合いの条件は $\delta=\boxed{④}$ となり，弱め合いの条件は $\delta=\boxed{⑤}$ となる．これを踏まえて $\dfrac{I}{I_0}$ を図示したものが図 1 である．なお，反射や初期位相による位相のずれがなく経路差のみによって位相差 δ が生じる場合，経路差 $\mathit{\Delta}\ell$，波長 λ を用いれば $\delta=\boxed{⑥}$ と書くことができる．

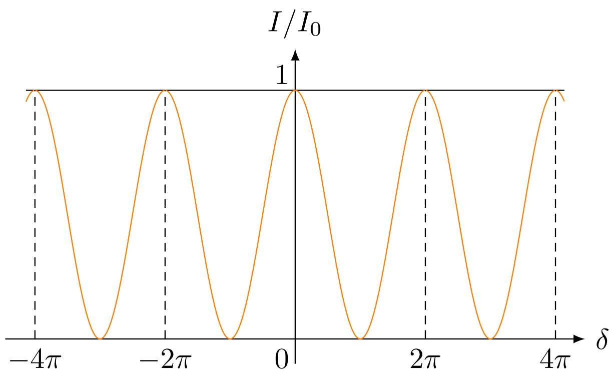


図 1　$N=2$ の場合

(2)　続いて，3 つの波源 S_1，S_2，S_3 から点 P に届くの波の干渉を考える．S_1 から P に届いた波の時刻 t における振動を $A\sin(\omega t)$ としたとき，S_2 から P に届いた波の時刻 t における振動は $A\sin(\omega t-\delta)$，S_3 から P に届いた波の時刻 t における振動は $A\sin(\omega t-2\delta)$ と表される．このとき，P で観測される合成波 Y の振動は，$\theta=\omega t-\delta$ とすると，

$$Y(t)=A\sin(\theta-\delta)+A\sin\theta+A\sin(\theta+\delta)$$

を計算すればよく，P で観測される振動の振幅を A，δ を用いて表せば $\boxed{⑦}$ となる．よって，$\delta=0$ での観測強度 I_0 は $I_0=\boxed{⑧}$ であり，位相差が δ の位置 P での観測強度 I と I_0 の比は $\dfrac{I}{I_0}=\boxed{⑨}$ となる．なお，$\dfrac{I}{I_0}$ を図示すると図 2 のようになる．

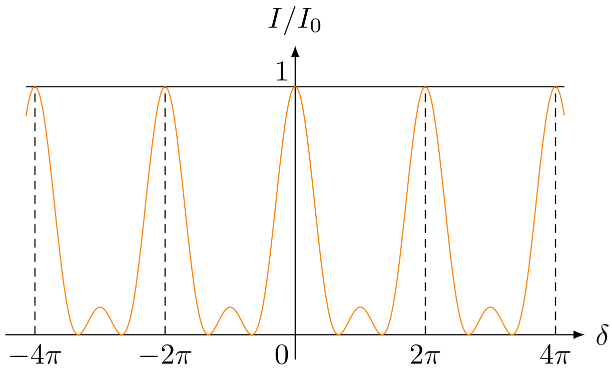


図 2　 $N=3$ の場合

(3)　最後に，N 個の波源 $S_k\ (k=1,2,\cdots,N)$ から点 P に届く波の干渉を考える．S_k から P に届いた波の時刻 t における振動は $A\sin\{\omega t-(k-1)\delta\}$ と表される．P で観測される合成波の振動 Y は，三角関数の恒等式

$$2\sin\{\omega t-(k-1)\delta\}\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)=-\cos\left\{\omega t-(k-1)\delta+\frac{\delta}{2}\right\}+\cos\left(\omega t-k\delta+\frac{\delta}{2}\right)$$

を用いると，

$$Y(t)=\boxed{⑩}\sin\left(\omega t-\frac{N-1}{2}\delta\right)$$

となる．さて，$\delta\to0$ における観測強度 I_0 は，極限の公式 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ を用いると $I_0=\boxed{⑪}$ と求まり，位置 P での観測強度 I と I_0 の比は $\dfrac{I}{I_0}=\boxed{⑫}$ となる．

以下では，回折格子のような N が 1 に比べて十分大きい場合を考える．

(a)　$\delta \neq 2m\pi$（m は整数）の場合を考える．このとき，$\sin\left(\dfrac{\delta}{2}\right) \neq 0$，$\sin\left(\dfrac{N}{2}\delta\right) \neq 0$ であり，$\left|\sin\left(\dfrac{N}{2}\delta\right)\right| \leq 1$ より，

$$\frac{I}{I_0} = \lim_{N\to\infty} \boxed{⑫} = \boxed{⑬}$$

となる．

(b)　$\delta = 2m\pi$ を考える．そのため $\delta = 2m\pi + \varepsilon$（$m$ は整数，ε は $|\varepsilon| \ll 1$ を満たす定数）の場合を考え，$\varepsilon \to 0$ と取る．このとき，$\sin\left(\dfrac{\delta}{2}\right) = \pm\sin\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right) \fallingdotseq \pm\dfrac{\varepsilon}{2}$，$\sin\left(\dfrac{N}{2}\delta\right) = \pm\sin\left(\dfrac{N\varepsilon}{2}\right)$ であり，最終的に $\varepsilon = 0$ を考えることから $\varepsilon \to 0$ の極限を考え，

$$\frac{I}{I_0} = \lim_{\varepsilon\to 0} \boxed{⑫} = \boxed{⑭}$$

となる．

以上を合わせると図 4 のようになり，N が十分大きい場合では鋭い明線が観測される（暗線は観測されない）ことがわかる．

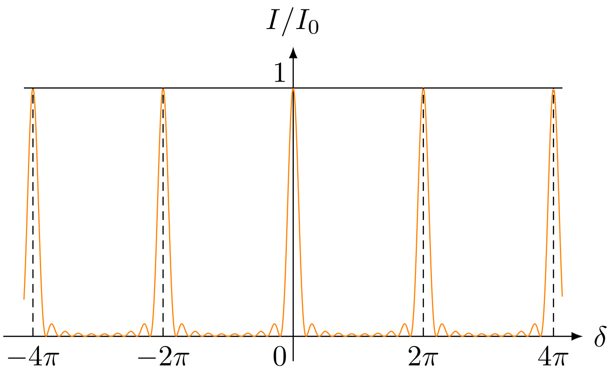


図 3　$N = 10$ の場合

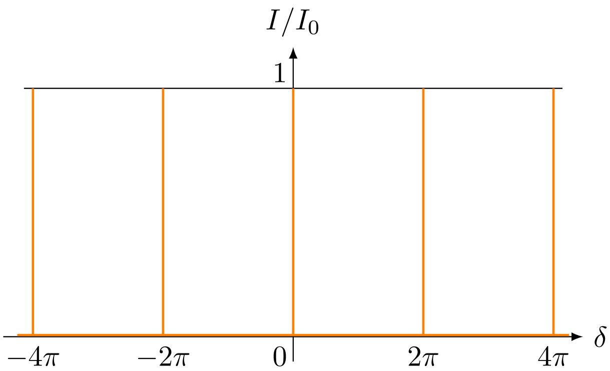


図 4　N が十分大きい場合

【解答】

① $\dfrac{\delta}{2}$　② $4kA^2$　③ $\cos^2\left(\dfrac{\delta}{2}\right)$　④ $2m\pi$　⑤ $(2m-1)\pi$　⑥ $\dfrac{2\pi}{\lambda}\Delta\ell$　⑦ $A(1+2\cos\delta)$

⑧ $9kA^2$　⑨ $\left(\dfrac{1+2\cos\delta}{3}\right)^2$　⑩ $A\dfrac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}$　⑪ kN^2A^2　⑪ $\left\{\dfrac{\sin(N\delta/2)}{N\sin(\delta/2)}\right\}^2$　⑬ 0

⑭ 1

(1)　波源が 2 つの場合，観測される振動は，

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= A\sin(\omega t) + A\sin(\omega t-\delta)\\
&= A\left\{\sin\left(\frac{\omega t+(\omega t-\delta)}{2}+\frac{\omega t-(\omega t+\delta)}{2}\right)\right.\\
&\quad\left.+\sin\left(\frac{\omega t+(\omega t-\delta)}{2}-\frac{\omega t-(\omega t+\delta)}{2}\right)\right\}\\
&= \underline{2A\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)}\sin\left(\omega t-\frac{\delta}{2}\right).
\end{aligned}
$$

すると，観測強度 I は，

$$I = k\left\{2A\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\right\}^2$$

と与えられ，$\delta=0$（同位相の 2 つの光の重ね合わせ）での観測強度 I_0 は，

$$I_0 = \underline{4kA^2}$$

となり，I の I_0 に対する比は，

$$\frac{I}{I_0} = \underline{\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

と求まる．

以上から，観測強度が最大となる条件は，

$$
\begin{aligned}
&\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 1\\
&\qquad\frac{\delta}{2} = m\pi\,, \qquad \therefore\ \delta = \underline{2m\pi}\,.
\end{aligned}
$$

弱め合いの条件は，

$$
\begin{aligned}
&\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 0\\
&\qquad\frac{\delta}{2} = \frac{2m-1}{2}\pi\,, \qquad \therefore\ \delta = \underline{(2m-1)\pi}\,.
\end{aligned}
$$

なお，経路差 $\Delta\ell$ による位相差 δ は，$\delta = \underline{\dfrac{2\pi}{\lambda}\Delta\ell}$ である．

(2)　波源が 3 つの場合，観測される振動は，

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= A\sin\underbrace{(\omega t)}_{\theta-\delta} + A\sin\underbrace{(\omega t-\delta)}_{\theta} + A\sin\underbrace{(\omega t-2\delta)}_{\theta+\delta} \\
&= 2A\sin\theta\cos\delta + A\sin\theta \\
&= \underline{A(1+2\cos\delta)}\sin(\omega t-\delta)\,.
\end{aligned}
$$

すると，観測強度 I は，

$$
I = k\{A(1+2\cos\delta)\}^2
$$

と与えられ，$\delta=0$ での観測強度 I_0 は，

$$
I_0 = \underline{9kA^2}
$$

となり，I の I_0 に対する比は，

$$
\frac{I}{I_0} = \underline{\left(\frac{1+2\cos\delta}{3}\right)^2}\,.
$$

(3)　波源が N 個の場合，観測される振動は，

$$
Y(t) = A\sin(\omega t) + A\sin(\omega t-\delta) + \cdots + A\sin\{\omega t-(N-1)\delta\}
$$

であり，三角関数の恒等式を用いるため一度両辺に $2\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)$ をかけて，

$$
\begin{aligned}
2\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)Y(t) &= -\cos\left(\omega t+\frac{\delta}{2}\right) + \cos\left(\omega t-\frac{\delta}{2}\right) \\
&\quad -\cos\left(\omega t-\frac{\delta}{2}\right) + \cos\left(\omega t-\frac{3}{2}\delta\right) \\
&\quad -\cdots \\
&\quad -\cos\left(\omega t-(N-1)\delta+\frac{\delta}{2}\right) + \cos\left(\omega t-N\delta+\frac{\delta}{2}\right) \\
&= -\cos\left(\omega t+\frac{\delta}{2}\right) + \cos\left(\omega t-N\delta+\frac{\delta}{2}\right) \\
&= 2A\sin\left(\frac{N}{2}\delta\right)\sin\left(\omega t-\frac{N-1}{2}\delta\right) \\
\therefore Y(t) &= \underline{A\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}}\sin\left(\omega t-\frac{N-1}{2}\delta\right)\,.
\end{aligned}
$$

すると，観測強度 I は，

$$
I = k\left\{A\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}\right\}^2
$$

と与えられ，$\delta \to 0$ での観測強度 I_0 は，

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \lim_{\delta \to 0} k \left\{ A \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \right\}^2 \\
&= \lim_{\delta \to 0} kA^2 \left\{ \frac{\sin(N\delta/2)}{N\delta/2} \right\}^2 \left\{ \frac{\delta/2}{\sin(\delta/2)} \right\}^2 \left(\frac{N\delta/2}{\delta/2} \right)^2 \\
&= \underset{\sim\sim\sim}{kN^2A^2}
\end{aligned}
$$

となり，I の I_0 に対する比は，

$$
\frac{I}{I_0} = \underset{\sim\sim\sim}{\left\{ \frac{\sin(N\delta/2)}{N\sin(\delta/2)} \right\}^2}.
$$

(a)　$\delta \neq 2m\pi$ のとき，$N \to \infty$ では，

$$
\frac{I}{I_0} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^2} \left\{ \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \right\}^2 = \underset{\sim}{0}.
$$

(b)　$\delta = 2m\pi + \varepsilon$ のとき，$\varepsilon \to 0$ では，

$$
\begin{aligned}
\frac{I}{I_0} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{\sin(N\delta/2)}{N\sin(\delta/2)} \right\}^2 \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{\sin(N\varepsilon/2)}{N\sin(\varepsilon/2)} \right\}^2 \\
&\fallingdotseq \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{\sin(N\varepsilon/2)}{N\varepsilon/2} \right\}^2 \\
&= \underset{\sim}{1}.
\end{aligned}
$$

【補足】単スリット干渉

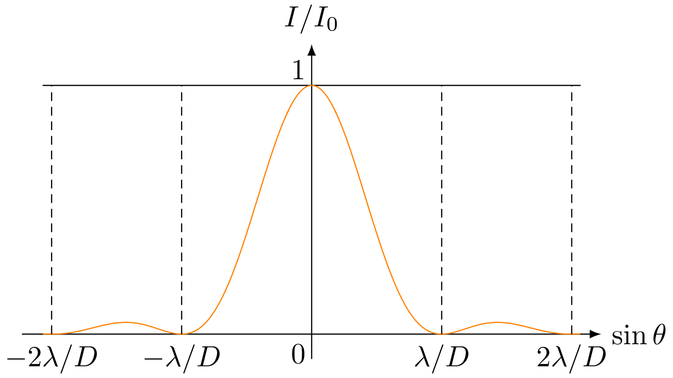
スリット間隔 D の単スリットを考える．この単スリットは，スリット間隔 D を N 等分した N スリットの $N\to\infty$ の極限と考えることができる．このとき，θ の方向に回折した光の観測強度の比 $\dfrac{I}{I_0}$ は，位相差が $\delta=\dfrac{2\pi}{\lambda}\dfrac{D}{N}\sin\theta$ となることから[*19]，

$$\begin{aligned}\frac{I}{I_0}&=\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{\sin(N\delta/2)}{N\sin(\delta/2)}\right\}^2\\&=\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{\sin(\pi D\sin\theta/\lambda)}{N\sin(\pi D\sin\theta/N\lambda)}\right\}^2\\&=\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{\sin(\pi D\sin\theta/\lambda)}{\pi D\sin\theta/\lambda}\frac{\pi D\sin\theta/N\lambda}{\sin(\pi D\sin\theta/N\lambda)}\right\}^2\\&=\left\{\frac{\sin(\pi D\sin\theta/\lambda)}{\pi D\sin\theta/\lambda}\right\}^2.\end{aligned}$$

よって，$I=0$ となる回折方向の $\sin\theta$ は，

$$\frac{\pi D\sin\theta}{\lambda}=m\pi\,,\qquad\therefore\sin\theta=\frac{\lambda}{D}m$$

と表される．$\dfrac{I}{I_0}$ を図示すれば以下のようになる．

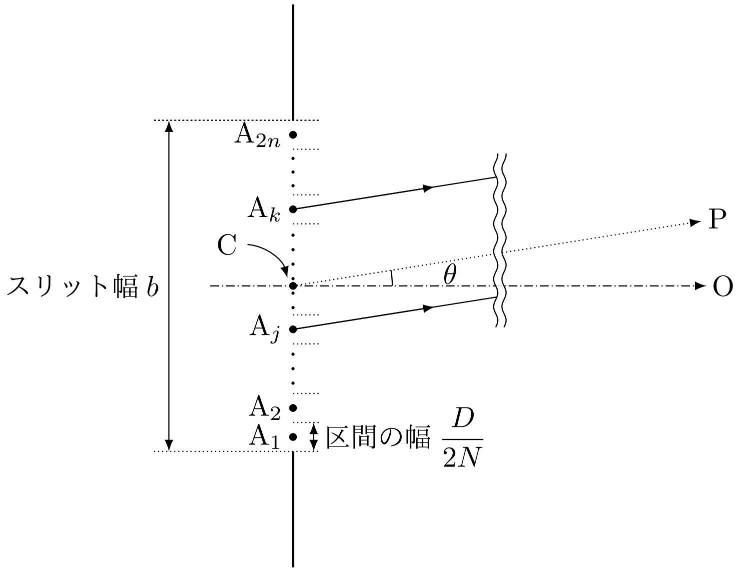


図から，およそ $|\sin\theta|<\dfrac{\lambda}{D}$ の方向に回折が起こることがわかる．よって，λ が大きいほど波はよく回折し，逆に D が大きいほど波の回折は起こりにくくなる．

なお，以下のような議論でも求めることができる．

スリット間隔 D を $2N$ 分割し（N は十分大きな自然数），各分割点を波源と見なし，その波源から波の重ね合わせを考える．

[*19] N スリットの結果に $d=\dfrac{D}{N}$ を代入すればよい．



$k\,(1 \leq k < N)$ 番目の波源と $N+k$ 番目の波源からの波の重ね合わせを考え，θ 方向の回折光の弱め合いの条件を考える．経路差が $\dfrac{D}{2N}\sin\theta$ となることから，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{D}{2N}\sin\theta = (2m-1)\pi\,, \qquad \therefore \sin\theta = N(2m-1)\frac{\lambda}{D}\,.$$

ここで，N は自然数，$2m-1$ は奇数であることから $N(2m-1)$ は整数を表し，これを新たに M とすれば，

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{D}M$$

となる．以上から，k 番目の波源と $N+k$ 番目の波源からの波は $\sin\theta = \dfrac{\lambda}{D}M$ の方向で弱め合うため，全ての波源からの波もまた同様に $\sin\theta = \dfrac{\lambda}{D}M$ の方向で弱め合うことが言える．

8
原子分野

第 8 部原子分野では，1900 年から 1940 年代の量子力学（前期量子論）や相対論に関するいくつかの題材を，テーマごとに扱う．すなわち，体系的な学習ではない．第 1 章では，電子に関する 2 つの実験，トムソンの実験とミリカンの実験を扱う．この 2 つの実験により，直接の測定が困難であった電子の質量を見積もることができた．第 2 章では，光の粒子性に関する内容として，光電効果とコンプトン散乱を扱う．授業では扱っていない光の圧力についてもここで触れる．第 3 章では，物質の波動性に関する内容として，電子波を扱い，電子波の干渉と電子波の屈折を扱う．電子波の干渉は粒子性から説明することはできないが，屈折に関しては，粒子性・波動性ともに説明される．第 4 章では，原子の構造について，水素原子についてボーアの 2 つの仮説を扱う．また，X 線の発生についてもここで扱う．第 5 章では，原子核の結合エネルギー・質量欠損，核反応，核崩壊，半減期の計算を扱う．質量欠損，核崩壊，半減期では新しい知識を覚える必要があり，核反応は複数物体系の力学の定石通りである．

総じて，新しく覚えることが多く分野間のつながりが薄いため，入試直前期にサラッと目を通したい分野である．

§8.1 電子に関する 2 つの実験

トムソンの実験では，電場・磁場中の荷電粒子の運動から比電荷 $\dfrac{e}{m}$ を測定する．トムソンの実験だけでは電子の質量，電荷それぞれは決まらない．電子の電荷 e（電荷の最小単位）はミリカンの実験によって推定され，トムソンの実験，ミリカンの実験それぞれの結果を合わせることで，到底直接測ることのできないような電子の質量を間接的に決定することができたわけである．

■簡単なまとめ

- トムソンの実験：比電荷 $\dfrac{e}{m}$ の決定
  →内容としては，ただの電場・磁場中の荷電粒子の力学．なお，磁場を含めないと（本当の意味で）比電荷は決定されない．
- ミリカンの実験：電荷の最小単位 e（電気素量）の決定
  →検出される電荷がある数（電気素量）の整数倍となっていることから，電気素量を見抜く．

1. トムソンの実験

図のような装置で，電子の質量と電荷の比である比電荷 $\dfrac{e}{m}$ を測定する．図の右側にはスクリーン S を配置し，スクリーンに沿って x 軸，y 軸を定める．スクリーン前方には y 軸負方向に電場（大きさ E）と磁場（磁束密度の大きさ B）をかけた長さ L_1 の領域（領域 L と呼ぶ）があり，この領域に速さ v で電子（質量 m，電荷 $-e\,(<0)$）を打ち込む．領域 L とスクリーンの間の距離を L_2 とする．領域 L に，電場，および磁場がないとき，電子はスクリーン S 上の原点 O に達するものとする．

I　領域 L に電場だけをかけた状態を考える．電子は領域 L を通過する間，電場によって y 軸方向に軌道を曲げられ，領域 L を通過した後，通過直後の進行方向に沿って直進する．

(1)　領域 L を通過中の電子の y 方向の加速度成分を求めよ．

(2)　領域 L を出る瞬間の電子の速度の y 成分を v_y とする．$\dfrac{v_y}{v} = \tan\theta$ としたとき，$\tan\theta$ を求めよ．

(3)　領域 L を出た瞬間の電子の y 座標 y_1 を求めよ．

(4)　スクリーン上で検出された電子の y 座標 y_2 を求めよ．

II　領域 L に磁場だけをかけた状態を考える．電子は領域 L を通過する間，磁場によって x 軸方向に軌道を曲げられ，領域 L を通過した後，通過直後の進行方向に沿って直進する．

(1)　領域 L を通過中の電子は円運動の一部の運動を行う．円運動の半径 r を求めよ．

(2)　領域 L を出る瞬間の電子の速度の x 成分を求めよ．

(3)　領域 L を出た瞬間の電子の x 座標 x_1 が以下の値となることを示せ．

$$x_1 = r - \sqrt{r^2 - {L_1}^2}$$

(4)　スクリーン上で検出された電子の x 座標 x_2 が以下の値を取ることを示せ．

$$x_2 = x_1 + \frac{L_1}{\sqrt{r^2 - {L_1}^2}} L_2$$

(5)　磁場の値を調整することで，$\dfrac{L_1}{r} \ll 1$ となる．x_2 を近似することで，以下のようになることを示せ．

$$x_2 \fallingdotseq \frac{eB{L_1}^2}{2mv}\left(1 + \frac{2L_2}{L_1}\right)$$

以上の結果を合わせることで，事前に決めた L_1，L_2，E，B と測定された y_2，x_2 より比電荷 $\dfrac{e}{m}$ を求めることができる．

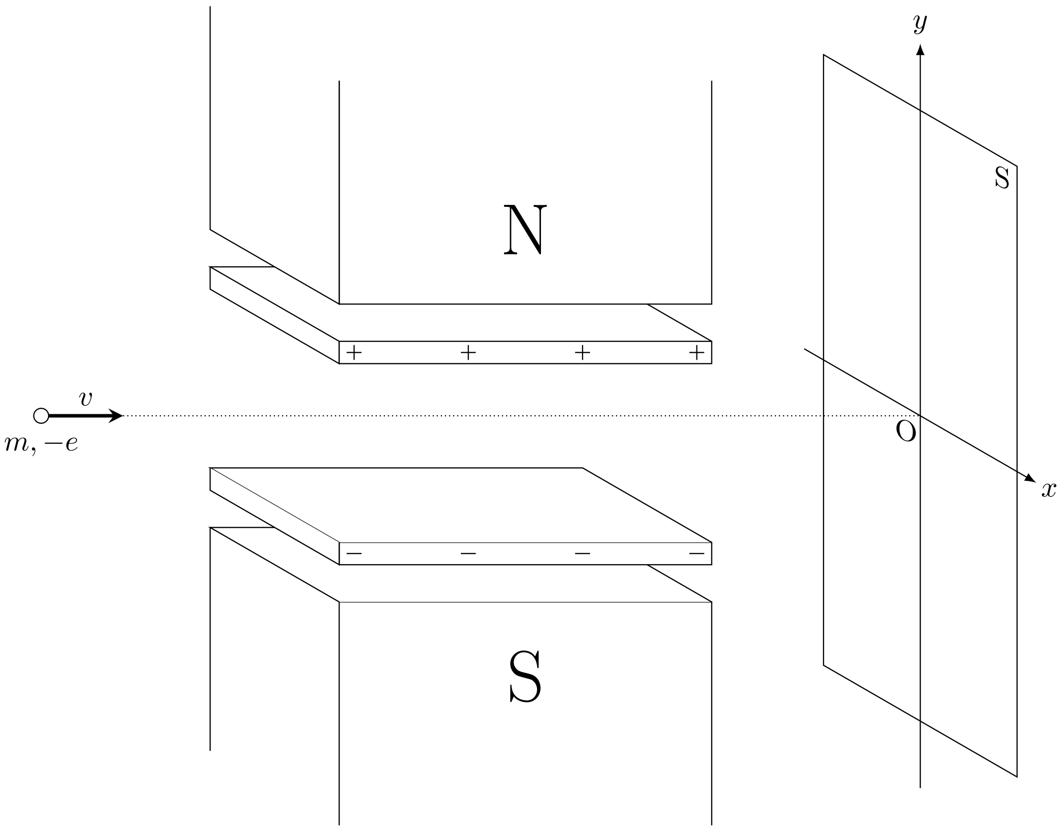


図 1

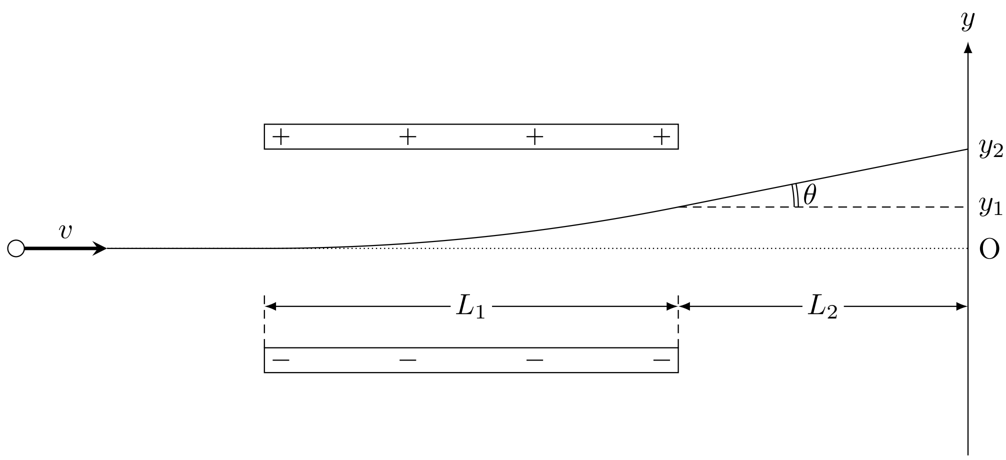


図 2

【解答】

I (1)　運動方程式より，

$$ma_y = eE\,, \qquad \therefore a_y = \frac{eE}{m}\,.$$

(2)　等加速度運動ゆえ，荷電粒子の速度の y 成分は，

$$v_y = \frac{eE}{m}t\,.$$

極板に平行な速度成分は v で一定なゆえ，領域 L を通過する時間は $\dfrac{L_1}{v}$ である．よって，

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v} = \frac{eEL_1}{mv^2}\,.$$

(3)　前問同様の計算をして，

$$y_1 = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2 = \frac{1}{2}\frac{eE{L_1}^2}{mv^2}\,.$$

(4)　領域 L とスクリーン S の間は等速直線運動ゆえ，

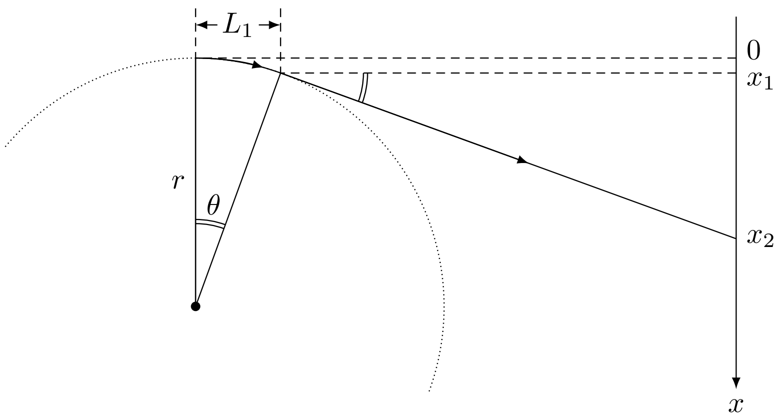
$$y_2 = y_1 + L_2\tan\theta = \frac{1}{2}\frac{eE{L_1}^2}{mv^2}\left(1+\frac{2L_2}{L_1}\right).$$

II (1)　運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{v^2}{r} = evB\,, \qquad \therefore r = \frac{mv}{eB}\,.$$

(2)　荷電粒子の軌跡は以下のようになっており，図のように角度 θ を定めたとき，領域 L を出る瞬間の荷電粒子の速度の x 成分は $v\sin\theta$，スクリーン S に向かう速度成分は $v\cos\theta$ である．x_1 は図より，

$$x_1 = r - r\cos\theta = r - \sqrt{r^2 - {L_1}^2}\,.$$



(3)　I(4) 同様に，

$$x_2 = x_1 + L_2 \tan\theta = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{x_1 + \frac{L_1}{\sqrt{r^2 - {L_1}^2}} L_2}\,.$$

(4)　前問の結果に近似を施して，

$$\begin{aligned}
x_2 &= r\left\{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{L_1}{r}\right)^2}\right\} + \frac{L_1/r}{\sqrt{1-(L_1/r)^2}} L_2 \\
&\fallingdotseq r\left\{1 - \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{L_1}{r}\right)^2\right)\right\} + \frac{L_1}{r}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{L_1}{r}\right)^2\right\} L_2 \\
&\fallingdotseq \frac{r}{2}\left(\frac{L_1}{r}\right)^2 + \frac{L_1}{r} L_2 \\
&= \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{eB{L_1}^2}{2mv}\left(1 + \frac{2L_2}{L_1}\right)}.
\end{aligned}$$

以上の結果から，

$$\frac{e}{m} = \frac{2E{x_2}^2}{B^2 L_1 (L_1 + 2L_2) y_2}$$

と比電荷を測定できる．なお，電子の速度は測定困難のため，電場だけ・磁場だけでは比電荷を測定することはできない．

2. ミリカンの実験

ミリカンは弟子のフレッチャーと図に示すような装置を用いて，電荷の基本単位を測定する次のような実験を行った．油を噴霧器から霧のように吹き出し空気中に油滴を作ると，油滴は表面量力のために球状になる．このような球状の油滴が落下し，装置下部の 2 枚の水平な極板（間隔 d）に挟まれた領域に入った後，X 線を照射され，正または負に帯電する．2 枚の極板には電位差 V が加えられ，極板間には電場が生じている．そして，帯電した油滴の運動から電気量を測定する仕組みとなっている．重力加速度の大きさを g とする．

I　まず，$V = 0$ とし，落下する油滴を観測した．油滴の半径を a，密度を ρ とする．油滴は，速度の大きさに比例した大きさ $6\pi\eta av$ の抵抗力が速度と逆向きに受け，この力によって油滴の速度はすぐさま一定値を取る．ここで，η は粘性係数と呼ばれる流体の流れにくさを表す定数である．油滴が等速で運動するようになった後の油滴の速さ v を求めよ．

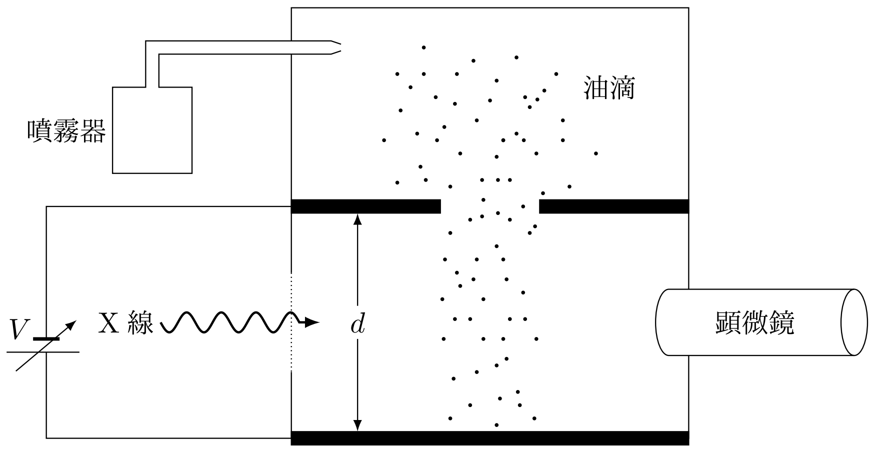
II　続いて，電位差 V を与え，注目していた油滴が静止するよう電位差を調節する．注目する油滴の電荷を q とする．

(1)　油滴が停止したときの電位差を V とする．電荷 q を，a，d，g，ρ，V を用いて表せ．

(2)　以上のようにして測定した電荷 q は，

$$-3.3 \times 10^{-19}\,\mathrm{C},\quad -8.1 \times 10^{-19}\,\mathrm{C},\quad -11.2 \times 10^{-19}\,\mathrm{C},\quad -6.4 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

であった．もし仮に電荷に基本単位（e とする）が存在する場合，測定された電荷 $|q|$ は，基本単位 e の整数倍となる．以上の数値を用い，e を有効数字 2 桁で推定せよ．



【解答】

I　油滴の質量は $m=\dfrac{4}{3}\pi a^3\rho$ ゆえ，運動方程式より，

$$m\cdot 0 = mg - 6\pi\eta a v\,,\qquad \therefore v = \underline{\frac{2}{9}\frac{\rho a^2}{\eta}}\,.$$

II (1)　運動方程式より，

$$m\cdot 0 = mg - q\frac{V}{d}\,,\qquad \therefore q = \underline{\frac{4\pi a^3 d\rho}{3V}}\,.$$

(2)　測定値の差を取ると，$-3.1\times10^{-19}\,\mathrm{C}$，$-1.7\times10^{-19}\,\mathrm{C}$，$-3.1\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ となり，

$$e = \underline{1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}}$$

と推定される．

§8.2 光の粒子性

第 2 章では，光の粒子性に関するテーマとして，主に光電効果とコンプトン散乱を扱う．コンプトン散乱は光子と電子の弾性衝突によって説明される．

■簡単なまとめ

光の振動数を μ，真空中の高速を c，プランク定数を h とする．このとき，光の波長 λ は $c = \mu\lambda$ の関係を満たす．

- 光子のエネルギー：

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

- 光子の運動量の大きさ：

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

1. 光の圧力

波長 λ の可視光の光を等方的に放射する点光源から距離 L 離れた位置に面積 $A\,(\ll L^2)$ の黒い板がある．点光源の消費電力を E とし，点光源の消費電力の全ては光に変換されるものとする．また，黒い板は光を完全に吸収するものとする．光速を c，プランク定数を h とする．

(1)　単位時間あたりに板が吸収する光子の数 N を求めよ．

(2)　黒い板が単位時間あたりに板が吸収するエネルギー J を求めよ．

(3)　単位時間に光子が板に及ぼす力積の大きさ I を求めよ．

(4)　黒い板が光から受ける圧力 P を求めよ．

【解答】

(1)　単位時間に放出される光子の数は $\dfrac{E}{hc/\lambda}$ ゆえ，単位面積あたり $\dfrac{E/h\nu}{4\pi L^2}$ の光子が放出される．よって，

$$N = \frac{AE\lambda}{4\pi L^2 hc}\,.$$

(2)　(1) より，

$$J = N\frac{hc}{\lambda} = \frac{AE\lambda}{4\pi L^2}\,.$$

(3)　運動量収支より，

$$I = Np = \frac{AE\lambda}{4\pi L^2 c}\,.$$

(4)　単位時間当たりの力積から力の時間平均 $\overline{f}$ は I と等しく，

$$P = \frac{\overline{f}}{A} = \frac{E}{4\pi L^2 c}\,.$$

2. 光電効果

図 1 はアインシュタインの光量子仮説を検証するための実験装置の模式図である．破線で囲まれた部分は真空に保たれていて，内部には同じ金属でできた平板上の電極 a と b が平行に置かれている．電極は十分に広く，その表面は清浄であるとする．電極には電源，すべり抵抗器，電圧計，電流計からなる回路が設置されている．高原は単色光を安定した強度で発生することができる．いま，電極 a の電位が 0 の状態で，その表面に単色光を照射したところ，電子が放出されて電流が流れた．

以下の問では電気素量を e，プランク定数を h，電極表面の仕事関数を W とする．電源と電流計の内部抵抗，銅線の抵抗，および電圧計を流れる電流は考慮する必要はない．電極に照射する光は十分に弱く，電子が電極間に滞留することはないとする．地磁気の影響は無視してよい．

(1)　電極 a に照射した単色光の振動数を ν とする．表面から放出される電子の運動エネルギーの最大値 T_{m} を表す式を記せ．

次に，電極 a にわずかに正の電位を与えたところ，電流は減少した．そこで，電位を少しずつ増加させてその都度電流を測定した結果，ある電位に達したところで電流が全く流れなくなった．その時の電極 a − b 間の電位差を阻止電圧という．以上の実験を，さまざまな振動数 ν を持つ単色光について行った．その結果得られた振動数 ν と阻止電圧 V_{s} の関係を図 2 に示す．

(1)　問 1 のエネルギー T_{m} と阻止電圧 V_{s} の関係を表す式を記せ．

(2)　図 2 と問 3 の結果を用いてプランク定数 h の値を有効数字 2 桁で求めよ．単位は $\mathrm{J \cdot s}$ とする．電気素量 $e = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ を用いてよい．

(3)　図 2 は，振動数が $4.7 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz}$ 以下の光を電極 a に照射しても電子は放出されないことを示している．電子が放出されない理由を簡潔に述べよ．

(4)　縦軸に測定される光電流 I，横軸に a に対する b の電位 V を取ったグラフの概形を図示せよ．また，以下の条件の下でグラフの概形がどのように変化するか述べよ．

(i)　光の振動数を保ちながら強度だけを大きくする．

(ii)　光の強度を保ちながら振動数だけを大きくする．

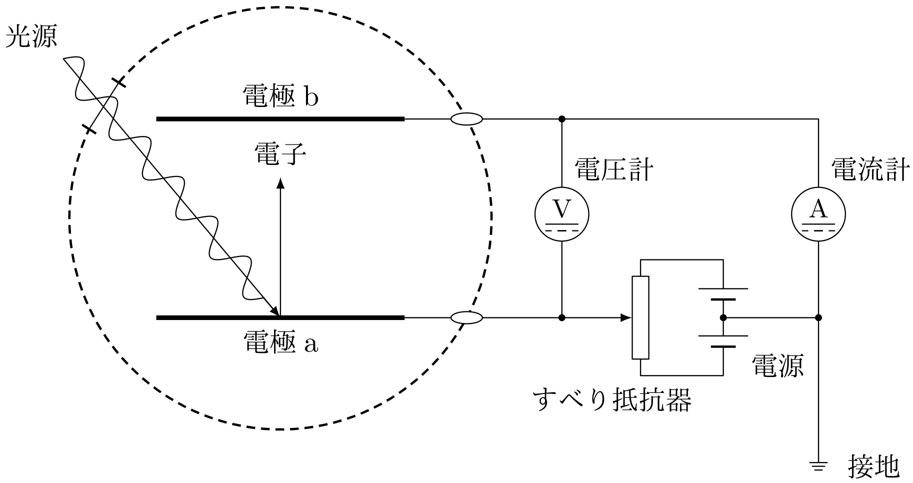

光源
電極 b
電子
電極 a
電圧計
V
電流計
A
電源
すべり抵抗器
接地

図 1

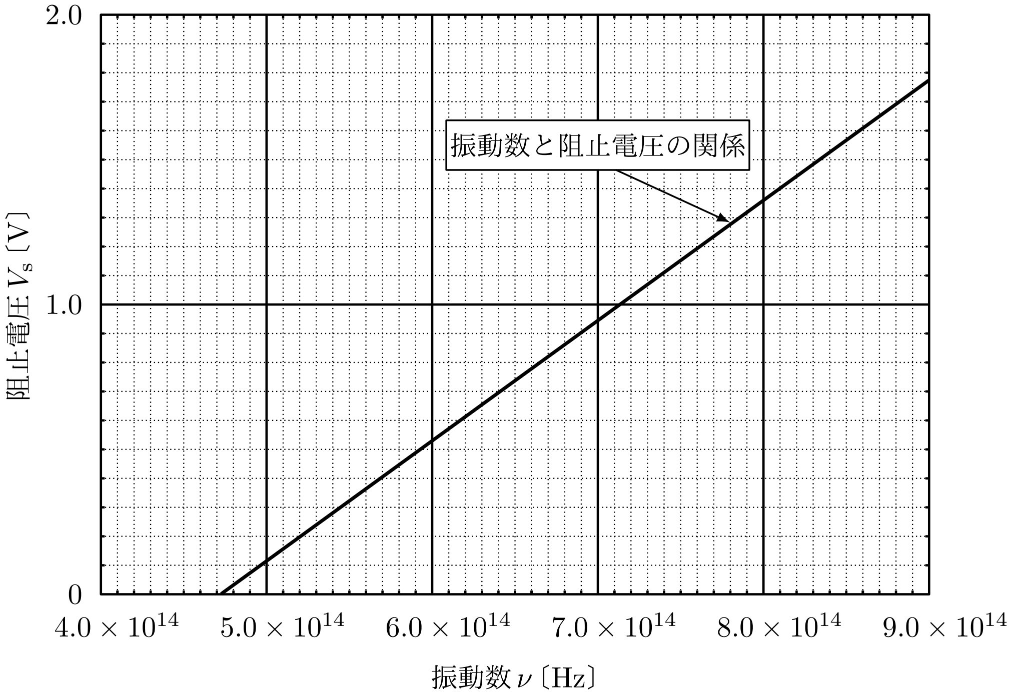

2.0
1.0
0
阻止電圧 V_s〔V〕
振動数と阻止電圧の関係
4.0×10^{14}
5.0×10^{14}
6.0×10^{14}
7.0×10^{14}
8.0×10^{14}
9.0×10^{14}
振動数 ν〔Hz〕

図 2

【メモ】

2017 年筑波大学より，一部設問を削除・追加を行った．

【解答】

(1)　エネルギー保存則より，

$$T_\mathrm{m} = \underset{\sim\sim\sim}{h\nu - W}\,.$$

(2)　力学的エネルギー保存則より，

$$0 + (-e)\cdot 0 = T_\mathrm{m} + (-e)V_\mathrm{s}\,, \qquad \therefore\ \underset{\sim\sim\sim}{T_\mathrm{m} = eV_\mathrm{s}}\,.$$

(3)　問 1，問 2 より，

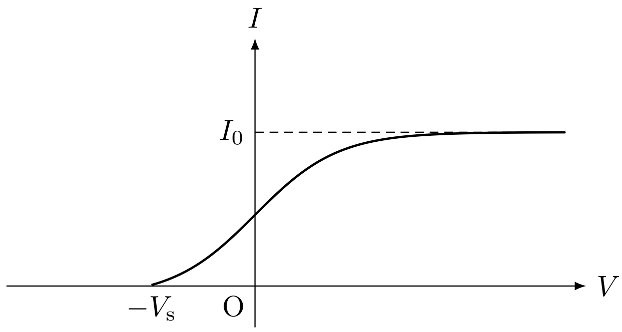
$$V_\mathrm{s} = \frac{h}{e}\nu - \frac{W}{e}\,.$$

グラフより，傾きを読んで[*1]，

$$h = \frac{0.90 - 0.20\,\mathrm{J\cdot C^{-1}}}{(6.9-5.2)\times 10^{14}\,\mathrm{s^{-1}}}\cdot 1.6\times 10^{-19}\,\mathrm{C} = 6.588...\times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s} \fallingdotseq \underset{\sim\sim\sim}{6.6\times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}\,.$$

(4)　光子の持つのエネルギーが仕事関数より小さいため．

(5)　 a に対する b の電位を小さくしていくと，ある電位差のとき光電子のうち最大の運動エネルギー T_m を持つ電子でも極板 b へ到達しなくなる．このときの電位差を阻止電圧と呼んでいる．一方，a に対する b の電位を大きくしていくと，光電子のうち運動エネルギーが 0 のものでも極板 b へ達するようになる．以上より，グラフは以下のようになる．



(i)　光子のエネルギーは同じままフォトンの数が増えるので V_s は一定のまま，I_0 が大きくなる．

(ii)　強度が保たれていることから光電子の数は変化しないので I_0 は一定のまま，光子のエネルギーが大きくなるため V_s が左へずれる．

[*1] グラフを延長し縦軸の切片を読むことで W が求まる．

3. コンプトン散乱

物質に X 線をあてると，散乱されて出てくる X 線の中には入射 X 線の波長と比べて長い波長の成分をもつものが観測される．この現象をコンプトン効果という．これは X 線（光）を波としてではなく，粒子（光子）と考え，この粒子と電子の弾性衝突によるものとして説明できる．

図のように $x-y$ 平面の原点に静止している質量 m の電子に波長 λ の X 線があたった．入射 X 線の方向を x 軸，これに垂直な方向を y 軸とすると，入射 X 線は x 軸に対して角度 θ の方向へ散乱された．このとき，散乱 X 線の波長は λ' であった．同時に，電子は一定の速さ v で，x 軸に対して角度 ϕ の方向にはね飛ばされた．

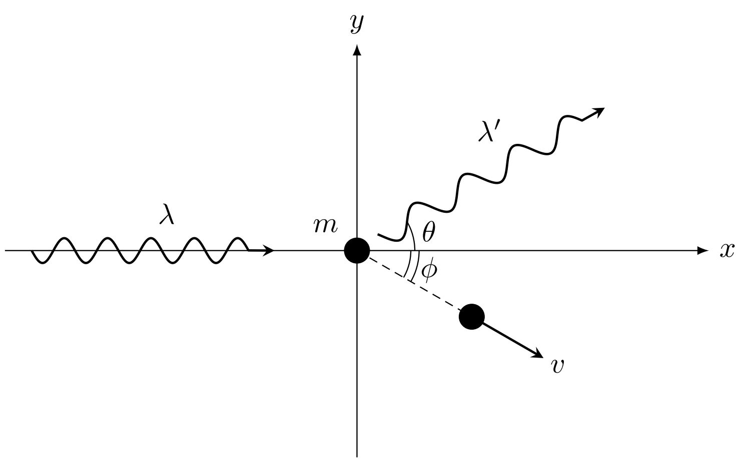
(1)　電子と光子からなる系の x 方向，および y 方向の運動量保存則をそれぞれ立式せよ．

(2)　電子と光子からなる系のエネルギー保存則を立式せよ．

(3)　波長の変化量を $\mathit{\Delta}\lambda=\lambda'-\lambda$ とする．$\mathit{\Delta}\lambda \ll \lambda$ のとき，次の近似式が成り立つことを示せ．

$$\frac{\lambda'}{\lambda}+\frac{\lambda}{\lambda'} \fallingdotseq 2$$

(4)　運動量保存則，エネルギー保存則から角度 ϕ を消去し，上記の近似式を用いることで $\mathit{\Delta}\lambda$ を求めよ．



【メモ】

2001 年山口大学より，問題のリード文を引用（一部変更）．

【解答】

(1)　運動量保存則は，

$$\begin{cases} x : mv\cos\phi + \dfrac{h}{\lambda'}\cos\theta = \dfrac{h}{\lambda}\,, \\ y : m(-v\sin\phi) + \dfrac{h}{\lambda'}\sin\theta = 0\,. \end{cases}$$

(2)　エネルギー保存則は，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda}\,.$$

(3)　示す式の左辺より，

$$\frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda'} = \left(1 + \frac{\mathit{\Delta}\lambda}{\lambda}\right) + \left(1 + \frac{\mathit{\Delta}\lambda}{\lambda}\right)^{-1} \fallingdotseq 1 + \frac{\mathit{\Delta}\lambda}{\lambda} + 1 - \frac{\mathit{\Delta}\lambda}{\lambda} = 2\,.$$

(4)　運動量保存則より，

$$(mv)^2 = h^2\left(\frac{1}{\lambda'^2} + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda\lambda'}\cos\theta\right)\,.$$

ここでエネルギー保存則より $mv^2 = 2hc\left(\dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda'}\right)$ ゆえ，

$$\begin{aligned} hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) &= \frac{h^2}{2m}\left(\frac{1}{\lambda'^2} + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda\lambda'}\cos\theta\right) \\ hc\mathit{\Delta}\lambda &= \frac{h^2}{2m}\left(\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{2}{\cos}\theta\right) \\ \therefore \mathit{\Delta}\lambda &\fallingdotseq \frac{h}{mc}\left(1 - \cos\theta\right)\,. \end{aligned}$$

§8.3 物質の波動性

第 3 章では，物質の波動性に関するテーマとしてブラッグの干渉条件を扱う．問題にも入れたが，屈折は粒子・波どちらでも説明されるが，回折・干渉は粒子としては説明されない．

■簡単なまとめ

質量 m，速さ v で運動する粒子のド・ブロイ波長

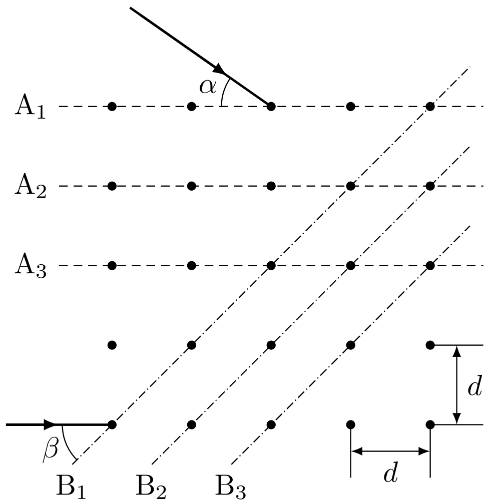
$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

1. ブラッグ反射

結晶に X 線（電磁波）を入射すると，結晶中の原子によって散乱（解説）された X 線が干渉することによって干渉縞が生じる[*2]．強めあいの方向は，各格子面で反射される X 線が互いに同位相であるような方向となる．X 線の波長を λ，結晶の格子間隔を d とし，自然数として n を用いよ．

(1)　図の結晶面 A_1，A_2，$\cdots$ による回折現象を考える．X 線を格子面となす角 α で入射させたとき，強めあいが観測されるために α の満たす条件式を求めよ．

(2)　図の結晶面 B_1，B_2，$\cdots$ による回折現象を考える．X 線を格子面となす角 β で入射させたとき，強めあいが観測されるために α の満たす条件式を求めよ．



【解答】

(1)　隣り合う格子面で反射される X 線の経路差は $2d\sin\alpha$ であるから，強めあう条件は，

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{2d\sin\alpha = n\lambda}\,.$$

(2)　格子間隔を $d \to \dfrac{1}{\sqrt{2}}d$ として，

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{2}\,d\sin\beta = n\lambda}\,.$$

[*2] X 線の代わりに電子波としても同様の現象が生じる．

2. 電子波の屈折

結晶に電子波を入射したときの屈折現象を，粒子と波それぞれで扱い，考察を行う．はじめ，静止した電子（質量 m，電荷 $-e$）を電圧 V で加速させ，結晶面に入射角 θ_1 で入射させた．すると，入射後の電子は結晶面の法線とのなす角 θ_2 の方向へ屈折された．なお，この間電子の持つ運動エネルギーと位置エネルギーの和は保存するものとする．真空の電位を 0，結晶の電位を V_0，プランク定数を h とする．

I　始めに，電子を粒子として考える．

(1)　入射電子の運動量の大きさ p_1 を，e，m，V を用いて表せ．

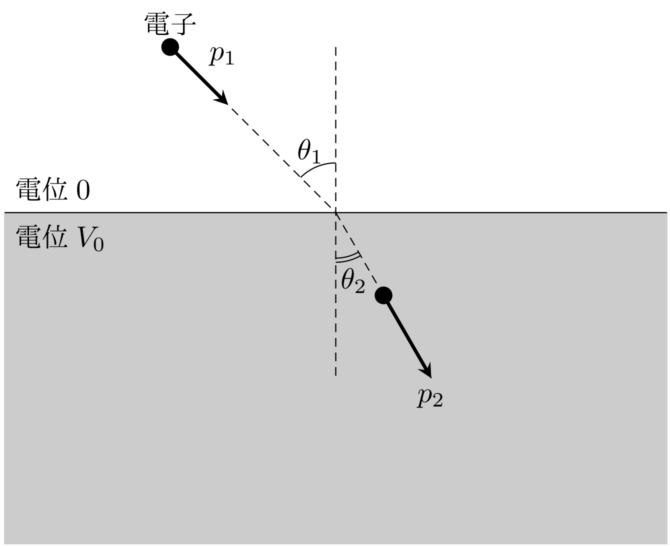
(2)　屈折された電子の運動量の大きさ p_2 を，e，m，V，V_0 を用いて表せ．

(3)　結晶面と平行な方向には力積を受けないことから，結晶の屈折率 n を，V，V_0 を用いて表せ．

II　続いて，電子を波として考える．

(1)　真空中での電子波の波長 λ_1 を，e，m，h，V を用いて表せ．

(2)　屈折の法則から，結晶の屈折率 n を，V，V_0 を用いて表せ．



【メモ】

以下のように，屈折は粒子・波いずれの場合も同じ結論を得るが，干渉に関しては波として扱わないと説明ができない．

【解答】

I (1)　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{{p_1}^2}{2m} = eV\,, \qquad \therefore p_1 = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{2meV}}\,.$$

(2)　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{{p_2}^2}{2m} + (-e)V_0 = \frac{{p_1}^2}{2m} = eV\,, \qquad \therefore p_2 = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{2me(V+V_0)}}\,.$$

(3)　結晶面と平行な方向の運動量の成分が一定なことより，

$$p_2 \sin\theta_2 = p_1 \sin\theta_1\,, \qquad \therefore n = \frac{p_2}{p_1} = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{1+\frac{V_0}{V}}}\,.$$

II (1)　物質波の波長は公式より，

$$\lambda_1 = \frac{h}{p_1} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{h}{\sqrt{2meV}}}\,.$$

(2)　屈折の法則より，

$$n\sin\theta_2 = 1\cdot\sin\theta_1\,, \qquad \therefore n = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{p_2}{p_1} = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{1+\frac{V_0}{V}}}\,.$$

§8.4 原子の構造

第 4 章では，水素原子のボーアモデル（量子条件），水素原子のスペクトル（振動数条件），X 線の発生を扱う．X 線の発生は，固有 X 線と連続 X 線の発生の仕組みの違いを押さえる．

■簡単なまとめ

プランク定数を h，n，m を自然数とする．

- ボーアの仮説①：量子条件

  以下の量子条件を満たすとき，原子は安定に存在する．

  $$2\pi r = n\frac{h}{mv}$$

  r は軌道半径，m は電子の質量，v は速さ，n は自然数である．

- ボーアの仮説②：振動数条件

  電子が異なる軌道間を遷移するとき，そのエネルギー準位の差に等しいエネルギーを持つ光子 1 個をやり取りする．

  $$E_n - E_m = h\nu$$

  E_n はエネルギー準位．

- X 線の発生：

  →連続 X 線は，電子が陽極に衝突する際に，電子の運動エネルギーの一部が光子のエネルギーとなることで生じる．そのため，放出される光子のエネルギーは，入射電子の運動エネルギーを超えない．

  →特性 X 線は，物質中に入射した高速の電子が，原子の内側の軌道の電子を弾き飛ばし，そのときに空いた軌道へ外側の軌道の電子が遷移する際にエネルギー準位の差に等しいエネルギーを持った光子が放出されることで生じる．

1. 水素原子のボーアモデル

水素原子を，静止した陽子（電荷 $+e$）を中心として電子（質量 m，電荷 $-e$）が円運動しているというモデルで考える．クーロンの比例定数を k，プランク定数を h とする．

(1)　電子の軌道半径を r，速さを v とする．電子の運動方程式の中心方向成分を立式せよ．

(2)　水素原子のエネルギー E は電子の運動エネルギーとクーロン力の位置エネルギーの和で与えられる．E を，k，e，r を用いて表せ．ただし，クーロン力の位置エネルギーの基準は無限遠にとる．

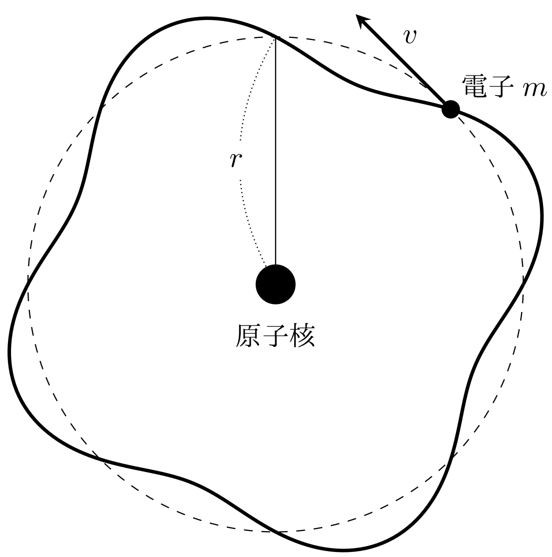
荷電粒子が加速運動をするとき，電磁波の形でエネルギーを放出することが知られている．このモデルでは，電子が中心方向に加速度を持っていることから，エネルギーを電磁波の形で失っていき，円運動の半径は小さくなっていくことになる．これでは，水素原子が安定に存在していることを説明できない．そこで，ボーアは電子が水素原子核を中心とする半径 r の円軌道を一定速さ v で運動しているとき，

$$mv \times 2\pi r = nh$$

が満たされると，原子は定常状態となり，電磁波を放出しないと仮定した．これを，ボーアの量子条件と呼び，自然数 n を量子数と呼ぶ．この式は，電子の持つ波動性を考えることで，図のように電子波が半径 r の円周上で n 個の波を持つ定常波を作る条件であると解釈できる（図は $n = 4$ の場合）．

(1)　n で指定される状態の軌道半径 r_n は，$r_n = an^2$ と書ける．a を e，h，k，m を用いて表せ．

(2)　n で指定される状態の電子のエネルギー E_n は，$E_n = -\dfrac{b}{n^2}$ と書ける．b を a，e，k を用いて表せ．



【解答】

(1)　運動方程式（中心成分）は，

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{m\frac{v^2}{r} = k\frac{e^2}{r^2}}\,.$$

(2)　運動方程式から v^2 を代入して，

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + k\frac{e\cdot(-e)}{r} = -\frac{ke^2}{2r}\,.$$

(3)　量子条件より，

$$v = \frac{nh}{2\pi m r_n}\,.$$

これを運動方程式の中心方向成分に代入して，

$$r_n = \frac{h^2}{4\pi^2 e^2 km}n^2\,, \qquad \therefore a = \frac{h^2}{4\pi^2 e^2 km}\,.$$

(4)　r_n の結果を用いて[*3]，

$$E_n = -\frac{ke^2}{2r} = -\frac{ke^2}{2a}\frac{1}{n^2}\,, \qquad \therefore b = -\frac{ke^2}{2a}\,.$$

[*3] ここに定数の値を代入すると，

$b \fallingdotseq 13.6\,\mathrm{eV}$

となる．これは水素原子のイオン化エネルギーに対応する．

2. 水素原子のスペクトル

水素原子のエネルギー準位 E_n は，量子数を n，$I = 13.6\,\mathrm{eV}$ として次のように表せる．

$$E_n = -\frac{I}{n^2}\,.$$

ボーアは，電子が異なる軌道の間を遷移する際，エネルギー準位の差に等しいエネルギーを持つ 1 個の光子がやりとりされると仮定した．真空中の光速を c とする．

(1)　振動数条件から，水素原子の出す光の波長 λ は，n，n' $(n' < n)$ を自然数として，

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

を満たす．リュードベリ定数 R を，I，h，c を用いて表せ．

(2)　$n = 3$ の状態から $n = 2$ の状態へ遷移する際に放出される光の波長 λ を，R を用いて表せ．

(3)　$n = 3$ の状態から $n = 1$ の状態へ遷移する際に放出される光の波長 $\mathit{\Lambda}$ は，λ の何倍か[*4]．

【解答】

(1)　振動数条件より，

$$\frac{hc}{\lambda} = E_n - E_{n'}$$
$$\frac{1}{\lambda} = \frac{I}{hc}\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)\,, \qquad \therefore R = \frac{I}{hc}\,.$$

(2)　上記の結果を用いて，

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{36}R\,, \qquad \therefore \lambda = \frac{36}{5R}\,.$$

(3)　同様に計算して，

$$\frac{1}{\mathit{\Lambda}} = R\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{9}R\,, \qquad \therefore \frac{\mathit{\Lambda}}{\lambda} = \frac{5}{32}\,.$$

[*4] $\mathit{\Lambda}$ は λ の大文字．

3.X 線の発生

図 1 に示すように，X 線発生管内で陰極から飛び出した熱電子（質量 m，電荷 $-e$，初速無視）を，加速電圧 V で加速して陽極に衝突させると，図 2 のスペクトルを持つ X 線が発生した．この X 線は，λ_{min} を最短波長として長波長側に分布する連続 X 線と，λ_1 および λ_2 $(\lambda_1 < \lambda_2)$ の特性 X 線（固有 X 線）からなる．プランク定数を h，真空中の光速を c とする．X 線発生管内は真空とする．

(1)　陽極に衝突する直前の電子の速さ v を，e，m，V を用いて表せ．

(2)　最短波長 λ_{min} を，h，c，e，V を用いて表せ．

(3)　加速電圧 V をさらに大きくするとき，最短波長はどうなるか．また，特性 X 線の波長はどうなるか．

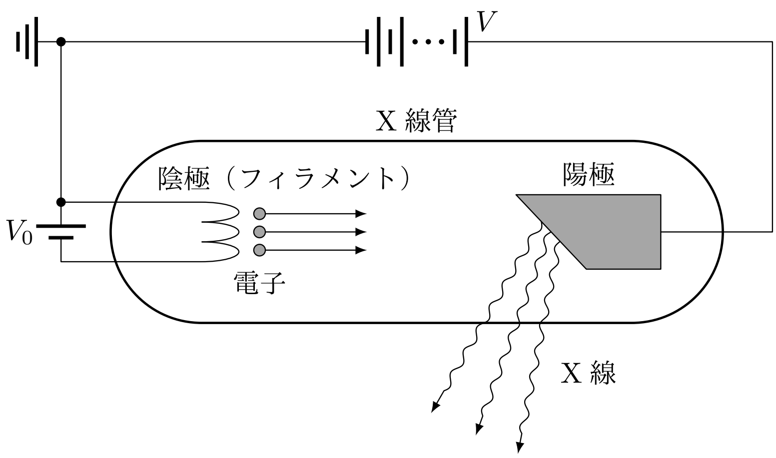


図 1

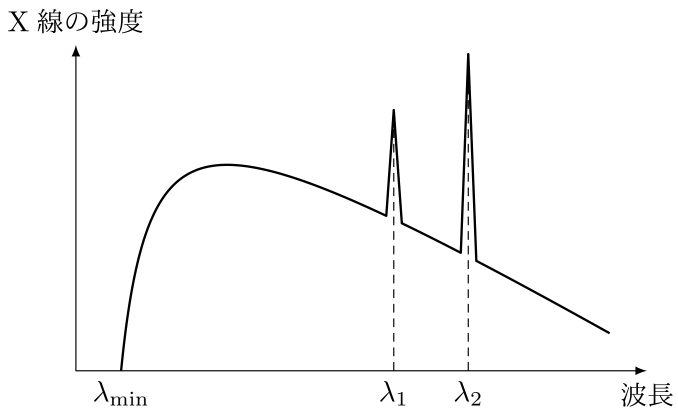


図 2

【メモ】

・連続 X 線は，電子が陽極に衝突する際に，電子の運動エネルギーの一部が光子のエネルギーとなることで生じる．そのため，放出される光子のエネルギーは，入射電子の運動エネルギーを超えない．

・特性 X 線は，物質中に入射した高速の電子が，原子の内側の軌道の電子を弾き飛ばし，そのときに空いた軌道へ外側の軌道の電子が遷移する際にエネルギー準位の差に等しいエネルギーを持った光子が放出されることで生じる．

【解答】

(1)　力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + (-e)V = 0 + 0\,, \qquad \therefore v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}\,.$$

(2)　放出される光子のエネルギーは，入射電子の運動エネルギーを超えないので，

$$\frac{hc}{\lambda} < eV\,, \qquad \therefore \lambda > \frac{hc}{eV}\,.$$

よって，

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eV}\,.$$

(3)　V を大きくすると，$\lambda_{\min}$ は小さくなる．一方，特性 X 線の波長は物質固有の値であるため変わらない．

§8.5 原子核

第 5 章では，質量欠損・結合エネルギー，原子核の核反応，核分裂，原子核崩壊，半減期の計算を扱う．核反応は複数物体系の力学だが，それ以外は新しく知識を覚える必要がある．

■**簡単なまとめ**

真空中の光速を c とする．

- 質量 m_{p} の陽子，質量 m_{n} の中性子からなる原子核 M をばらばらにする際に要するエネルギーを**結合エネルギー**と呼び，

$$B = \varDelta Mc^2 = (m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{n}} - M)c^2$$

と与えられる．このときの $\varDelta M$ を**質量欠損**と呼ぶ．

- 粒子のエネルギー：

運動量 p，質量 m の粒子のエネルギー E は，以下のように与えられる．

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + (cp)^2} = \begin{cases} cp & (m = 0)\,, \\ mc^2 + \dfrac{p^2}{2m} & (m \neq 0\,, p \ll mc) \end{cases}$$

このとき，第 1 項を静止エネルギーと呼ぶ．

- 核反応の反応熱：

核反応で生じる反応熱 Q は，反応前後の質量の変化量 $\varDelta m$ を用いて，

$$Q = -\varDelta mc^2 = \varDelta K$$

となる．なお，これは観測される粒子の運動エネルギーの総和の変化量に等しい．

- 原子核崩壊：次の知識を暗記する．

$$\begin{cases} \alpha\text{崩壊} & \rightarrow & \text{He 原子核を放出（質量数が 4 減少，原子番号が 2 減少）} \\ \beta\text{崩壊} & \rightarrow & \text{高速の電子を放出（質量数は不変，原子番号が 2 増加）} \end{cases}$$

なお，γ 崩壊は，高エネルギー状態にある原子が γ 線（高エネルギーの光）を放出する過程であり，質量数，原子番号は不変のままである．

- 半減期：定義を押さえる．

1. 質量欠損・結合エネルギー

次の原子核について，質量欠損 ΔM，および結合エネルギー B をそれぞれ有効数字 3 桁で求めよ．なお，陽子の質量を $m_{\mathrm{p}} = 1.0073\,\mathrm{u}$，中性子の質量を $m_{\mathrm{n}} = 1.0087\,\mathrm{u}$ とし，$1\,\mathrm{u} \times c^2 = 931\,\mathrm{MeV}$ としてよい．

(1)　${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ 原子核，$M = 4.0026\,\mathrm{u}$

(2)　${}^{9}_{4}\mathrm{Be}$ 原子核，$M = 9.0122\,\mathrm{u}$

【解答】

(1)　質量欠損は，

$$\Delta M = (2 \times 1.0073 + 2 \times 1.0087 - 4.0026)\,\mathrm{u} = \underline{0.0294\,\mathrm{u}}\,.$$

よって，結合エネルギーは，

$$B = \Delta M c^2 = 0.0294 \times 931\,\mathrm{MeV} = \underline{27.4\,\mathrm{MeV}}\,.$$

(2)　質量欠損は，

$$\Delta M = (4 \times 1.0073 + 5 \times 1.0087 - 4.0026)\,\mathrm{u} = \underline{0.0605\,\mathrm{u}}\,.$$

よって，結合エネルギーは，

$$B = \Delta M c^2 = 0.0605 \times 931\,\mathrm{MeV} = \underline{56.3\,\mathrm{MeV}}\,.$$

2. 原子核反応①

2 つの重水素（${}^{2}_{1}\mathrm{H}$）が融合し，ある原子の原子核と中性子を生じる以下の核反応について考える．

$$ {}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow \boxed{} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} $$

(1)　生じる原子核を記せ．

(2)　重水素の質量を m_{D}，生じた原子核の質量を m，中性子の質量を m_{n}，この核反応で放出されるエネルギーを Q とする．反応前 2 つの重水素が，同じ速さ v で互いに逆向きに運動していた場合，反応後の中性子の運動エネルギー K_n，生じた原子核の運動エネルギー K を求めよ．

(3)　重水素の原子核の質量を $m_{\mathrm{H}} = 2.0141\,\mathrm{u}$，生じた原子核の質量を $m = 3.0160\,\mathrm{u}$，中性子の質量を $m_{\mathrm{n}} = 1.0087\,\mathrm{u}$ とする．Q を有効数字 2 桁で求めよ．ただい，$1\,\mathrm{u} \times c^2 = 931\,\mathrm{MeV}$ とせよ．

【解答】

(1)　${}^{3}_{2}\mathrm{He}$.

(2)　運動量保存則・エネルギー保存則より[*5]，

$$ \begin{cases} \sqrt{2m_{\mathrm{n}}K_{\mathrm{n}}} - \sqrt{2mK} = m_{\mathrm{D}}v + m_{\mathrm{D}}(-v)\,, \\ K + K_{\mathrm{n}} - Q = \dfrac{1}{2}m_{\mathrm{D}}v^2 \times 2\,, \end{cases} $$

$$ \therefore K_{\mathrm{n}} = \frac{m}{m_{\mathrm{n}} + m}(m_{\mathrm{D}}v^2 + Q)\,, \quad K = \frac{m_{\mathrm{n}}}{m_{\mathrm{n}} + m}(m_{\mathrm{D}}v^2 + Q)\,. $$

(3)　数値を代入して，

$$ Q = \{2.0141 - (3.0160 + 1.0087)\} \times 931\,\mathrm{MeV} \fallingdotseq 3.3\,\mathrm{MeV}\,. $$

*5 静止エネルギーを考え，左辺にまとめれば，

$$ K + K_{\mathrm{n}} - \underbrace{(m_{\mathrm{D}} \times 2 - m - m_{\mathrm{n}})c^2}_{\text{反応熱 } Q} = \frac{1}{2}m_{\mathrm{D}}v^2 \times 2\,. $$

3. 原子核反応②（入試問題）

2 つの重陽子 ($^2_1$H) が衝突して融合し，ヘリウム原子核 ($^4_2$He) と光子 (γ) が発生する核反応

$$^2_1\mathrm{H} + ^2_1\mathrm{H} \longrightarrow ^4_2\mathrm{He} + \gamma$$

について考える．2 個の重陽子が，その間に働く静電気力に逆らって，核力が働く距離 R まで近づいたとき核反応が起こるとする．重陽子を点粒子と考える．重陽子間に働く静電気力による位置エネルギーは重陽子間の距離の逆数に比例する．この比例定数を K とする．重陽子の質量を m，ヘリウム原子核の質量を M，光の速さを c とする．文中の $\boxed{\quad}$ に適当な数式を入れよ．

(1)　2 つの重陽子が，互いに十分離れた位置で逆向きの等しい速さ v_0 を持ち，近づいて正面衝突する場合，この核反応が起こるために必要な最低の v_0 の大きさを，m，K，R を用いて表すと，$v_0 = \boxed{\text{ア}}$ となる．この核反応で，質量欠損によって放出される核エネルギー Q は，$Q = \boxed{\text{イ}}$ と表せる．

(2)　1 つの重陽子が速さ v_1 を持ち，十分離れた位置に静止しているもう 1 つの重陽子に近づいて正面から衝突する場合を考える．静電気力による斥力のため，静止していた方は加速され，もう一方は減速される．やがて，両方が同じ速さ（これを u とする）になったときに最も接近する．このときの距離を r とする（これより外では，まだ核力は働いていないとする）．十分離れているときと最も接近するときとで，運動量が保存されることを示す式は，$\boxed{\text{ウ}}$ で与えられる．核反応が起こるために必要な最低の v_1 の大きさを，m，K，R を用いて表すと，$v_1 = \boxed{\text{エ}}$ となる．

(3)　核反応で放出される核エネルギー Q がヘリウム原子核と光子にどのように分配されるかを考える．互いに十分離れた位置で逆向きの等しい速さ v_2 を持つ 2 つの重陽子が，近づいて正面衝突し核反応が起こったとき，重陽子の進行方向とは垂直な方向に光子が観測されたとする．この光子のエネルギーを E とし，ヘリウム原子核の速さを V とする．核反応の前後での運動量保存則から導かれる E の大きさを，M，V，c を用いて表すと，$E = \boxed{\text{オ}}$ となり，エネルギー保存則から導かれる E の大きさを，M，V，m，v_2，Q を用いて表すと，$E = \boxed{\text{カ}}$ となる．この 2 式から E を消去して V を求めと 2 つの候補解が得られるが，一方は不適当な解なので捨て，残る解 $V = \boxed{\text{キ}}$ を採用する．ここで，「重陽子の運動エネルギーや質量欠損による放出核エネルギーはヘリウム原子核の質量と同等なエネルギーよりもはるかに小さい」のとを利用して V を近似すると，$V \fallingdotseq \boxed{\text{ク}}$ が得られる．これを用いて E を計算すると，この核反応で放出される核エネルギーは，ほとんど光子が持ち去ることがわかる．

【メモ】

1997 年九州大より．

【解答】

(1)　エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 \times 2 = \frac{K}{R}\,, \quad \therefore v_0 = \sqrt{\frac{K}{mR}}\,.$$

(2)　$Q = (2m - M)c^2\,.$

(3)　$mv_1 = 2mu\,.$

(4)　$\dfrac{1}{2}m{v_1}^2 = \dfrac{1}{2}mu^2 \times 2 + \dfrac{K}{r}\,.$

(5)　$r = R$ として，2 式を解けば，

$$v_1 = 2\sqrt{\frac{K}{mR}}\,.$$

(6)　運動量保存則より，

$$\begin{cases} mv_2 + m(-v_2) = MV_x + 0\,, \\ 0 + 0 = MV_y + \dfrac{E}{c}\,. \end{cases} \qquad \therefore V_x = 0\,, \quad V_y = -\frac{E}{Mc}\,.$$

よって，

$$V = \sqrt{{V_x}^2 + {V_y}^2} = \frac{E}{Mc}\,, \quad \therefore E = McV\,.$$

(7)　エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 \times 2 = \frac{1}{2}MV^2 + E - Q\,, \quad \therefore E = Q + m{v_2}^2 - \frac{1}{2}MV^2\,.$$

(8)　以上 2 式より，$V > 0$ の解を選び，

$$V = c\left(\sqrt{1 + \frac{2(m{v_2}^2 + Q)}{Mc^2}} - 1\right).$$

また，$\dfrac{1}{2}m{v_2}^2 \times 2 + Q \ll Mc^2$ より，

$$V \fallingdotseq c\left(1 + \frac{2(m{v_2}^2 + Q)}{2Mc^2} - 1\right) = \frac{m{v_2}^2 + Q}{Mc^2}\,.$$

4. 原子核崩壊

次の原子核崩壊について，α 崩壊の回数 x と β 崩壊の回数 y を求めよ．

(1)　${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ が崩壊し，${}^{206}_{82}\mathrm{Pb}$ となる．

(2)　${}^{232}_{90}\mathrm{Th}$ が崩壊し，${}^{208}_{82}\mathrm{Pb}$ となる．

【解答】

(1)　質量数は，α 崩壊では 1 回あたり 4 減少し，β 崩壊では減少しない．また，原子番号は，α 崩壊では 1 回あたり 2 減少し，β 崩壊では 1 増加する．よって，

$$\begin{cases} -4x = -32\,, \\ -2x + y = -10\,, \end{cases} \qquad \therefore x = \underset{\sim}{8}\,,\quad y = \underset{\sim}{6}\,.$$

(2)　同様に，

$$\begin{cases} -4x = -24\,, \\ -2x + y = -8\,, \end{cases} \qquad \therefore x = \underset{\sim}{6}\,,\quad y = \underset{\sim}{4}\,.$$

5. 半減期

半減期 T の原子核崩壊において，はじめの原子核の個数を N_0 とする．

(1) 時間 t 後に崩壊せずに残っている個数 N を t の関数として表せ．

(2) 放射能の強さは，単位時間あたりに崩壊する原子核数で表す．時間 t 誤の放射能の強さ A を求めよ．

【解答】

(1) $N = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}$.

(2) 放射能の強さ A[*6] は，

$$A = -\frac{dN}{dt}$$

で与えられる．よって，

$$A = -\frac{\log 2}{T} N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}.$$

*6 単位には Bq（ベクレル）を用いる．

6. 年代測定

放射性炭素 $^{14}\mathrm{C}$ は，半減期 5730 年で β 崩壊する．ある木片中の $^{14}\mathrm{C}$ の割合は，生きている植物に比べて 12.5％ であった．この木片は何年前のものか．有効数字 2 桁で求めよ．

【解答】

$0.125 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ より，死後，半減期の 3 倍の時間が経過している．よって，

$$5730 \times 3 = 17190 \fallingdotseq \underline{1.7 \times 10^4\ 年}.$$

7. 半減期・年代測定（入試問題）

天然に存在するウランは，質量数が 235 の同位体 (^{235}U) と質量数が 238 の同位体 (^{238}U) の 2 種類だけであると考えてよく，いずれも半減期が長い．^{235}U の半減期は 7.0 億年，^{238}U の半減期は 45 億年である．原子力発電などに使われるウランは ^{235}U である．現在，天然に存在するウランの同位体の個数の割合は，^{235}U が 0.70 %，^{238}U が 99.3 % であるとする．以下の各問の計算問題に対して有効数字 2 桁で答えよ．

(1)　現在から過去にさかのぼり，t 億年前のウランの同位体の存在量を ^{235}U については $N_{235}(t)$ 個，^{238}U については，$N_{238}(t)$ 個と書くことにする．$N_{235}(t)$ を $N_{235}(0)$ で，また $N_{238}(t)$ を $N_{238}(0)$ で表せ．

(2)　23 億年前 ($t = 23$) での ^{235}U の存在割合は何 % であったか．また，太陽系が形成されたと考えられる 46 億年前 ($t = 46$) の ^{235}U の存在割合は何 % であったか．必要なら，$2^{38\times 23/315} = 6.8$ として計算せよ．

(3)　現在，原子力発電では，^{235}U の存在割合を 3.0 % に濃縮して使用している．天然のウランでは ^{235}U の存在割合が 3.0 % であったのは何億年前のことか．必要なら，$\log_{10} 4.39 = 0.64$，$\log_{10} 2 = 0.30$ として計算せよ．

【メモ】

1996 年大阪大前期より，一部設問を削除した．

【解答】

(1)　半減期の定義より（微分方程式を解いて），

$$N_{235}(t) = \underline{N_{235}(0)2^{t/7.0}},\quad N_{238}(t) = \underline{N_{238}(0)2^{t/45}},$$

(2)　t 億年前の ^{235}U の存在割合は，

$$\frac{N_{235}(t)}{N_{235}(t) + N_{238}(t)}$$

で与えられる．ここに，$t = 23$，$t = 46$ を代入すれば，$t = 23$ では$\underline{4.6\,\%}$，$t = 46$ では$\underline{25\,\%}$.

(3)　$\underline{18 億年前}$.