1

力学前半

第 1 部力学前半では，1 物体系の力学のうち，運動方程式を直接解くことによる運動の解析，およびエネルギーと仕事の関係を用いた運動の解析を扱う．第 1 章では，第 2 章に向けた基礎的な数学を扱う．なお，数学の制約があるため，加速度が一定の場合に限る．第 2 章では，運動方程式を直接解く練習をする．ここでも同様の理由から等加速度運動のみを扱う（等加速度以外の運動は，第 4 部の力学後半で扱う）．第 3 章では，運動方程式と数学的に等価なエネルギーと仕事の関係（エネルギー収支の式）を用いて運動を解析する．このとき，運動エネルギーは公式そのままなので，仕事の計算を正しく行うことが根本的な問題となる．また，特定の場合（弾性力，および重力）において，仕事の計算をした後にエネルギー収支の式を変形することで得られる式が，物体以外も含めた系のエネルギーの総和（力学的エネルギー）を表していると解釈できることをみる（これにより，エネルギーで議論をする際は「どこまでを 1 つの系と見なすか」が重要になる）．

§1.1 運動学

第 1 章では，位置，速度，加速度を導入し，それらの間の関係（速度，加速度の定義）を扱う．特に，等加速度運動については，位置と速度の公式を覚える．また，$v-t$ グラフの接線の傾きが加速度，面積が変位であることを押さえる．

■簡単なまとめ

以下では，位置を x，速度を v，加速度を a と記し，一般にそれらは時刻 t の関数とする．

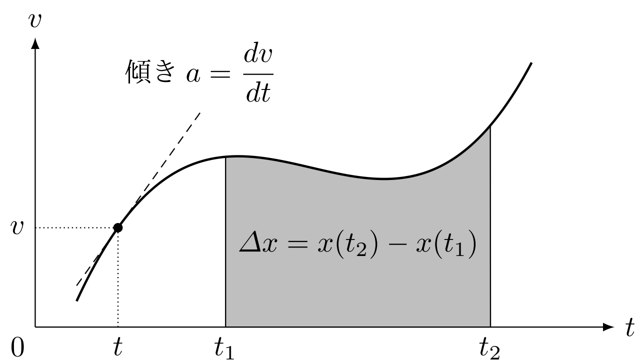
- 速度 v，加速度 a の定義：

$$v(t) = \lim_{\mathit{\Delta} t\to 0}\frac{\mathit{\Delta} x}{\mathit{\Delta} t} = \frac{dx}{dt}\,, \qquad a(t) = \lim_{\mathit{\Delta} t\to 0}\frac{\mathit{\Delta} v}{\mathit{\Delta} t} = \frac{dv}{dt}\,.$$

  ここで，$\mathit{\Delta} x = x(t+\mathit{\Delta} t) - x(t)$ である．

- $v-t$ グラフ：

$$\begin{cases} \text{傾き} & \rightarrow \quad \text{加速度}\ a\,, \\ \text{面積} & \rightarrow \quad \text{変位}\mathit{\Delta} x\,. \end{cases}$$



- 加速度一定の場合の位置 x と速度 v：

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + v(0)t + \dfrac{1}{2}at^2\,, \\ v(t) = v(0) + at\,. \end{cases}$$

  $v-t$ グラフを図示して面積評価をすれば $x(t)$ の式が得られる．なお，加速度一定の運動でしか使えないことに注意．

1. 位置→速度→加速度

位置 $x(t)$ に対する速度 $v(t)$，および加速度 $a(t)$ を求めよ[*1]．

(1)　$x(t) = v_0 t$

(2)　$x(t) = \beta t^2$

(3)　$x(t) = \gamma t^3$

【解答】

(1)　位置の時間変化率を考えて[*2]，

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_0(t+\Delta t) - v_0 t}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_0 \Delta t}{\Delta t} \\ &= \underset{\sim}{v_0}\,. \end{aligned}$$

同様の計算手順を踏んで，

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \underset{\sim}{0}\,.$$

以下同様の計算をすればよい．細かい計算手順を見たい場合，授業ノート（たぶんかなり丁寧）か，問題 *11* の解答（そこそこ丁寧）を参考にすると良い．

(2)　$v(t) = \underset{\sim\sim}{2\beta t}\,,\quad a(t) = \underset{\sim\sim}{2\beta}\,.$

(3)　$v(t) = \underset{\sim\sim\sim}{3\gamma t^2}\,,\quad a(t) = \underset{\sim\sim}{6\gamma t}\,.$

[*1] $x(t)$ は，「時刻 t における位置 x」と読む（を意味する）．

[*2] これも以下の微分公式を知っていれば，公式を使うだけ（n は整数）．

$$\frac{d}{dt}(t^n) = n t^{n-1}\,.$$

2. 等加速度運動（数値）

x 軸上を動く物体について，その位置を x，速度を v，加速度を a と記し，それらは全て時刻 t の関数であるとする．加速度は $a = -2\,\mathrm{m/s^2}$ で与えられ[*3]，運動の初期状態（$t = 0\,\mathrm{s}$ での位置 x と速度 v）は，それぞれ $x = 12\,\mathrm{m}$，$v = 4\,\mathrm{m/s}$ とする．0 s 以降の運動について考える．

(1)　v，x を，それぞれ時刻 t の関数として表せ．

(2)　物体が x 軸正の方向へ原点から最も遠ざかる時刻を $t = t_1$，そのときの位置を $x = x_1$ とする．t_1，x_1 を求めよ．
（ヒント：物体の運動が折り返すとき，常に $v = 0$ を満たす．）

(3)　物体が初めて $x = 0$ の位置に戻る時刻を $t = t_2$，そのときの速度を $v = v_2$ とする．t_2，v_2 を求めよ．

【メモ】

等加速度運動の公式の確認．

【解答】

(1)　等加速度運動の位置，および速度の公式より，

$$v(t) = v(0) + at = -2t + 4\,,$$

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2 = -t^2 + 4t + 12\,.$$

(2)　$t = t_1$ において $v = 0$ より，

$$-2t + 4 = 0\,, \qquad \therefore t_1 = 2\,\mathrm{s}\,,\quad x_1 = x(2) = 16\,\mathrm{m}\,.$$

(3)　$t = t_2$ において $x = 0$ より，$t > 0$ を考慮して，

$$-t^2 + 4t + 12 = 0\,, \qquad \therefore t_2 = 6\,\mathrm{s}\,,\quad v_2 = v(6) = -8\,\mathrm{m/s}\,.$$

[*3] 加速度の単位は $\mathrm{m/s^2}$ と記し，「メートル毎秒毎秒」と読む．速度の単位も，これに倣って読めばよい．

3. 等加速度運動（文字式）

x 軸上を動く物体について，その位置を x，速度を v，加速度を a と記し，それらは全て時刻 t の関数であるとする．加速度は $-a\,(a>0)$ で与えられ，運動の初期状態（$t=0$ での位置 x と速度 v）は，それぞれ $x(0)=x_0\,(>0)$，$v(0)=0$ とする．$t>0$ の運動について考える．

(1)　v，x を，それぞれ時刻 t の関数として表せ．

(2)　物体が再び $x=0$ の位置を通過する時刻を $t=t_1$，そのときの速度を $v=v_1$ とする．t_1，v_1 を求めよ．

【メモ】

等加速度運動の公式の確認．

【解答】

(1)　等加速度運動の位置および速度の公式より[*4]，

$$v(t)=v(0)+at=\underline{-at}\,,$$
$$x(t)=x(0)+v(0)t+\frac{1}{2}at^2=\underline{x_0-\frac{1}{2}at^2}\,.$$

(2)　$t=t_1$ において $x=0$ より，$t>0$ を考慮して，

$$x_0-\frac{1}{2}at^2=0\,,\qquad \therefore t_1=\underline{\sqrt{\frac{2x_0}{a}}}\,,\quad v_1=v(t_1)=\underline{-\sqrt{2ax_0}}\,.$$

[*4] 1 つ目の等号は公式を，2 つ目の等号は公式に代入をした式を表している．

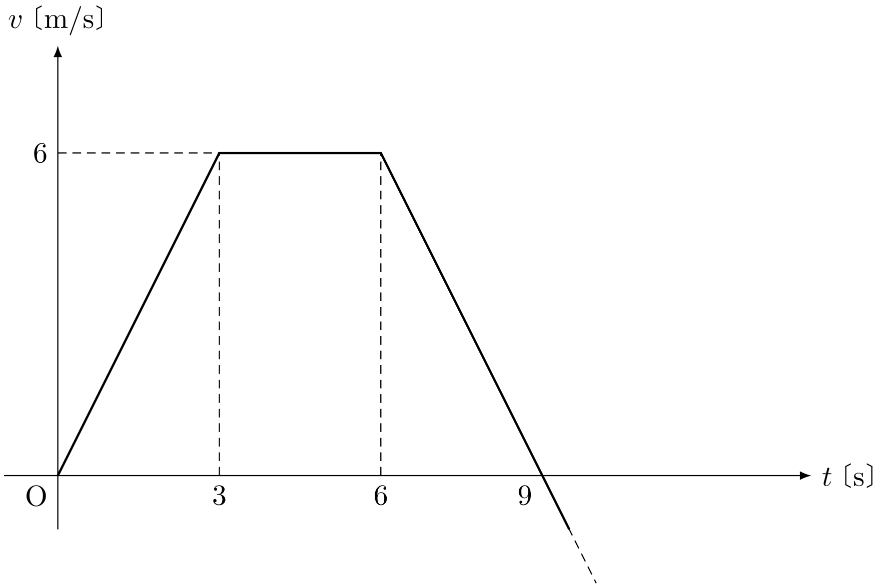
4. $v-t$ グラフ

x 軸上を動く物体について，その位置を x，速度を v，加速度を a と記し，それらは全て時刻 t の関数であるとする．物体の速度 v は図のように与えられる．$t>0$ の運動について考える．

(1)　$t=0\,\mathrm{s}$ から $3\,\mathrm{s}$ の加速度 a_1，$t=3\,\mathrm{s}$ から $6\,\mathrm{s}$ の加速度 a_2，$t=6\,\mathrm{s}$ から $9\,\mathrm{s}$ の加速度 a_3 を，それぞれ求めよ．

(2)　$t=0\,\mathrm{s}$ から $9\,\mathrm{s}$ までの物体の変位 $\varDelta x$ を求めよ．

(3)　物体は，はじめ原点にあった．このとき，物体が再び原点を通過する時刻 t を求めよ．



【メモ】

授業内の問題と全く同じ設定．等加速度運動の公式と $v-t$ グラフの確認．$v-t$ グラフの傾きは加速度を，符号付き面積は変位（位置の変化量）を与える．

【解答】

(1)　加速度の定義[*5]より，

$$a_1=\frac{6-0}{3-0}=\underline{2\,\mathrm{m/s^2}}\,,\quad a_2=\frac{6-6}{6-3}=\underline{0\,\mathrm{m/s^2}}\,,\quad a_3=\frac{0-6}{9-6}=\underline{-2\,\mathrm{m/s^2}}\,.$$

(2)　$v-t$ グラフの（符号付き）面積は，運動の変位を表すため，

$$\varDelta x=\frac{1}{2}\times 6\times(9+3)=\underline{36\,\mathrm{m}}\,.$$

(3)　再び原点を通過する時刻を $t\,(>9)$ とすると，t 軸下側の三角形の（符号付き）面積（の大きさ）が (2) と一致すればよい．したがって，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\times(t-9)\times 2(t-9)=36\\ &\{(t-9)-6\}\{(t-9)+6\}=0\,,\qquad \therefore t=\underline{15\,\mathrm{s}}\,(>9)\,.\end{aligned}$$

[*5] 速度の時間変化率

5. 投射①

地表から高さ h の位置にある小物体を自由落下[*6]させた．小物体に生じる加速度は，鉛直下向きに大きさ g である[*7]．小物体の地面に落下する直前の速さ[*8]を，g，h を用いて表せ．

【解答】

位置や速度の正の向きを鉛直上向きとする．なお，x 軸の原点は地面に取る．このとき，物体の位置 x，速度 v はそれぞれ，

$$\begin{cases} x(t) = h - \dfrac{1}{2}gt^2 \,, \\ v(t) = -gt \,. \end{cases}$$

よって，$x = 0$ となる時刻は，

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \,, \qquad \therefore |v| = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{2gh}} \,.$$

[*6] 初速度 0 での落下．

[*7] これ（鉛直下向きに大きさ g の加速度）を重力加速度と呼び，g の値は，$g \fallingdotseq 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ である．空気抵抗など気体の影響を受けない落体は鉛直下向きにのみ大きさ g の加速度が生じる（以後常識に）．

[*8] 速さは，速度の大きさ（絶対値を取ったもの）を表す．

6. 投射②

地面から高さ h の位置にある小物体を鉛直上向きに速さ v_0 で投げ上げた．小物体には y 軸負の向きに大きさ g の加速度が生じている．小物体の到達する最高点を H とする．H を，v_0，g，h を用いて表せ．また，小物体の地面に落下する直前の速さ v を，v_0，g，h を用いて表せ．

【解答】

位置や速度の正の向きを鉛直上向きとする．なお，x 軸の原点は地面に取る．このとき，物体の位置 x，速度 v はそれぞれ，

$$\begin{cases} x(t) = h + v_0 t - \dfrac{1}{2} g t^2 \,, \\ v(t) = v_0 - gt \,. \end{cases}$$

$v = 0$ となる時刻は $t = \dfrac{v_0}{g}$ ゆえ，最高点 H は

$$H = x\left(\frac{v_0}{g}\right) = \underline{h + \frac{{v_0}^2}{2g}} \,.$$

また，$x = 0$ となる時刻は，

$$h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \,, \qquad \therefore t = \frac{v_0}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{{v_0}^2}}\right) .$$

この時刻を速度の式に代入し，

$$v = v_0 - v_0 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{{v_0}^2}}\right) = -\sqrt{{v_0}^2 + 2gh} \,, \qquad \therefore |v| = \underline{\sqrt{{v_0}^2 + 2gh}} , .$$

7. 投射の類題

地表から高さ $2h$ の位置にある物体を A．地表から高さ h の位置にある物体を B とする．A を初速度 v_0 で鉛直下向きに投げ下ろし，それと同時に B を自由落下させたところ，2 つの小球は同時に地表に達した．重力加速度の大きさを g とする．v_0 を α，g，h を用いて表せ．

【解答】

位置や速度の正の向きを鉛直上向きとする．各物体の位置 y_A，y_B はそれぞれ，

$$\begin{cases} y_\mathrm{A} = 2h - v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2\,, \\ y_\mathrm{B} = h - \dfrac{1}{2}gt^2\,. \end{cases}$$

地表に達する時刻が両物体で等しいことから，

$$2h - v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}gt^2\,, \qquad t = \frac{h}{v_0}\,.$$

この時刻における物体の位置が 0 ゆえ[*9]，

$$y_\mathrm{A} = y_\mathrm{B} = h\left\{1 - \frac{gh}{2{v_0}^2}\right\} = 0\,, \qquad \therefore v_0 = \sqrt{\frac{gh}{2}}\,.$$

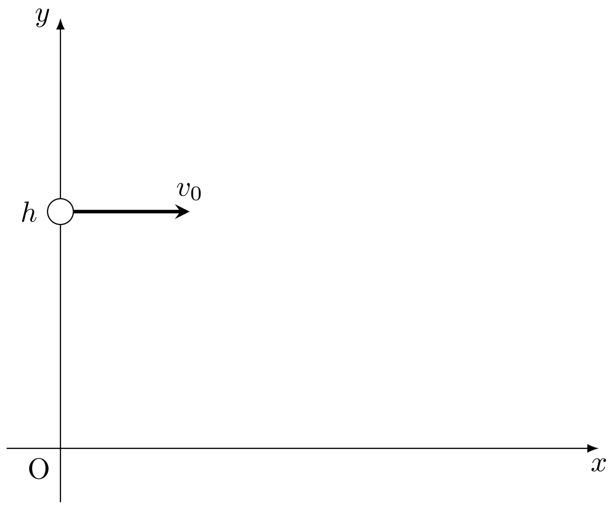
[*9] 一方の位置が 0 となる時刻を求め，その時刻をもう一方の式に入れたときにその位置もまた 0 となる，としても同じことである．

8. 投射③（水平投射）

図のように，水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．小物体を位置 $(x, y) = (0, h)$ から x 正方向に速さ v_0 で打ち出した．小物体には y 軸負の向きに大きさ g の加速度が生じている．以下の設問に答えよ．

(1)　初期条件（$t = 0$ での位置，および速度の値）を考慮して，小物体の x 方向の速度 v_x，y 方向の速度 v_y，位置 x，位置 y をそれぞれ時刻 t の関数として求めよ．

(2)　小物体が落下する時刻 t_1 を求めよ．また，物体の落下した位置 (x, y) を求めよ．



【解答】

(1)　初期条件から，

$$v_x(t) = \underset{\sim}{v_0}\,, \qquad v_y(t) = \underset{\sim}{-gt}\,, \qquad x(t) = \underset{\sim}{v_0 t}\,, \qquad y(t) = \underset{\sim}{h - \frac{1}{2}gt^2}\,.$$

(2)　$y = 0$ を満たす時刻を求めて，

$$t = \underset{\sim}{\sqrt{\frac{2h}{g}}}\,, \qquad (x, y) = \underset{\sim}{\left(v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}, 0\right)}\,.$$

9. 投射④（斜方投射）

図のように，水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．小物体を原点から速さ v_0，仰角 $\theta\,(0^\circ < \theta < 90^\circ)$ で打ち出した．小物体には y 軸負の向きに大きさ g の加速度が生じている．なお，三角関数についての以下の恒等式を用いても良い．

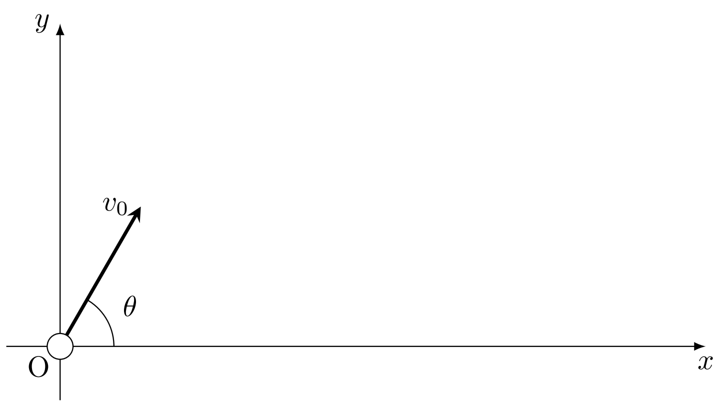
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

(1)　初期条件（$t=0$ での位置，および速度の値）を考慮して，小物体の x 方向の速度 v_x，y 方向の速度 v_y，位置 x，位置 y をそれぞれ時刻 t の関数として求めよ．

(2)　小物体が最高点に到達する時刻 t_1 を求めよ．また，最高点の位置 (x, y) を求めよ．

(3)　小物体が落下する時刻 t_2 を求めよ．また，物体の落下した位置 (x, y) を求めよ．

(4)　小物体の落下距離が最大となる θ を求めよ．



【解答】

(1)　初期条件から，

$$\begin{cases} x(t) = \underset{\sim\sim\sim}{v_0 \cos\theta t}\,, \\ y(t) = \underset{\sim\sim\sim}{v_0 \sin\theta t - \dfrac{1}{2}gt^2}\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x(t) = \underset{\sim\sim\sim}{v_0 \cos\theta}\,, \\ v_y(t) = \underset{\sim\sim\sim}{v_0 \sin\theta - gt}\,. \end{cases}$$

(2)　$v_y = 0$ を満たす時刻を求めて，

$$t = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{v_0 \sin\theta}{g}}\,, \qquad (x, y) = \underset{\sim\sim\sim}{\left(\frac{{v_0}^2 \sin\theta\cos\theta}{g}, \frac{{v_0}^2 \sin^2\theta}{2g}\right)}\,.$$

(3)　$y = 0$ を満たす時刻を求めて[*10]，

$$t = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{2v_0 \sin\theta}{g}}\,, \qquad (x, y) = \underset{\sim\sim\sim}{\left(\frac{{v_0}^2 \sin 2\theta}{g}, 0\right)}\,.$$

(4)　前問の結果より，$\sin 2\theta$ が最大のとき，すなわち $\sin 2\theta = 1$ のときを考えて，

$$\sin 2\theta = 1$$
$$2\theta = 90^\circ\,, \qquad \therefore \theta = \underset{\sim}{45^\circ}\,.$$

[*10] $\alpha = \beta = \theta$ として，三角関数の恒等式（加法定理）を用いた．

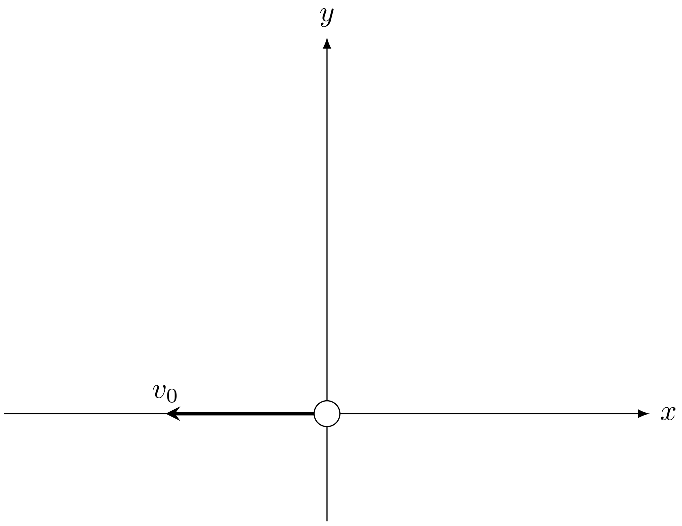
10. 等加速度運動（2 次元）

図のように，水平面上に xy 平面を取り．小物体を原点から x 軸負の方向に速さ v_0 で打ち出した．小物体には，y 軸から**時計回り**に角度 45°) の方向に大きさ $\sqrt{2}\,a$ の加速度が生じている．

(1)　初期条件（$t = 0$ での位置，および速度の値）を考慮して，小物体の x 方向の速度 v_x，y 方向の速度 v_y，位置 x，位置 y をそれぞれ時刻 t の関数として求めよ．

(2)　x 方向の運動を折り返す時刻 t_1 を求めよ．また，この時刻での v_y，x，y をそれぞれ求めよ．

(3)　小物体が y 軸をまたぐ時刻 t_2 を求めよ．また，この時刻での v_x，v_y，y をそれぞれ求めよ．



【メモ】

成分分解を要する等加速度運動.

【解答】

(1)　初期条件から,

$$v_x(t) = -v_0 + at\,,\quad v_y(t) = at\,,\quad x(t) = -v_0 t + \frac{1}{2}at^2\,,\quad y(t) = \frac{1}{2}at^2\,.$$

(2)　$v_x = 0$ を満たす時刻は $t = \dfrac{v_0}{a}$. よって,

$$v_y = v_0\,,\quad x = -\frac{{v_0}^2}{2a}\,,\quad y = \frac{{v_0}^2}{2a}\,.$$

(3)　$x = 0$ を満たす時刻は $t = \dfrac{2v_0}{a}$. よって,

$$v_x = v_0\,,\quad v_y = 2v_0\,,\quad y = \frac{2{v_0}^2}{a}\,.$$

11. 加速度が時刻 t に比例する運動

x 軸上を動く物体について，その位置を x，速度を v，加速度を a と記し，それらは全て時刻 t の関数であるとする．時刻 t における物体の位置は $x(t) = -\alpha t^3 + \beta t^2$（$\alpha$，$\beta$ は正の定数）で与えられる．$t > 0$ の運動について考える．

(1)　v，a を，それぞれ時刻 t の関数として表せ．

(2)　物体が x 軸正の方向へ原点から最も遠ざかる時刻を $t = t_1$，そのときの位置を $x = x_1$ とする．t_1，x_1 を求めよ．なお，物体の運動が折り返すとき，常に $v = 0$ を満たすことは説明なしに用いてよい．

(3)　物体が初めて $x = 0$ の位置に戻る時刻を $t = t_2$，そのときの速度を $v = v_2$ とする．t_2，v_2 を求めよ．

【メモ】

当然，等加速度運動の公式は使えないのでそこだけ注意.

【解答】

(1)　位置の時間変化率を考えて[*11],

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\{-\alpha(t+\Delta t)^3 + \beta(t+\Delta t)^2\} - \{-\alpha t^3 + \beta t^2\}}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-3\alpha t^2 \Delta t + 3\alpha t(\Delta t)^2 + \alpha(\Delta t)^3 + 2\beta t \Delta t + \beta(\Delta t)^2}{\Delta t} \\
&= \underline{-3\alpha t^2 + 2\beta t}\,.
\end{aligned}
$$

同様の計算手順を踏んで,

$$
a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \underline{-6\alpha t + 2\beta}\,.
$$

(2)　$v = 0$ を満たす時刻を求めて,

$$
-3\alpha t^2 + 2\beta t = 0\,, \qquad \therefore t_1 = \underline{\frac{2}{3}\frac{\beta}{\alpha}}\,(>0)\,, \quad x_1 = -\alpha\left(\frac{2}{3}\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 + \beta\left(\frac{2}{3}\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = \underline{\frac{4}{27}\frac{\beta^3}{\alpha^2}}\,.
$$

(3)　$x = 0$ を満たす時刻を求めて,

$$
-\alpha t^3 + \beta t^2 = 0\,, \qquad \therefore t_2 = \underline{\frac{\beta}{\alpha}}\,(>0)\,, \quad v_2 = -3\alpha\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + 2\beta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \underline{-\frac{\beta^2}{\alpha}}\,.
$$

[*11] 以下の微分公式を知っていれば，公式を使うだけ（n は整数）.

$$
\frac{d}{dt}(t^n) = nt^{n-1}\,.
$$

§1.2 運動の法則と力

第 2 章では，運動方程式を直接解く練習を行う．高校範囲で運動方程式が解けるようなケースは①等加速度運動，②単振動，③速度に比例する空気抵抗型の運動の 3 パターンに分類されるが，数学の授業進度の都合上，この章では①のみを扱う．なお，運動方程式は通常「既知の力から加速度を求め，位置を決定する式」という位置付けだが，力の公式が存在せず，その詳細が不明な力もある（拘束力）．このような場合，必ず運動方程式だけでは式が不足し，拘束力に対応した束縛条件（拘束条件）を考える必要がある．

■簡単なまとめ

- 運動方程式：

$$ma = (\text{受けている力の合計})$$

斜めの場合，成分分解して成分ごとに考える．

- 公式のある力：
  ❶ 地表付近の重力 $f = mg$（g：重力加速度の大きさ）
  ❷ 弾性力 $|f| = ks$（k：ばね定数，s：ばねの伸縮）
  ❸ 動摩擦 $f = \mu' N$（μ'：動摩擦係数，N：垂直抗力の大きさ）
- 公式のない力（拘束力）．公式のない力には必ず束縛条件が伴う：
  ❶ 垂直抗力 N → 面が変形しない
  ❷ 張力 T → 糸の長さが一定
  ❸ 静止摩擦力 R → 物体と接面の間の相対速度がゼロ（自明なので覚えなくてよい）

なお，上記 3 つの全ての力の上限が存在するが，高校では静止摩擦力の上限だけを扱い，滑らない条件として暗記する．

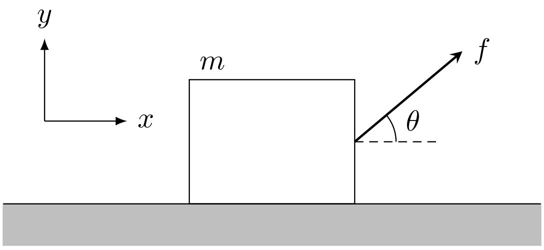
$$\text{滑らない条件：} |R| < \mu N \ (\mu\text{: 静止摩擦係数})$$

- 流体から受ける力：

$$\begin{cases} \text{静止流体の圧力：} P(z) = P(0) + \rho g z \ (z\text{：液面からの深さ}, \rho\text{: 流体の密度}) \\ \text{浮力：(浮力の大きさ)} = \begin{pmatrix} \text{周囲の流体から} \\ \text{受ける力の合計} \end{pmatrix} = \rho(\text{押し退けた液体の体積})\, g \end{cases}$$

1. 運動方程式①

図のように，水平麦向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．物体（質量 m）に大きさ f の力を x 軸から反時計回りに角度 θ だけ傾けた方向に加えた．物体の水平方向の運動方程式を立式し，物体に生じる加速度 a を求めよ．



【解答】

運動方程式より，

$$ma = f\cos\theta\,, \qquad \therefore a = \frac{f}{m}\cos\theta\,.$$

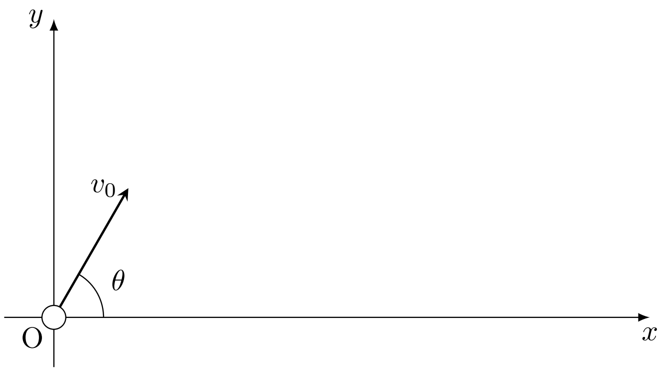
また，物体が床から受ける垂直抗力の大きさを N とすれば，y 方向の加速度が 0 であることより，

$$m \cdot 0 = N + f\sin\theta - mg\,, \qquad \therefore N = mg - f\sin\theta$$

を得る．

2. 地表付近の重力①

図のように，水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．小物体（質量 m）を原点から初速度 v_0 で角度 θ の方向に投射した．小物体の質量を m，x 方向の加速度を a_x，y 方向の加速度を a_y とする．小物体の運動方程式を立式し，a_x，a_y を求めよ．



【解答】

運動方程式より[*12]，

$$\begin{cases} ma_x = 0\,, \\ ma_y = -mg\,, \end{cases} \qquad \therefore a_x = \underset{\sim}{0}\,,\quad a_y = \underset{\sim\sim}{-g}\,.$$

[*12] 空気の影響を考えなければ，v_0 や θ には依らない．

3. 地表付近の重力②

十分高い位置から，質量 m の物体を静かに放した．重力加速度の大きさを g とする．以下の設問に答えよ．

I　空気抵抗を考えない．鉛直上向きを正とする．

(1)　物体にはたらく力を図示せよ．

(2)　物体の加速度を a とする．運動方程式を解き，a を求めよ．

II　物体の速度 v に比例した空気抵抗を考える．空気抵抗の比例定数を k とし，鉛直下向きを正とする．

(1)　物体にはたらく力を図示せよ．

(2)　物体の加速度を a とする．運動方程式を解き，a を k，v，m，g を用いて表せ．

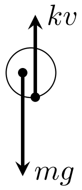
【解答】

I (1)　略（下の図から空気抵抗を除けばよい）．

(2)　運動方程式より，

$$ma = -mg\,, \qquad \therefore a = -g\,.$$

II (1)　空気抵抗は速度（運動方向）と逆向きに生じることに留意する（以下図）．



(2)　運動方程式より，

$$ma = -kv + mg\,, \qquad \therefore a = -\frac{k}{m}\left(v - \frac{mg}{k}\right).$$

4. フック則の利用

質量の無視できるばねの一端を天井に取り付け，他端におもりを取り付けつり下げる．質量 m のおもりを取り付けたとき，ばねの長さは L となり，質量 $3m$ のおもりを取り付けたとき，ばねの長さは $2L$ となった．重力加速度の大きさを g とする．ばねのばね定数 k，自然長 ℓ を，それぞれ m，L，g のうち必要なものを用いて表せ．

【解答】

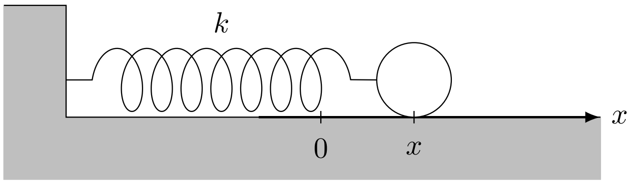
力の正の向きを鉛直上向きとして，つりあいの式より[*13]，

$$\begin{cases} 0 = k(L-\ell) - mg\,, \\ 0 = k(2L-\ell) - 3mg\,, \end{cases} \qquad \therefore k = \frac{2mg}{L}\,,\quad \ell = \frac{L}{2}\,.$$

[*13] 2 式の差を取って k を求め，その値をどちらかの式に代入するのが楽．

5. 一般の位置におけるフック則の符号の確認

ばね（ばね定数 k）の一端を固定された壁に取り付け，他端を小物体につなぐ（図参照）．水平右向きに x 軸を定め，その原点をばねが自然長のときの物体の位置に取る．このとき，位置 x にある小物体がばねから受ける弾性力が，向きを考慮して $f = -kx$ と与えられることを，(i) ばねが伸びているとき，(ii) ばねが縮んでいるとき，と場合分けをして確認せよ．



【解答】

ばねが伸びているとき，$x > 0$ で弾性力の大きさは $k|x|$，向きは x 負の向きゆえ[*14]，

$$f = -k|x| = -kx\,.$$

ばねが縮んでいるとき，$x < 0$ で弾性力の大きさは $k|x|$，向きは x 正の向きゆえ[*15]，

$$f = k|x| = -kx\,.$$

*14 この符号の「マイナス」が向きを表す．大きさだけであればマイナスは不要．
*15 絶対値の中身が負の場合，絶対値を外すとき，-1 をかけてはずすことに注意．

6. 直列ばね

ばね 1（ばね定数 k_1，質量無視）の一端を天井に取り付け，その他端にはばね 2（ばね定数 k_2，質量無視）を接続する．ばね 2 の他端を大きさ f の力をばねが伸びる方向に加えた．重力加速度の大きさを g とする．

(1)　おもりと接続点，それぞれの力のつりあいの式を立式せよ．なお，ばね 1 の伸びを x_1，ばね 2 の伸びを x_2 とする．

(2)　2 つのばねをばね定数 k の 1 つのばねと見なす．おもりの力のつりあいの式を，k を含む式で立式せよ．

(3)　(1)，(2) より，k が k_1，k_2 と以下の関係で結ばれることを示せ．

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

(4)　ばね定数 k_1，$\cdots$，k_n の n 個のばねを直列[*16]に接続する．(1) の結果を利用して，これらのばねを 1 つと見なしたときのばね定数 k が以下の関係式を満たすことを確認せよ．

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}$$

[*16] j 番目のばねは $j-1$ 番目のばねと $j+1$ 番目のばねに接続され，1 番目と n 番目のばねに関してはその他端は何かが接続できるよう自由になっている．

【解答】

(1)　つりあいの式は，力の正の向きを鉛直上向きとして，

$$\begin{cases} \text{接続点} : \underline{0 = k_1 x_1 - k_2 x_2} \,, \\ \text{ばね} \, 2 : \underline{0 = k_2 x_2 - f} \,. \end{cases}$$

(2)

$$\text{全体} : \underline{0 = k(x_1 + x_2) - f} \,.$$

(3)　$x_1 = f/k_1$，$x_2 = f/k_2$ より，

$$\underline{\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} \,.$$

(4)　同様にして，ばね 1 とばね 2 の接続点を接続点 1，ばね 2 とばね 3 の接続点を接続点 2 のように取る（ばね j とばね $j+1$ の接続点は接続点 j）．このとき，それぞれのつりあいの式は

$$\begin{cases} \text{接続点} \, 1 : 0 = k_1 x_1 - k_2 x_2 \,, \\ \text{接続点} \, 2 : 0 = k_2 x_2 - k_3 x_3 \,, \\ \quad \vdots \\ \text{接続点} \, n-1 : 0 = k_{n-1} x_{n-1} - k_n x_n \,, \\ \text{ばね} \, n : 0 = k_n x_n - f \,. \end{cases}$$

これらのばねを 1 つのばねと見なしたばね定数を k とし，全体のばねの伸び x が $x = x_1 + \cdots x_n$ であることを用いれば

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}$$

を得る[*17]．

[*17] 勿論，(3) の結果を繰り返し利用しても同じ結果を得る．

7. 並列ばね

ばね 1（ばね定数 k_1，質量無視）の一端を天井に取り付け，ばね 1 と隣り合うようにばね 2（ばね定数 k_2，質量無視）を取り付ける．両ばねの自然長は等しいものとし，ばねの自由な側には棒が取り付けられ，棒（質量，変形ともに無視）を引くことで両のばねが等しく伸びるようになっている．水平を保ったまま棒に大きさ f を加え，ばねを x だけ伸ばした．重力加速度の大きさを g とする．

(1) 棒の力のつりあいの式を立式せよ．

(2) 2 つのばねをばね定数 k の 1 つのばねと見なす．k が k_1，k_2 と以下の関係で結ばれることを示せ．

$$k = k_1 + k_2$$

(3) ばね定数 k_1，$\cdots$，k_n の n 個のばねを並列[*18]に接続する．(1) の結果を利用して，これらのばねを 1 つと見なしたときのばね定数 k が以下の関係式を満たすことを確認せよ．

$$k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$$

[*18] ばねの両側の接続点を同一のものに接続できるように並べる．

【解答】

(1)　つりあいの式は，力の正の向きを鉛直上向きとして，

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{0 = k_1 x + k_2 x - f}$$

(2)　全体のつりあいの式は，

$$\text{全体} : 0 = kx - f\,.$$

両式を比較して，

$$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{k = k_1 + k_2}\,.$$

(3)　同様にして，

$$0 = k_1 x + k_2 x + \cdots + k_n x - f$$

これらのばねを 1 つのばねと見なしたばね定数を k とすれば，

$$k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$$

を得る[*19].

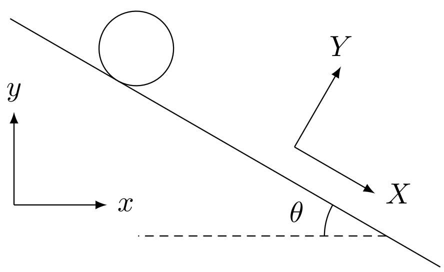
[*19] 勿論，(2) の結果を繰り返し利用しても同じ結果を得る．

8. 運動方程式④，垂直抗力，成分分解の仕方

滑らかな斜面上（傾斜角 θ）に，小物体（質量 m）を静かに置くと，小物体は斜面上を滑り始めた．重力加速度の大きさを g とする．小物体の加速度を a，小物体が斜面から受ける垂直抗力の大きさを N とする．

(1)　小物体の運動方程式を，斜面に平行下向き（X 方向）と垂直上向き（Y 方向）に分解して立てることにより，a，N を求めよ．

(2)　小物体の運動方程式を，水平右向き（x 方向）と鉛直上向き（y 方向）に分解して立てることにより，a，N を求めよ．



【解答】

(1)　運動方程式より[*20]，

$$\begin{cases} ma = mg\sin\theta\,, \\ m\cdot 0 = N - mg\cos\theta\,, \end{cases} \qquad \therefore a = \underset{\sim\sim\sim}{g\sin\theta}\,,\quad N = \underset{\sim\sim\sim}{mg\cos\theta}\,.$$

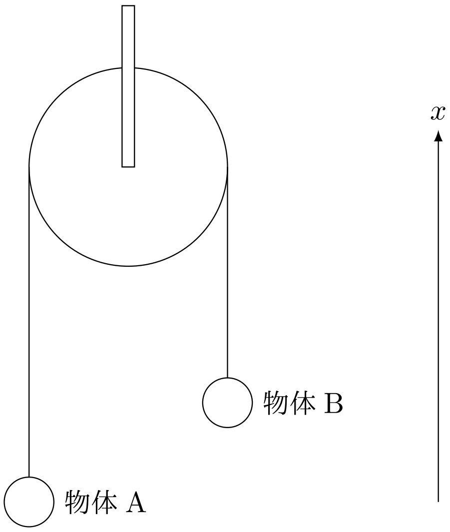
(2)　運動方程式より，

$$\begin{cases} ma\cos\theta = N\sin\theta\,, \\ m(-a\sin\theta) = N\cos\theta - mg\,, \end{cases} \qquad \therefore a = \underset{\sim\sim\sim}{g\sin\theta}\,,\quad N = \underset{\sim\sim\sim}{mg\cos\theta}\,.$$

[*20] 面が変形しないことにより，物体の加速度の Y 方向成分は 0 である（詳しくは後述）．

9. 運動方程式⑤，糸の張力

物体 A（質量 m）と物体 B（質量 $2m$）を糸（質量，伸縮無視）で繋ぎ，固定された滑車にかけた．糸と滑車の間には摩擦はなく，滑車の回転は考えないものとする．鉛直上向きに x 軸を定め，重力加速度の大きさを g とする．物体 A の加速度を a，糸の張力の大きさを T とし，運動方程式から a，T を求めよ．



【解答】

運動方程式より[*21]，

$$\begin{cases} ma = T - mg\,, \\ 2m(-a) = T - 2mg\,, \end{cases} \qquad \therefore a = \frac{1}{3}g\,,\quad T = \frac{4}{3}mg\,.$$

[*21] 糸が伸縮しないことから，B の加速度は A と大きさが等しく逆向きである（詳しくは後述）．

10. 運動方程式と束縛条件①（糸，面）

図のように，質量 m_1，m_2，m_3 の物体 A，B，C を糸（質量と伸縮を無視）で繋いだ．物体 A，B を繋ぐ糸を糸 1，物体 B，C を繋ぐ糸を糸 2 とする．一切の摩擦を無視する．水平右向きに x 軸を定める．

I　物体 C に x 軸正方向に大きさ F の力を加えた．このとき，それぞれの糸がピンと張り，物体 A，B，C は等しい加速度 a で x 軸正方向に動き出した．糸 1 に生じている張力の大きさを T，糸 2 に生じている張力の大きさを S とする．

(1)　各物体にはたらく力を図示し，各物体について運動方程式の x 成分を立式せよ．

(2)　運動方程式を解き，a，T，S をそれぞれ求めよ．

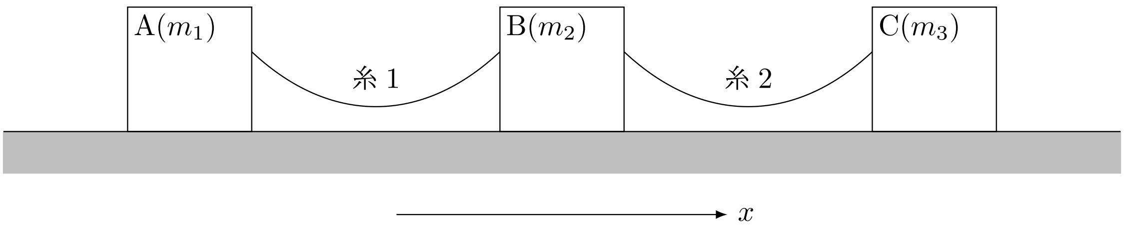
(3)　糸の長さが一定であるという拘束条件を考え，3 物体の加速度が等しいことを確認せよ．

II　物体 A に x 軸正方向に大きさ F の力を加えた．このとき，物体 A が B を押し，物体 B が C を押すことで，物体 A，B，C は等しい加速度 b で x 軸正方向に動き出した．物体 A，B の間で生じている垂直抗力の大きさを N，物体 B，C の間で生じている垂直抗力の大きさを R とする．面の接触には糸は影響しないものとし，弛んだ糸が運動に及ぼす影響はないものとする．

(1)　各物体にはたらく力を図示し，各物体について運動方程式の x 成分を立式せよ．

(2)　運動方程式を解き，b，N，R をそれぞれ求めよ．

(3)　面が変形しないという拘束条件を考え，3 物体の加速度が等しいことを確認せよ．


A(m_1)
B(m_2)
C(m_3)
糸 1
糸 2
x

【メモ】

授業では 2 物体の場合を扱っている（はずである）．張力と垂直抗力は未知量なので，本来であれば運動方程式だけでは式が不足する．そこで，束縛条件（糸の長さが一定の条件，面が変形しない条件）を考える．この問題では，はじめ加速度が等しいことを暗黙裡に用い，最後に確認させる形式とした．後に続く問題では始めから束縛条件を考えるよう設問を作成してある．

【解答】

I (1)　各物体の運動方程式は以下の通りである．

$$\begin{cases} \text{物体 A}: m_1 a = T\,, \\ \text{物体 B}: m_2 a = S - T\,, \\ \text{物体 C}: m_3 a = F - S\,. \end{cases}$$

(2)　運動方程式の 3 式の和を取って，

$$(m_1 + m_2 + m_3)a = F\,, \qquad \therefore a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3}\,.$$

これを運動方程式に代入すれば，

$$T = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3}F\,, \quad S = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3}F\,.$$

(3)　物体 A，B の糸 1 の接触点をそれぞれ x_1，x_2 とすると，糸 1 の長さ ℓ_1 は，

$$x_2 - x_1 = \ell_1$$

と表される．この式の時間の 2 階微分（時間変化を 2 回取ること）を考えて，

$$a_2 - a_1 = 0\,.$$

同様に，物体 B，C の糸の接触点をそれぞれ x_2，x_3 とすると[*22]，糸 2 の長さ ℓ_2 は，

$$x_3 - x_2 = \ell_2$$

と表される．この式の時間の 2 階微分（時間変化を 2 回取ること）を考えて，

$$a_3 - a_2 = 0\,.$$

以上より，

$$a_1 = a_2 = a_3\,.$$

[*22] 実際は物体 B の糸 2 の接触点は，$x_2 +$（物体 B の幅）となるが，物体 B の幅が一定であるため時間変化を取ればその影響は無視できる．

II (1)　各物体の運動方程式は以下の通りである．

$$\begin{cases} \text{物体 A}: m_1 b = F - N\,, \\ \text{物体 B}: m_2 b = N - R\,, \\ \text{物体 C}: m_3 b = R\,. \end{cases}$$

(2)　運動方程式の 3 式の和を取って，

$$(m_1 + m_2 + m_3)a = F\,, \qquad \therefore a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3}\,.$$

これを運動方程式に代入すれば，

$$R = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}F\,,\quad S = \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3}F\,.$$

(3)　物体 A，B の右面の位置をそれぞれ x_1，x_2 とすると，物体 B の幅 d_2 が一定なことから，

$$x_1 + d_2 = x_2$$

を満たす．この式の時間の 2 階微分（時間変化を 2 回取ること）を考えて，

$$a_1 = a_2\,.$$

同様に，物体 C の右面の位置を x_3 とすると，物体 C の幅 d_3 が一定なことから，

$$x_2 + d_3 = x_3$$

を満たし，この式の時間の 2 階微分（時間変化を 2 回取ること）を考えて，

$$a_2 = a_3\,.$$

以上より，

$$a_1 = a_2 = a_3\,.$$

11. 運動方程式と束縛条件②（静止摩擦）

図のように，物体 B（M）の上に物体 A（質量 m）を置いた．物体間の静止摩擦係数を μ とし，物体間摩擦以外の摩擦を無視する．重力加速度の大きさを g とし，水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．

I　物体 B に x 軸正方向の外力 F を加えた場合を考える．このとき，物体間に滑りは生じていないものとし，2 物体の加速度は等しく a，物体間の静止摩擦力の大きさを R とする．

(1)　各物体にはたらく力を図示し，各物体について運動方程式の x 成分を立式せよ．

(2)　運動方程式を解き，a，R をそれぞれ求めよ．

(3)　滑りが生じないための F の範囲を求めよ．

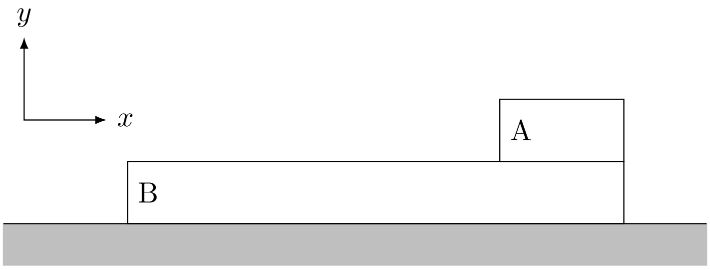
(4)　解答に示した物体間に滑りが生じないことから 2 物体の加速度が等しいことの説明を読み，理解せよ．

II　物体 A に x 軸正方向の外力 F を加えた場合を考える．このとき，物体間に滑りは生じていないものとし，2 物体の加速度は等しく b，物体間の静止摩擦力の大きさを R とする．

(1)　各物体にはたらく力を図示し，各物体について運動方程式の x 成分を立式せよ．

(2)　運動方程式を解き，b，R をそれぞれ求めよ．

(3)　滑りが生じないための F の範囲を求めよ．


y
x
A
B

【メモ】

静止摩擦力は未知量なので，本来であれば運動方程式だけでは式が不足する．そこで，束縛条件（面に滑りが生じていない条件）を考える．この問題では，はじめ加速度が等しいことを暗黙裡に用い，最後に確認させる形式とした．静止摩擦力に関しては，未知量で置くということさえ意識できれば（束縛条件を意識しなくても）よい．

【解答】

I (1)　各物体の運動方程式は以下の通りである．

$$\begin{cases} \text{物体 A}: ma = R\,, \\ \text{物体 B}: Ma = F - R\,. \end{cases}$$

(2)　運動方程式の和を取るなどして，

$$a = \frac{F}{M+m}\,,\quad R = \frac{m}{M+m}F\,.$$

(3)　滑らない条件 $R < \mu N$ を考えて，

$$\frac{m}{M+m}F < \mu mg\,,\qquad \therefore F < \mu(M+m)g\,.$$

(4)　面に滑りが生じていないということは，2 物体の速度が等しいことを指す．これは物体 A の速度を v，物体 B の速度を V とすると，

$$v = V$$

を満たすということで，この式の時間微分（時間変化を取ること）を考えて，

$$a = A$$

となり，加速度が等しくなることを確認できる．

II (1)　各物体の運動方程式は以下の通りである．

$$\begin{cases} \text{物体 A}: mb = F - R\,, \\ \text{物体 B}: Mb = R\,. \end{cases}$$

(2)　運動方程式の和を取るなどして，

$$a = \frac{F}{M+m}\,,\quad R = \frac{M}{M+m}F\,.$$

(3)　滑らない条件 $R < \mu N$ を考えて，

$$\frac{M}{M+m}F < \mu mg\,, \qquad \therefore \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{F < \left(1+\frac{m}{M}\right)\mu mg}\,.$$

12. 摩擦の整理

図のように，物体 A（質量 m）を物体 B（質量 $2m$，幅 ℓ）の端に置く．物体 A と B の間には摩擦が働き，物体 B と床の間の摩擦は無視できる．水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．重力加速度の大きさを g とする．

I　物体 B に x 正方向に大きさ F の力を加えたところ，両物体は一体となって運動をした．物体 A，B 間の静止摩擦係数を $\dfrac{1}{2}$ とする．

(1)　物体 A，B の加速度を a，静止摩擦力の大きさを R とする．物体 A，B の運動方程式を解き，a，R を m，F のうちから必要なものを用いて表せ．

(2)　F をある値 F_{c} より大きくすると，物体 A は物体 B 上をすべり出す．F_{c} を求めよ．

II　物体 B に x 正方向に大きさ $F\,(> F_{\mathrm{c}})$ の力を加えたところ，物体 A は物体 B 上をすべった．物体 A，B 間の動摩擦係数を μ' とする．

(1)　物体 A，B の加速度をそれぞれ a_{A}，a_{B} とする．a_{A}，a_{B} を m，μ'，g，F のうちから必要なものを用いて表せ．

(2)　物体 A の位置 x_{A}，および物体 B の位置 x_{B} をそれぞれ時刻 t の関数として求めよ．

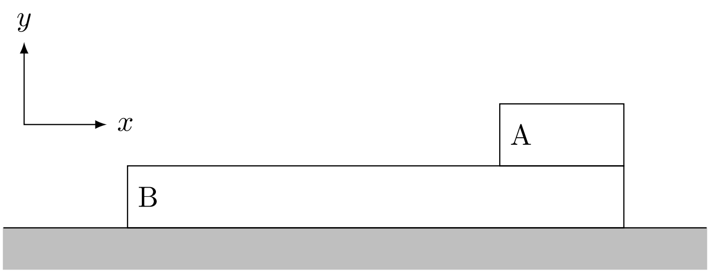
(3)　物体 A が物体 B 上を ℓ だけすべったとき，物体 A は物体 B 上から落下した．このときの時刻 t を求めよ．

III　物体 B に x 正方向に大きさ V の初速度を与えたところ，物体 A は物体 B 上をすべり，物体 B 上のある位置で物体 B に対して静止した．物体 A，B 間の動摩擦係数を μ' とする．

(1)　物体 A，B の加速度をそれぞれ a_{A}，a_{B} とする．a_{A}，a_{B} を m，μ'，g のうちから必要なものを用いて表せ．

(2)　物体 A の速度 v_{A}，および物体 B の速度 v_{B} をそれぞれ時刻 t の関数として求めよ．

(3)　物体 A が物体 B に対して静止した時刻 t を求めよ．


y
x
A
B

【メモ】

摩擦の取り扱いの確認．また，等加速度運動の公式の確認，および相対運動についての言及．

【解答】

I (1)　運動方程式より，

$$\begin{cases} x: ma = R\,, \\ y: m\cdot 0 = N - mg\,, \\ x: 2ma = F - R\,. \end{cases} \qquad \therefore\ a = \underset{\sim\sim}{\frac{F}{3m}}\,,\quad R = \underset{\sim\sim}{\frac{1}{3}F}\,,\quad N = mg\,.$$

(2)　$|R| < \mu N$ を満たすとき，物体 A は物体 B 上をすべらず，

$$\frac{1}{3}F < \frac{1}{2}mg\,, \qquad \therefore\ F_{\mathrm{c}} = \underset{\sim\sim}{\frac{3}{2}mg}\,.$$

II (1)　運動方程式より，

$$\begin{cases} x: ma_{\mathrm{A}} = \mu' N\,, \\ y: m\cdot 0 = N - mg\,, \\ x: 2ma_{\mathrm{B}} = F - \mu' N\,. \end{cases} \qquad \therefore\ a_{\mathrm{A}} = \underset{\sim\sim}{\mu' g}\,,\quad a_{\mathrm{B}} = \underset{\sim\sim}{\frac{F}{2m} - \frac{1}{2}\mu' g}\,,\quad N = mg\,.$$

(2)　加速度一定より，$x_{\mathrm{A}}(0) = x_{\mathrm{B}}(0) = 0$ と取って[*23]，

$$\begin{cases} x_{\mathrm{A}}(t) = \dfrac{1}{2}\mu' g t^2\,, \\ x_{\mathrm{B}}(t) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{F}{m} - \mu' g\right)t^2\,. \end{cases}$$

$x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} = \ell$ を解いて，

$$\frac{1}{4}\left(\frac{F}{m} - \mu' g\right)t^2 - \frac{1}{2}\mu' g t^2 = \ell\,, \qquad \therefore\ t = \underset{\sim\sim}{2\sqrt{\frac{m\ell}{F - 3\mu' mg}}}\,.$$

III (1)　運動方程式より，

$$\begin{cases} x: ma_{\mathrm{A}} = \mu' N\,, \\ y: m\cdot 0 = N - mg\,, \\ x: 2ma_{\mathrm{B}} = -\mu' N\,. \end{cases} \qquad \therefore\ a_{\mathrm{A}} = \underset{\sim\sim}{\mu' g}\,,\quad a_{\mathrm{B}} = \underset{\sim\sim}{-\frac{1}{2}\mu' g}\,,\quad N = mg\,.$$

[*23] 等加速度運動をする物体の位置 x は以下のように与えられる：

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2\,.$$

(2)　加速度一定より，$x_{\mathrm{A}}(0)=x_{\mathrm{B}}(0)=0$ と取って[*24]，

$$\begin{cases} v_{\mathrm{A}}(t)=\mu' gt\,, \\ v_{\mathrm{B}}(t)=V-\dfrac{1}{2}\mu' gt\,. \end{cases}$$

$v_{\mathrm{B}}-v_{\mathrm{A}}=0$ を解いて，

$$V-\frac{1}{2}\mu' gt-\mu' gt=0\,,\qquad \therefore t=\frac{2V}{3\mu' g}\,.$$

なお，それぞれの物体の位置 x は，

$$\begin{cases} x_{\mathrm{A}}(t)=\dfrac{1}{2}\mu' gt^2\,, \\ x_{\mathrm{B}}(t)=Vt-\dfrac{1}{4}\mu' gt^2\,, \end{cases}$$

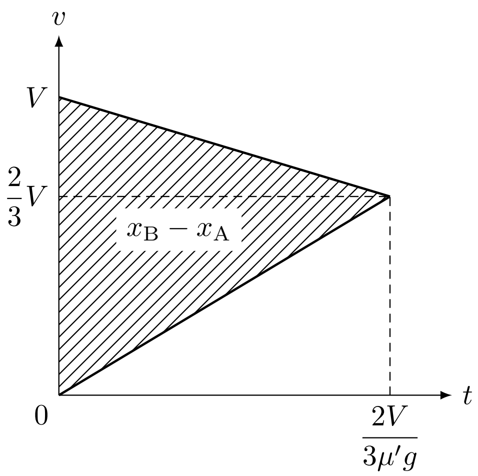
であり，$t=\dfrac{2V}{3\mu' g}$ での A に対する B（A から見た B）の相対位置 $x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}$ は，

$$x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}}=\frac{V^2}{3\mu' g}-\frac{1}{4}\mu' g\left(\frac{2V}{3\mu' g}\right)^2-\frac{1}{2}\mu' g\left(\frac{2V}{3\mu' g}\right)^2=\frac{V^2}{3\mu' g}$$

となり，物体 A が物体 B から落下しないためには，$\ell>\dfrac{V^2}{3\mu' g}$ を満たすようにする必要がある．

【別解】$\boldsymbol{v-t}$ グラフを使用[*25]

設問 III における物体 A，B の $v-t$ グラフは次の通りである．



[*24] 等加速度運動をする物体の速度 v は以下のように与えられる：

$$v(t)=v(0)+at\,.$$

[*25] 等加速度運動の解析は $v-t$ グラフを（積極的に）使いと良い．

13. 摩擦の向きが変わる

図のように，粗い斜面（傾斜角 θ）にある物体（質量 m）に，斜面に沿って斜面上向きの初速度 v_0 を与えた．この時刻を $t=0$ とする．物体は，斜面をすべりあがった後，ある位置で折り返し，斜面下向きに滑り始めた．斜面上向きに x 軸を定め，その原点を $t=0$ における物体の位置に定める．斜面と物体の間の静止摩擦係数を μ_0，動摩擦係数を μ，重力加速度の大きさを g とする．

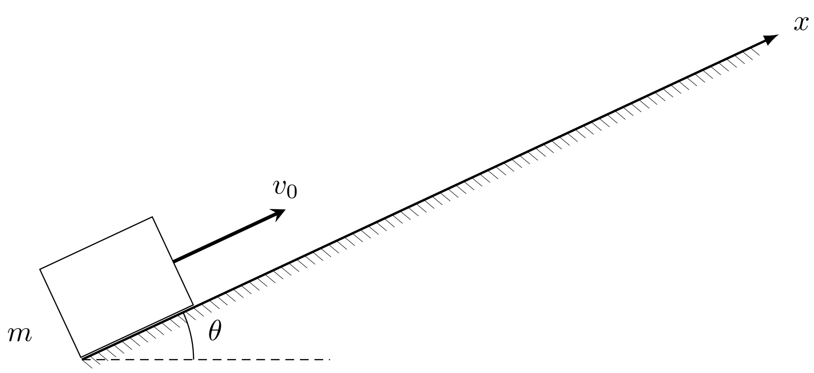
(1)　物体が上昇している間を考える．物体が位置 x にあるときの物体の加速度を a とする．a を求めよ．

(2)　物体が上昇している間の物体の位置 x，および速度 v を，ぞれぞれ時刻 t の関数として表せ．

(3)　物体が最高点で折り返した後，斜面下方向に滑り始めるための $\tan\theta$ の条件を求めよ．

(4)　物体が折り返す時刻 t_0，および折り返す位置 x_0 をそれぞれ求めよ．

(5)　物体が再び $x=0$ を通過する瞬間の物体の速度 v を求めよ．このとき，斜面を上昇する間と下降する間で物体の加速度が異なることに注意せよ．



【解答】

(1)　運動方程式より，

$$ma = -mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta\,, \qquad \therefore a = \underline{-g(\sin\theta + \mu\cos\theta)}\,.$$

(2)　加速度一定ゆえ，

$$\begin{cases} x = \underline{v_0 t - \dfrac{1}{2}g(\sin\theta + \mu\cos\theta)t^2}\,, \\ v = \underline{v_0 - g(\sin\theta + \mu\cos\theta)t}\,. \end{cases}$$

(3)　静止しているときを考えて，はたらく静止摩擦力を x 軸正の向きに R とすると[*26]，

$$0 = -mg\sin\theta + R\,, \qquad \therefore R = mg\sin\theta\,.$$

よって，滑らない条件の対偶を考えて，

$$R \geq \mu_0 N = \mu_0 mg\cos\theta\,, \qquad \therefore \underline{\tan\theta \geq \mu_0}\,.$$

(4)　$v = 0$ を解いて，

$$t_0 = \underline{\frac{v_0}{g(\sin\theta + \mu\cos\theta)}}\,, \qquad \therefore x_0 = \underline{\frac{{v_0}^2}{2g(\sin\theta + \mu\cos\theta)}}\,.$$

(5)　物体が斜面を下るときの加速度は，動摩擦力の向きが変わることに注意して，このときの速度 v は，

$$ma = -mg\sin\theta + \mu mg\cos\theta\,, \qquad \therefore a = -g(\sin\theta - \mu\cos\theta)\,.$$

折り返した時刻を再度 $t = 0$ と取れば，

$$\begin{cases} x = x_0 - \dfrac{1}{2}g(\sin\theta - \mu\cos\theta)t^2\,, \\ v = -g(\sin\theta - \mu\cos\theta)t\,. \end{cases}$$

よって，$x = 0$ を解いて[*27]，

$$t = \sqrt{\frac{2x_0}{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)}}\,, \qquad \therefore v = -\sqrt{2g(\sin\theta - \mu\cos\theta)x_0} = \underline{-v_0\sqrt{\frac{\tan\theta - \mu}{\tan\theta + \mu}}}\,.$$

[*26] 静止摩擦については，向きを逆においても，運動方程式（今はつりあい）を解くことで R が求まり，その符号から自分の置いた向きが正しいかどうかを判断できる．

[*27] v の最後の等号で $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を利用．

14. 糸に関する束縛条件の計算ドリル

水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．以下の各装置において，糸の長さが一定なことによって物体間の加速度の間に成り立つの関係式を求めよ．

(1)　図 1 のように繋がれた 2 物体について，滑車を固定しているときの A の加速度を a，B の加速度を b とする．

(2)　図 1 のように繋がれた 2 物体について，A の加速度を a，B の加速度を b，滑車の加速度を c とする．

(3)　図 2 のように繋がれた 2 物体について，A の x 方向の加速度を a，B の y 方向の加速度を b とする．

(4)　図 3 のように繋がれた 3 物体について，A の加速度を a，B の加速度を b とし，C の加速度を c とする．

(5)　図 4 のように繋がれた 2 物体について，A の加速度を a，B の加速度を b とする．糸が複数ある場合，各糸に対して糸の長さが一定の条件を立式しなければならないことに注意せよ．

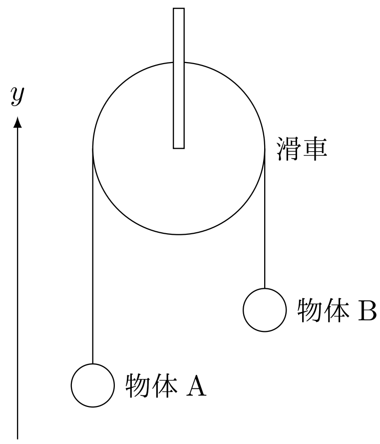


図 1

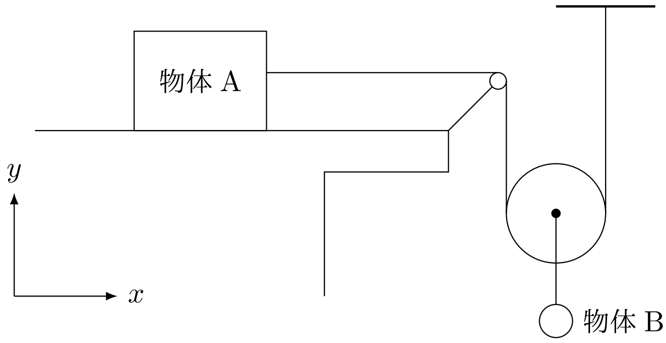


図 2

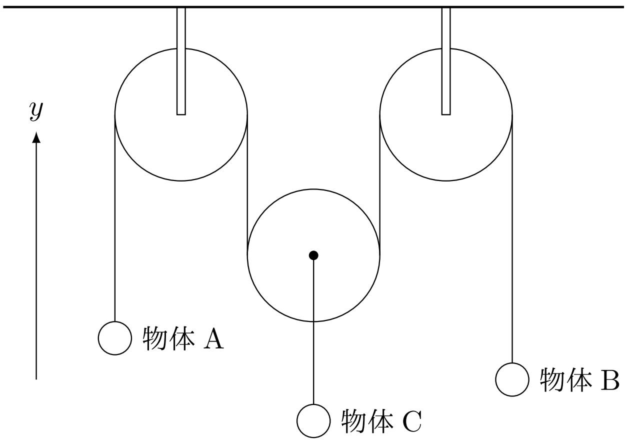


図 3

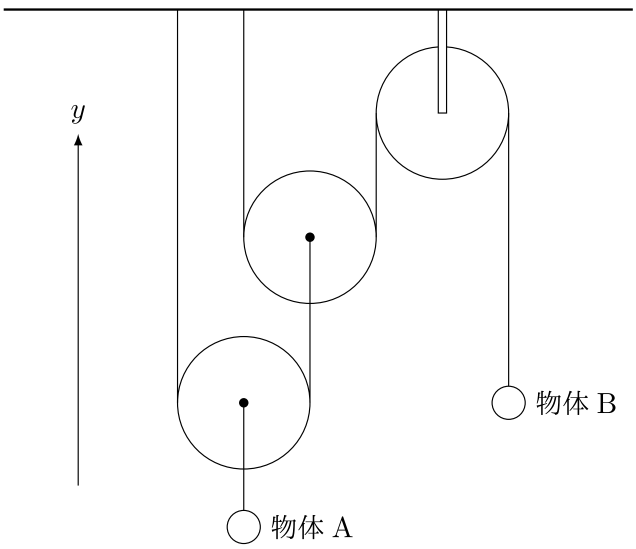


図 4

【メモ】

以下では，物体 A，B，C の位置をそれぞれ $(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}})$，$(x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}})$，$(x_{\mathrm{C}}, y_{\mathrm{C}})$ とする．脚注でも言及しているが，糸の長さのうち，明らかに一定な部分（滑車の円弧の部分や，固定された位置から固定された位置までの長さ）は左辺に含めていない．

【解答】

(1)　滑車の位置を y とする．このとき，糸の長さは，

$$(y - y_{\mathrm{A}}) + (y - y_{\mathrm{B}}) = \mathrm{const}\,,$$

の関係を満たす．今，y が一定より t の 2 階微分を考えて，

$$(0 - a) + (0 - b) = 0\,, \qquad \therefore \underline{a + b = 0}\,.$$

(2)　前問の y が変化する場合を考えればよいので，t の 2 階微分を考えて，

$$(c - a) + (c - b) = 0\,, \qquad \therefore \underline{a + b = 2c}\,.$$

(3)　定滑車の位置を (x_0, y_0)（全て定数）とする．このとき，糸の長さは[*28][*29]，

$$(x_0 - x_{\mathrm{A}}) + (y_0 - y_{\mathrm{B}}) + (y_0 - y_{\mathrm{B}}) = \mathrm{const}\,,$$

の関係を満たし，t の 2 階微分を考えて，

$$(0 - a) + (0 - b) + (0 - b) = 0\,, \qquad \therefore \underline{a + 2b = 0}\,.$$

(4)　左右の滑車の位置を y_0（定数）とする．このとき，糸の長さは，

$$(y_0 - y_{\mathrm{A}}) + 2(y_0 - y_{\mathrm{C}}) + (y_0 - y_{\mathrm{B}}) = \mathrm{const}\,,$$

の関係を満たし，t の 2 階微分を考えて，

$$(0 - a) + 2(0 - c) + (0 - b) = 0\,, \qquad \therefore \underline{a + b + 2c = 0}\,.$$

(5)　物体 B に直接つながる糸を糸 1，A 側の糸を糸 2 とする．糸 2 がかかる動滑車の位置を y，定滑車の位置を y_0 とすると，それぞれの糸の長さは，

$$\begin{cases} \text{糸 1}：(y_0 - y_{\mathrm{B}}) + 2(y_0 - y) = \mathrm{const}\,, \\ \text{糸 2}：(y_0 - y_{\mathrm{A}}) + (y - y_{\mathrm{A}}) = \mathrm{const}\,, \end{cases}$$

[*28] 細かく言えば，滑車と物体 B を繋ぐ糸に関しても束縛条件を考える必要があるが，滑車の位置を y' とすると，$y' = y_{\mathrm{B}} + \mathrm{const}$ となり，ほとんど自明な束縛条件となるためここでは省略した．以降の設問でも同様に省略する．

[*29] 物体 B の繋がる動滑車の右側の糸は，本来は天井から滑車までが糸の長さだが，定滑車の位置と天井の位置は常に一定なので，定滑車の位置から動滑車の位置までと読んでも定数分のずれしかなく問題はない（V の糸 2 でも同様の議論がある）．

の関係を満たし，t の 2 階微分を考えて，$\ddot{y} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$ すれば，

$$\begin{cases} \text{糸}\,1:(0-b)+2(0-\ddot{y})=0\,, \\ \text{糸}\,2:(0-a)+(\ddot{y}-a)=0\,, \end{cases} \qquad \therefore \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{4a+b=0}\,.$$

15. 糸による束縛①

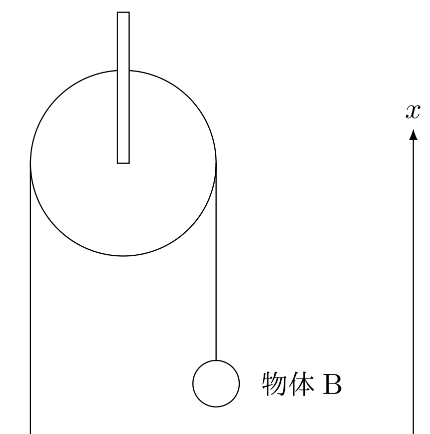
物体 A（質量 m）と物体 B（質量 M）を軽く伸び縮みしない糸で繋ぎ，滑車（質量 μ）にかけた．糸と滑車の間には摩擦はなく，滑車の回転は考えないものとする．鉛直上向きに x 軸を定める．重力加速度の大きさを g とする．

(1)　滑車に鉛直上向きに大きさ F_0 の力を加えたところ，滑車は静止したままであった．このとき，物体 A，B の運動について考える．

- (1)　物体 A，B の加速度を鉛直上向きにそれぞれ a，b，糸の張力の大きさを T とする．物体 A，B の運動方程式をそれぞれ立式せよ．
- (2)　糸が伸び縮みしないことから，a，b の間に成り立つ関係式を求めよ．
- (3)　a，b，T，F_0 を求めよ．

(2)　滑車に鉛直上向きに大きさ $F\,(> F_0)$ の力を加え，一定の加速度で運動させた．このとき，物体 A，B の運動について考える．ここでは，$m_{\mathrm{A}} = m$，$m_{\mathrm{B}} = 3m$ とする．

- (1)　物体 A，B の加速度を鉛直上向きにそれぞれ a，b，滑車の加速度を鉛直上向きに c，糸の張力の大きさを T とする．物体 A，B，滑車の運動方程式をそれぞれ立式せよ．
- (2)　糸が伸び縮みしないことから，a，b，c の間に成り立つ関係式を求めよ．
- (3)　a，b，c，T を求めよ．



【メモ】

張力は未知量なので，運動方程式だけでは式が不足する．そこで，束縛条件（糸の長さが一定の条件）を考える．

【解答】

(1) (1)　各物体の運動方程式は以下の通りである．

$$\begin{cases} \text{物体 A} : \underline{ma = T - mg}\,, \\ \text{物体 B} : \underline{Mb = T - Mg}\,. \end{cases}$$

(2)　滑車の位置を X とする（ただし，今 X は定数）．糸の長さが一定なことより物体 A，B の位置は，

$$(X - x_{\mathrm{A}}) + (X - x_{\mathrm{B}}) = \mathrm{const}$$

の関係を満たす．この式の時間の 2 階微分（時間変化を 2 回取ること）を考えて

$$\underline{a + b = 0}\,.$$

(3)　束縛条件を使い，運動方程式を解いて，

$$a = \frac{M - m}{\underline{M + m}}g\,,\quad b = -\frac{M - m}{\underline{M + m}}g\,,\quad T = \frac{2Mm}{\underline{M + m}}g\,.$$

また，滑車の運動方程式（加速度 0 なので力のつりあいの式と呼んでも良い）より，

$$\mu \cdot 0 = F_0 - 2T - \mu g\,,\qquad \therefore F_0 = \underline{\frac{4Mm}{M + m}g + \mu g}\,.$$

(2) (1)　各物体の運動方程式は以下の通りである．

$$\begin{cases} \text{物体 A} : \underline{ma = T - mg}\,, \\ \text{物体 B} : \underline{3mb = T - 3mg}\,, \\ \text{滑車} : \underline{\mu c = F - 2T - \mu g}\,. \end{cases}$$

(2)　I(2) 同様にして，

$$\underline{2c - a - b = 0}\,.$$

(3)　束縛条件を使い，運動方程式を解いて[*30]，

$$a = \frac{3F}{2\mu + 6m} - g\,,\quad b = \frac{F}{2\mu + 6m} - g\,,$$

$$c = \frac{F}{\mu + 3m} - g\,,\quad T = \frac{3m}{2\mu + 6m}F\,.$$

[*30] 各運動方程式から加速度を T を含む形で表し，それを束縛条件へ代入することで T から求める，とするのが楽.

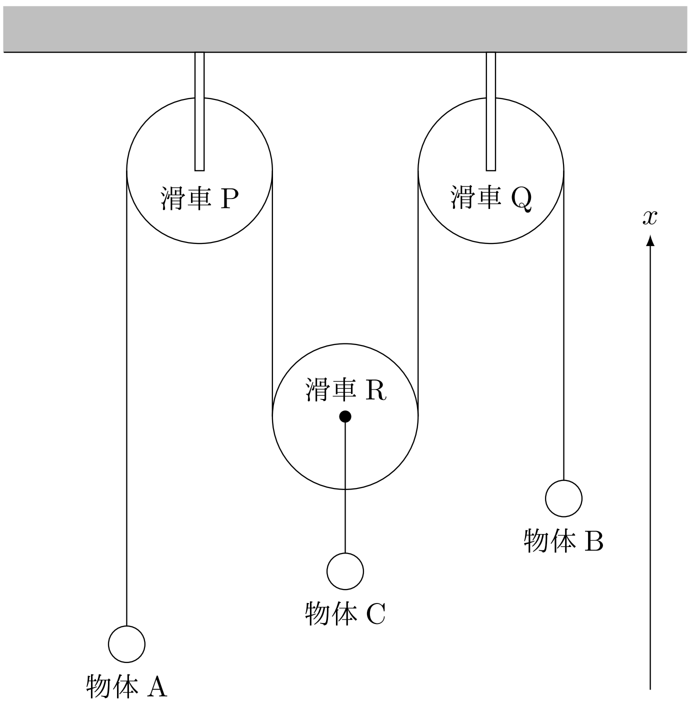
16. 糸による束縛②

物体 A（質量 m）と物体 B（質量 $2m$）を糸で繋ぎ，天井に吊るされた滑車 P，Q にかけた．その間に滑車 R をかけ，滑車 R には物体 C（質量 $3m$）を糸で繋いである．全ての物体が静止している状態から静かに手を放した．全ての滑車と糸は質量が無視でき，糸に関しては伸び縮みせず，糸と滑車の間の摩擦はなく，滑車の回転は考えないものとする．鉛直上向きに x 軸を定める．重力加速度の大きさを g とする．

(1) 物体 A，B，C の加速度をそれぞれ a_{A}，a_{B}，a_{C}，物体 A と物体 B を結ぶ糸の張力の大きさを T_1，物体 C に繋がる糸の張力の大きさを T_2 とする．物体 A，B，C，滑車 R の運動方程式をそれぞれ立式せよ．

(2) 糸が伸び縮みしないことから，a_{A}，a_{B}，a_{C} の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3) a_{A}，a_{B}，a_{C}，T_1，T_2 を求めよ．



【メモ】

動滑車固有の特別な考えみたいなものは要らない．今の場合，滑車の運動方程式は質量が 0 で立式する．

【解答】

(1)　各物体の運動方程式は以下の通りである[*31]．

$$\begin{cases} \text{物体 A :} \underline{ma_{\mathrm{A}} = T_1 - mg}\,, \\ \text{物体 B :} \underline{2ma_{\mathrm{B}} = T_1 - 2mg}\,, \\ \text{物体 C :} \underline{3ma_{\mathrm{C}} = T_2 - 3mg}\,, \\ \text{滑車 R :} \underline{0 \cdot a_{\mathrm{C}} = 2T_1 - T_2}\,. \end{cases}$$

(2)　定滑車の位置を x_0 とする．糸の長さが一定なことより物体 A，B，C の位置は，

$$(x_0 - x_{\mathrm{A}}) + (x_0 - x_{\mathrm{B}}) + 2(x_0 - x_{\mathrm{C}}) = \mathrm{const}$$

の関係を満たす．この式の時間 2 階微分（時間変化を 2 回取ること，以後省略）を考えて，

$$\underline{a_{\mathrm{A}} + a_{\mathrm{B}} + 2a_{\mathrm{C}} = 0}\,.$$

(3)　束縛条件を使い，運動方程式を解いて[*32]

$$a_{\mathrm{A}} = \underline{\frac{7}{17}g}\,,\quad a_{\mathrm{B}} = \underline{-\frac{5}{17}g}\,,\quad a_{\mathrm{C}} = \underline{-\frac{1}{17}g}\,,\quad T_1 = \underline{\frac{24}{17}mg}\,,\quad T_2 = \underline{\frac{48}{17}mg}\,.$$

[*31] 物体 C と滑車 R の加速度が等しいというところにも，糸の長さが一定という条件を暗黙裡に使用している．

[*32] 各運動方程式から加速度を T_1 を含む形で表し，それを束縛条件へ代入することで T_1 から求める，とするのが楽．

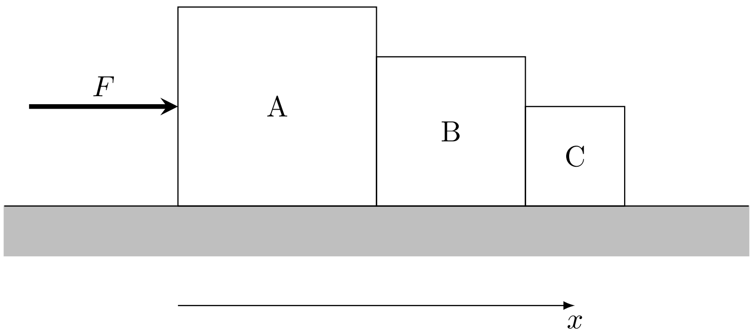
17. 面による束縛①

滑らかな水平の床の上に，質量 m_{A}，m_{B}，m_{C} の物体 A，B，C を並べて置き，物体 A に水平右向きの一定な力 F を加える．水平右向きに x 軸を定める．

(1)　物体 A，B，C の加速度をそれぞれ a_{A}，a_{B}，a_{C}，物体 B が物体 A から受ける垂直抗力を N_1，物体 C が物体 B から受ける垂直抗力の大きさを N_2 とする．各物体について運動方程式を立式せよ．

(2)　各物体が変形しないことから，a_{A}，a_{B}，a_{C} の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3)　a_{A}，a_{B}，a_{C}，N_1，N_2 を求めよ．



【メモ】

垂直抗力は未知量なので，運動方程式だけでは式が不足する．そこで，束縛条件（面が変形しない条件）を考える．全体の運動方程式を考えても a，F は求められるが，N が求まらない．部分から全体を知ることはできるが，全体から部分を知ることはできない[*33]．

【解答】

(1)　各物体の運動方程式は以下の通りである．

$$\begin{cases} \mathrm{A}: m_{\mathrm{A}}a_{\mathrm{A}} = F - N_1\,, \\ \mathrm{B}: m_{\mathrm{B}}a_{\mathrm{B}} = N_1 - N_2\,, \\ \mathrm{C}: m_{\mathrm{C}}a_{\mathrm{C}} = N_2\,. \end{cases}$$

(2)　各物体の変位（位置の変化分）は，

$$\Delta x_{\mathrm{A}} = \Delta x_{\mathrm{B}} = \Delta x_{\mathrm{C}}$$

の関係を満たす[*34]．この式の時間 2 階微分を考えて，

$$a_{\mathrm{A}} = a_{\mathrm{B}} = a_{\mathrm{C}}\,.$$

(3)　束縛条件を使い，運動方程式を解いて，

$$a_{\mathrm{A}} = a_{\mathrm{B}} = a_{\mathrm{C}} = \frac{F}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}}\,,$$

$$N_1 = \frac{m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}}F\,,\quad N_2 = \frac{m_{\mathrm{C}}}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} + m_{\mathrm{C}}}F\,.$$

[*33] 今（最初）は，部分から構成されるものとしての全体，という認識が大切．理由は前述の通り．しかし，学習が進んでいくと，全体に注目することで興味深い量（変わらない量）が見えてきたり（○○保存則），逆に，全体から部分を構成するような話もある（熱力学→分子運動論）．

[*34] 各物体の位置は定数（物体の幅 ℓ_{B}，ℓ_{C}）だけずれる．すなわち，

$$x_{\mathrm{B}} = x_{\mathrm{A}} + \ell_{\mathrm{B}}\,,\quad x_{\mathrm{C}} = x_{\mathrm{A}} + \ell_{\mathrm{B}} + \ell_{\mathrm{C}}$$

の関係を満たす．

18. 面による束縛②

傾斜角 θ の滑らかな斜面上に，質量 m の物体を静かに置く．物体は水平面上を滑り始めた．斜面した向きに x 軸，斜面垂直上向きに y 軸を定める．重力加速度の大きさを g とする．

(1) 物体の x 方向の加速度を a_x，y 方向の加速度を a_y，物体が斜面から受ける垂直抗力の大きさを N とする．物体の運動方程式を立式せよ．

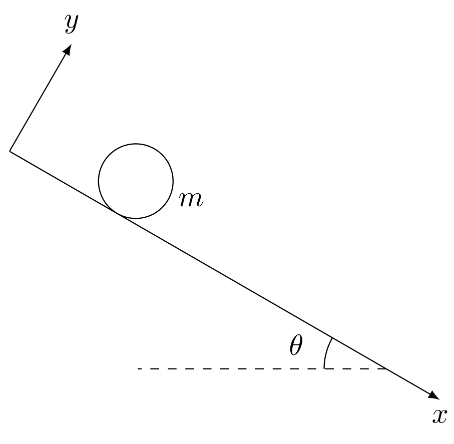
(2) 床が変形しないこと，および物体が床から離れないことから a_y を求めよ．

(3) a_x を求めよ．

(4) 初期条件（t=0 での物体の位置と速度の値）は $x(0) = 0$，$v(0) = 0$ とする．物体の x 方向の速度速度成分 v，および位置 x をそれぞれ時刻 t の関数として求めよ．

(5) 物体が距離 ℓ だけ滑るのに要した時間を求めよ．

(6) ℓ だけ滑ったときの物体の速さ v を求めよ．



【メモ】

(4)〜(6) で，運動の具体的な状況を問う設問を追加してみた．加速度の大きさが一定なことより，等加速度運動のときに使える公式を用いている（第 1 章参照）．

【解答】

(1)　物体の運動方程式は以下の通りである．

$$\begin{cases} ma_x = mg\sin\theta\,, \\ ma_y = N - mg\cos\theta\,. \end{cases}$$

(2)　物体の運動は常に $y = 0$ を満たす．ゆえに，

$$a_y = 0\,.$$

(3)　x 方向の運動方程式より，

$$a_x = g\sin\theta\,.$$

(4)　加速度一定より等加速度運動の位置の公式に初期条件 $x(0) = 0$，$v(0) = 0$ を代入して，

$$\begin{cases} v(t) = g\sin\theta t\,, \\ x(t) = \dfrac{1}{2}g\sin\theta t^2\,. \end{cases}$$

(5)　$x = \ell$ となる時刻は，

$$t = \sqrt{\frac{2\ell}{g\sin\theta}}\,.$$

(6)　(5) の結果を速度の式に代入して，

$$v = g\sin\theta t = g\sin\theta\sqrt{\frac{2\ell}{g\sin\theta}} = \sqrt{2g\ell\sin\theta}\,.$$

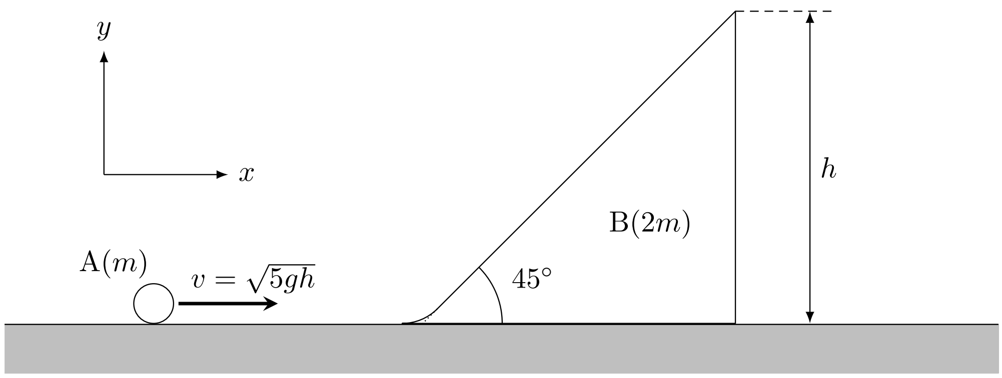
19. 面による束縛③

水平な床の上に物体 A（質量 m）と物体 B（質量 $2m$，傾斜角 45°）を置く．水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．物体 A に x 正方向に初速度を与えたところ，A は B の斜面上を運動した．物体 B と床はなめらかに繋がっており，一切の摩擦は無視する．重力加速度の大きさを g とする．

(1) 三角台と小物体の間にはたらく垂直抗力の大きさを N とする．三角台の x 方向の加速度を A_x，小物体の x 方向の加速度を a_x，y 方向の加速度を a_y とする．台の x 方向の運動方程式と，小物体の x 方向，および y 方向の運動方程式をそれぞれ立式せよ．

(2) 小物体が三角台の斜面上を運動することから，A_x，a_x，a_y の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3) A_x，a_x，a_y，N を求めよ．



【メモ】

三角台が動くため，「小球は三角台の斜面垂直方向に運動しない」といった考えは誤り．イメージで解かないで，面を介したら，運動方程式と束縛条件．

【解答】

(1)　各物体の運動方程式は以下の通りである．

$$\begin{cases} ma_x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}N\,, \\ ma_y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}N - mg\,, \\ 2mA_x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}N\,. \end{cases}$$

(2)　三角台の先端の位置を $(X, 0)$，小物体の位置を (x, y) とすると，これらは常に

$$y = (x - X)\tan 45^\circ = x - X$$

の関係を満たす．この式の時間の 2 階微分を考えて，

$$a_y = a_x - A_x\,.$$

(3)　束縛条件を使い，運動方程式を解いて[*35]，

$$A_x = \frac{1}{5}g\,,\quad a_x = -\frac{2}{5}g\,,\quad a_y = -\frac{3}{5}g\,,\quad N = \frac{2\sqrt{2}}{5}mg\,.$$

[*35] 運動方程式から加速度を N を含む形で表し，それを束縛条件へ代入することで N から求める，というのが楽．

20. 面による束縛③の類題

図のように，三角台（質量 $2m$，傾斜角 30°）を水平面上に置き，三角台の斜面上に質量 m の小物体を静かに置いた．水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を定める．床と三角台，三角台と小球の間の摩擦はないものとする．重力加速度の大きさを g とする．

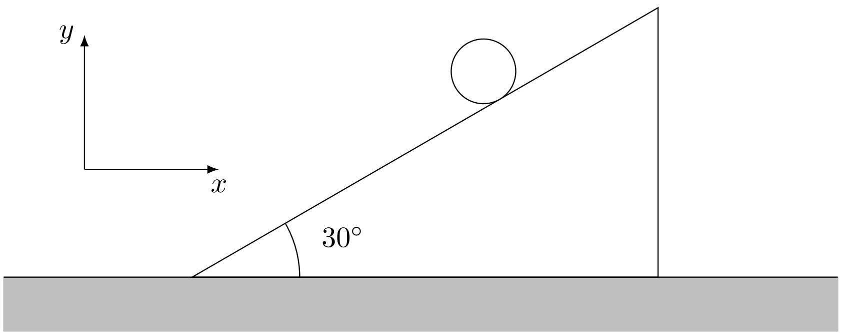
(1)　三角台と小物体の間にはたらく垂直抗力の大きさを N とする．三角台の x 方向の加速度を A_x，小物体の x 方向の加速度を a_x，y 方向の加速度を a_y とする．台の x 方向の運動方程式と，小物体の x 方向，および y 方向の運動方程式をそれぞれ立式せよ．

(2)　小物体が三角台の斜面上を運動することから，A_x，a_x，a_y の間に成り立つ関係式を求めよ．

(3)　A_x，a_x，a_y，N を求めよ．

(4)　始状態での小物体の位置を $(\sqrt{3}\,h, h)$ とする．小物体が水平面に達する直前の小物体の位置 $(x, 0)$，および速度 (v_x, v_y) を求めよ．

(5)　三角台を固定した場合と固定しない場合で，水平面に達した小物体の速さの大小関係について述べよ．



【解答】

(1)　各物体の運動方程式は以下の通りである．

$$
\begin{cases}
ma_x = -\dfrac{1}{2}N\,, \\[2mm]
ma_y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}N - mg\,, \\[2mm]
2mA_x = \dfrac{1}{2}N\,.
\end{cases}
$$

(2)　三角台の先端の位置を $(X,\,0)$，小物体の位置を $(x,\,y)$ として，

$$
y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - X)\,, \qquad \therefore a_y = \frac{1}{\sqrt{3}}(a_x - A_x)\,.
$$

(3)　束縛条件，および運動方程式より，

$$
A_x = \frac{\sqrt{3}}{9}g\,,\quad a_x = -\frac{2\sqrt{3}}{9}g\,,\quad a_y = -\frac{1}{3}g\,,\quad N = \frac{4\sqrt{3}}{9}mg\,.
$$

(4)　(3) より，

$$
\begin{cases}
x = \sqrt{3}\,h - \dfrac{\sqrt{3}}{9}gt^2\,, \\[2mm]
y = h - \dfrac{1}{6}gt^2\,,
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
v_x = -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}gt\,, \\[2mm]
v_y = -\dfrac{1}{3}gt\,.
\end{cases}
$$

$y = 0$ を解いて $t = \sqrt{6h/g}$ より，

$$
x = \frac{\sqrt{3}}{3}h\,,\quad v_x = -\frac{2}{3}\sqrt{2gh}\,,\quad v_y = -\frac{1}{3}\sqrt{6gh}\,.
$$

(5)　(4) より，三角台が自由な場合の，水平面に達する直前の小物体の速さ v_{free} は，

$$
v_{\mathrm{free}} = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\sqrt{2gh}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\sqrt{6gh}\right)^2} = \frac{\sqrt{14gh}}{3}\,.
$$

一方，三角台を固定した場合の，水平面に達する直前の小物体の速さは $v_{\mathrm{fix}} = \sqrt{2gh}$ である[*36]．よって，$v_{\mathrm{free}} < v_{\mathrm{fix}}$ とわかる[*37][*38]．

[*36] この計算は問題 ***16*** を参照し，各自行うこと．

[*37] ともに正の量ゆえ 2 乗しても大小関係は変わらず，$2 = \dfrac{18}{9} > \dfrac{14}{9}$．

[*38] 次章の話：固定の場合，重力のする仕事は小物体にのみ寄与するが，三角台も動く場合，重力のする仕事は小物体と三角台の 2 つに分配されるため，前者の方が速さ（運動エネルギー）は大きくなるとわかる．

21 . 面による束縛④

図のような，水平な床の上での三角台（質量 M，斜面の傾斜角 θ）と，鉛直な壁と三角台に挟まれた球（質量 m）の運動について考えよう．運動はすべて紙面で表される同一鉛直面内で起こるものとし，三角台が倒れることや，球が回転することは考えない．また，壁と球，三角台の斜面との間に摩擦はないものとし，重力加速度の大きさを g とする．

水平右向きに x 軸を，鉛直上向きに y 軸を定め，三角台の位置は左下端の x 座標 X で表す．また，図の実線で示したように，三角台の左下端が壁に接触するときに $X = 0$ であるとする．

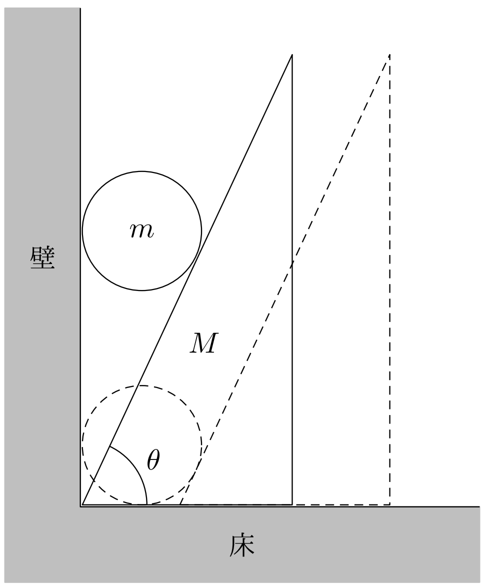
はじめ，三角台に外力を加えて，図の実線の状態（$X = 0$）に保持しておき，そっと手を放したところ，三角台は右向きに大きさ A の加速度で，小球は下向きに大きさ a の加速度で運動を始めた．球と三角台の間にはたらく垂直抗力を N とする．

(1)　各物体の運動方程式をそれぞれ立式せよ．なお，小球の加速度の符号に注意せよ．

(2)　球が三角台の斜面上をすべるように運動することから，a と A の間に成り立つ関係式を立式せよ．

（ヒント）球の座標は三角台との接している点で考えると分かり易い．

(3)　a，A，N を求めよ．



【解答】

(1)　各物体の運動方程式は，

$$
\begin{cases}
y : m(-a) = N\cos\theta - mg\,, \\
x : MA = N\sin\theta\,.
\end{cases}
$$

(2)　球の接地点を (x, y)，三角台の左下端を $(X, 0)$ とする．このとき，三角台の面，および壁，床の面が変形せず球が三角台上を滑ることから常に

$$y = (x - X)\tan\theta$$

の関係を満たす．この両辺の t の 2 階微分を取って，

$$a = A\tan\theta\,.$$

(3)　運動方程式・束縛条件より，

$$a = \frac{m\sin^2\theta}{m\sin^2\theta + M\cos^2\theta}g\,,\quad A = \frac{m\sin\theta\cos\theta}{m\sin^2\theta + M\cos^2\theta}g\,,\quad N = \frac{Mm\cos\theta}{m\sin^2\theta + M\cos^2\theta}g\,.$$

22. 流体から受ける力①

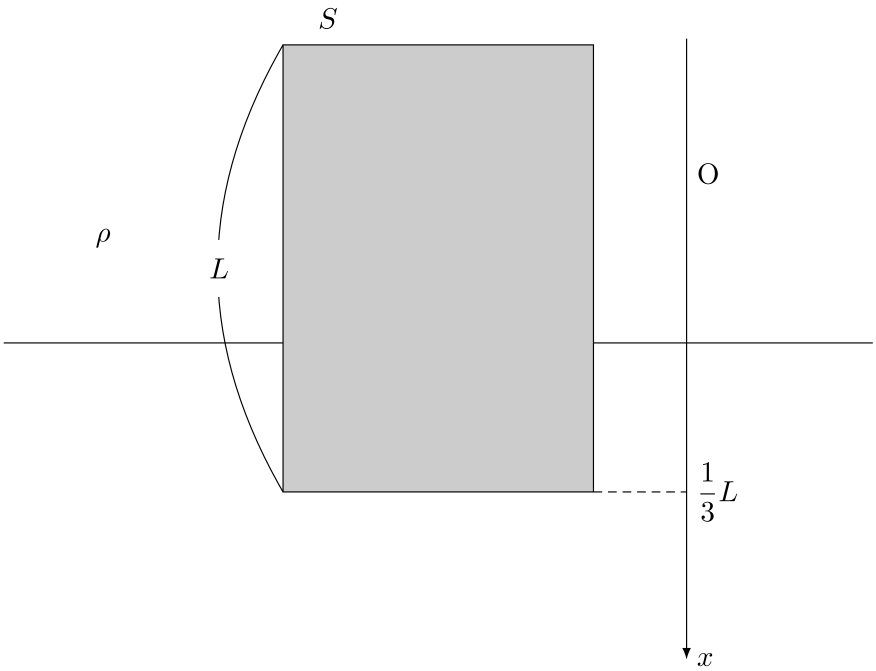
物体（断面積 S，高さ L）を液体（密度 ρ）の上に浮かべたところ，物体は水面から $\dfrac{1}{3}L$ だけ沈み静止した．鉛直下向きに x 軸を定め，物体の位置 x は物体底面の位置とし，水面を原点に取る．重力加速度の大きさを g とし，液面の高さの変化を無視する．

(1)　大気圧を P_0 とする．物体にはたらく大気圧，液圧を考えることにより物体の質量 m を求めよ．

(2)　物体にはたらく浮力を考えることにより物体の質量 m を求めよ．

(3)　物体の底面が $0 \leq x \leq L$ にあるとき，物体にはたらく力 f を x を含む式で表せ．

(4)　物体の底面が $L \leq x$ にあるとき，物体にはたらく力 f を求めよ．



【メモ】

浮力と水圧は同時に考えてはいけない（考えるときはどちらか一方だけ）.

【解答】

(1)　つりあい（運動方程式の加速度 0）より，

$$m \cdot 0 = mg + P_0 S - \left(P_0 + \rho \frac{L}{3} g\right) S\,, \qquad \therefore m = \frac{1}{3}\rho S L\,.$$

(2)　つりあい（運動方程式の加速度 0）より，

$$m \cdot 0 = mg - \rho S \frac{L}{3} g\,, \qquad \therefore m = \frac{1}{3}\rho S L\,.$$

(3)　はたらく力（運動方程式の右辺）は，

$$f = mg + P_0 S - (P_0 + \rho g x) S = \frac{1}{3}\rho S L g - \rho S g x \left(= \frac{\rho S L g}{3}\left(1 - \frac{3x}{L}\right)\right)\,.$$

(4)　はたらく力（運動方程式の右辺）は，

$$f = mg + P_0 S - (P_0 + \rho g L) S = \frac{1}{3}\rho S L g - \rho S g L = -\frac{2}{3}\rho S L g\,.$$

23. 流体から受ける力②

物体（質量 M，密度 ρ'）を液体（密度 $\rho\,(>\rho')$）の上に浮かべたところ，物体は水面から h だけ沈み静止した．鉛直下向きに x 軸を定め，物体の位置 x は物体底面の位置とし，水面を原点に取る．重力加速度の大きさを g とし，液面の高さの変化を無視する．

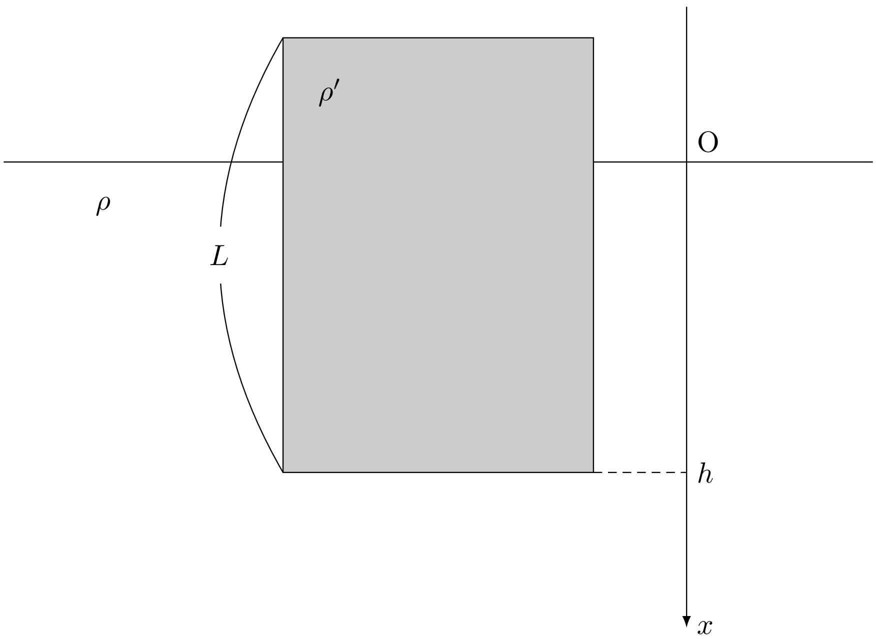
(1) 物体の液面と平行な断面の面積 S を求めよ．

(2) 大気圧を P_0 とする．物体にはたらく大気圧，液圧を考えることにより h を求めよ．

(3) 物体にはたらく浮力を考えることにより h を求めよ．

(4) 物体の位置が $0 \leq x \leq L$ のとき，物体の加速度 a を，x を含む式で表せ．

(5) 物体の位置が $L \leq x$ のとき（全て液中に沈んでいるとき），物体の加速度 a を求めよ．



【解答】

(1)　密度の定義より，

$$M = \rho' S L\,, \qquad \therefore S = \frac{M}{\rho' L}\,.$$

(2)　運動方程式より，

$$M \cdot 0 = P_0 S - (P_0 S + \rho g S h) + M g\,, \qquad \therefore h = \frac{\rho'}{\rho} L\,.$$

(3)　運動方程式より，

$$M \cdot 0 = -\rho \frac{M}{\rho' L} h g + M g\,, \qquad \therefore h = \frac{\rho'}{\rho} L\,.$$

(4)　運動方程式より，

$$M a = -\rho \frac{M}{\rho' L} g x + M g\,, \qquad \therefore a = -\frac{\rho g}{\rho' L}\left(x - \frac{\rho'}{\rho} L\right).$$

(5)　運動方程式より，

$$a = -\rho \frac{M}{\rho' L} g L + M g\,, \qquad \therefore a = \left(1 - \frac{\rho}{\rho'}\right) g\,.$$

§1.3 エネルギーと仕事

第 3 章では，エネルギーという物理量に注目し，運動を解析する．エネルギーによる議論では，特に「どこまでを 1 つの系と見なすか」が重要となる．エネルギー収支の式は運動方程式と数学的に同値な関係にあるが，エネルギー収支での議論は時刻 t が現れず，計算の手順が少ないという特徴がある．また，仕事という物理量に関して，その計算方法は高校範囲では 3 つに分類される．仕事の計算についてもこの章できちんと押さえたい．

■簡単なまとめ

- 各種エネルギーの公式：
  - ❶ 運動エネルギー $K=\dfrac{1}{2}mv^2$（m：質量，v：速さ）
  - ❷ 重力の位置エネルギー $U=mgz$（g：重力加速度の大きさ，z：基準点からの高さ）
  - ❸ 弾性エネルギー $U=\dfrac{1}{2}ks^2$（k：ばね定数，s：ばねの伸縮）
- 物体の運動のエネルギー収支の式：

$$K_{\text{おわり}}-K_{\text{はじめ}}=W$$

なお，物体にはたらく力が重力，弾性力の場合は，仕事を計算してから上手いこと式をまとめることで，

$$K_{\text{おわり}}+U_{\text{おわり}}=K_{\text{はじめ}}+U_{\text{はじめ}}$$

となる．これを力学的エネルギー保存則と呼んでいる．今後，（高校範囲では）位置エネルギーの公式は残り 2 つ習い（万有引力，クーロン力の 2 つ），計 4 つ覚えることになる．

- 仕事の計算の分類：

$$W=\begin{cases}\cdot\text{力 } f \text{ の具体的な形が既知} \quad \to \quad \text{定義から直接計算} \\ \qquad \to \begin{cases} f \text{ 一定な場合：} |f||\Delta x|\cos\theta(\Delta x\text{：変位}) \\ f \text{ が一定出ない場合：}(f \text{ の } x \text{ 積分}) = (f-x \text{ グラフの面積}) \end{cases} \\ \cdot\text{力 } f \text{ の具体的な形が不明} \quad \to \quad \text{エネルギー収支から逆算} \end{cases}$$

1. 導入（気持ちを知る）用の問題

時刻 $t=0$ に，位置 $x(0)$，速度 $v(0)$ の状態の物体に x 軸正の方向に一定の力 f を加えた．時刻 t での物体の位置，および速度をそれぞれ $x(t)$，$v(t)$ と表す．

(1)　運動方程式から物体の加速度 a を求めよ．また，物体の位置 x，および速度 v をそれぞれ時刻 t の関数として表せ．

(2)　$x=x(t)$，$v=v(t)$ より，時刻 t を消去することで，以下の x と v の関係式が得られることを確認せよ．

$$\frac{1}{2}mv(t)^2-\frac{1}{2}mv(0)^2=f\mathit{\Delta}x\,,\quad \mathit{\Delta}x=x(t)-x(0)\,.$$

【解答】

(1)　運動方程式より，

$$ma=f\,,\quad \therefore a=\frac{F}{m}\,.$$

よって，F，m が一定なことより，

$$\begin{cases} v(t)=v(0)+\dfrac{f}{m}t\,, \\ x(t)=x(0)+v(0)t+\dfrac{1}{2}\dfrac{f}{m}t^2\,. \end{cases}$$

(2)　速度 v の式より $t=\dfrac{m}{f}(v(t)-v(0))$ であり，これを位置 x の式に代入して[*39]，

$$\frac{1}{2}mv(t)^2-\frac{1}{2}mv(0)^2=f(x(t)-x(0))\,.$$

[*39] この式の左辺の量を，運動エネルギー，右辺の量を仕事と呼ぶ．なお，この式の両辺を $\dfrac{2}{m}$ 倍することで，

$$v(t)^2-v(0)^2=2\frac{f}{m}(x(t)-x(0))=2a(x(t)-x(0))$$

のようにも変形できるが，この式には物理的な意味はない．

2. エネルギー収支①

物体（質量 m）を地面からの高さ h の地点から静かに手を放した．重力加速度の大きさを g とする．

(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，落下直前の物体の速さ v を求めよ．

(2)　運動方程式を利用し，時間追跡によって得られた結果が (1) と整合していることを確認せよ．

【解答】

(1)　物体には鉛直下向きに大きさ mg の重力がはたらく．エネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = mgh\,, \qquad \therefore v = \sqrt{2gh}\,.$$

(2)　鉛直上向きを正，地面を $y = 0$ とする．運動方程式より，

$$ma = -mg\,, \qquad \therefore a = -g$$

であるから，物体の位置 y，および速度 v はそれぞれ時刻 t の関数として[*40]，

$$\begin{cases} v(t) = -gt\,, \\ y(t) = h - \dfrac{1}{2}gt^2\,. \end{cases}$$

$y = 0$ を満たす t は $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ ゆえ，この瞬間の物体の速さ $|v|$ は，

$$|v| = \sqrt{2gh}\,.$$

[*40] (1) では v を速さとして用いたが，ここでは速度として v を用いる．

3. エネルギー収支②

なめらかな斜面（傾斜角 θ）上にある物体（質量 m）を，斜面下向きに速さ v_0 で打ち出した．物体が斜面上を ℓ だけすべったときの物体の速さを v とする．重力加速度の大きさを g とする．

(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，v を求めよ．

(2)　運動方程式を利用し，時間追跡によって得られた結果が (1) と整合していることを確認せよ．

【解答】

(1)　物体には，鉛直下向きに重力，斜面と直交する方向に垂直抗力がはたらく．垂直抗力は変位と直交するためその仕事はゼロ．よって，重力の仕事だけを考えればよく，エネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = mg\ell\cos(90^\circ - \theta) = mg\ell\sin\theta\,, \qquad \therefore v = \underline{\sqrt{{v_0}^2 + 2g\ell\sin\theta}}\,.$$

(2)　斜面下向きを正に x 軸を定め，その原点を始状態の位置とする．運動方程式より，

$$ma = mg\sin\theta\,, \qquad \therefore a = g\sin\theta\,.$$

よって，物体の位置，および速度は，

$$\begin{cases} v(t) = v_0 + g\sin\theta t\,, \\ y(t) = v_0 t + \dfrac{1}{2}g\sin\theta t^2\,. \end{cases}$$

$x = \ell$ を満たす t は，

$$v_0 t + \frac{1}{2}g\sin\theta t^2 = \ell\,, \qquad \therefore t = \frac{v_0}{g\sin\theta}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2g\ell\sin\theta}{{v_0}^2}}\right)$$

ゆえ[*41]，この瞬間の物体の速さ v は，

$$v = v_0 + g\sin\theta\frac{v_0}{g\sin\theta}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2g\ell\sin\theta}{{v_0}^2}}\right) = \underline{\sqrt{{v_0}^2 + 2g\ell\sin\theta}}\,.$$

[*41] $t > 0$ の解を選ぶ．

4. エネルギー収支③（摩擦）

図のように，x 軸を右向き正，y 軸を鉛直上向き正に定め，静止している物体（質量 m）に x 正方向で大きさ f の力を加え，x 正方向に ℓ 変位したときの物体の速さを v とする．

I　物体と床との間の摩擦を無視する．

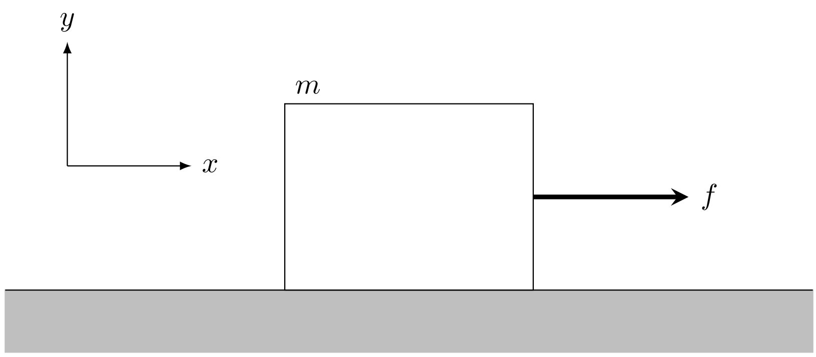
(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，v を求めよ．

(2)　運動方程式を利用し，時間追跡によって得られた結果が (1) と整合していることを確認せよ．

II　物体と床との間の動摩擦係数を μ とする．

(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，v を求めよ．

(2)　運動方程式を利用し，時間追跡によって得られた結果が (1) と整合していることを確認せよ．



【解答】

I (1)　物体が外部からされる仕事の合計は，

$$W = f\ell\,.$$

物体のエネルギー収支を考えて，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = f\ell\,, \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{2f}{m}\ell}}\,.$$

(2)　運動方程式より，

$$\begin{cases} ma = f\,, \\ m\cdot 0 = N - mg\,, \end{cases} \qquad \therefore a = \frac{f}{m}\,,\quad N = mg\,.$$

加速度が一定なことより，$x(0)=0$ ととって[*42]，

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{f}{2m}t^2\,, \\ v(t) = \dfrac{f}{m}t\,. \end{cases} \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{2f}{m}\ell}}\,.$$

II (1)　物体が外部からされる仕事の合計は，

$$W = f\ell - \mu mg\ell = (f-\mu mg)\ell\,.$$

物体のエネルギー収支を考えて，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = (f-\mu mg)\ell\,, \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{2\left(\frac{f}{m}-\mu g\right)\ell}}\,.$$

(2)　運動方程式より，

$$\begin{cases} ma = f - \mu N\,, \\ m\cdot 0 = N - mg\,, \end{cases} \qquad \therefore a = \frac{f}{m} - \mu g\,,\quad N = mg\,.$$

加速度が一定なことより，$x(0)=0$ ととって[*43]，

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{f}{m}-\mu g\right)t^2\,, \\ v(t) = \left(\dfrac{f}{m}-\mu g\right)t\,. \end{cases} \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{2\left(\frac{f}{m}-\mu g\right)\ell}}\,.$$

---

*42 $x=\ell$ を満たす時刻 t は $t=\sqrt{\dfrac{2m\ell}{f}}$ である．

*43 $x=\ell$ を満たす時刻 t は $t=\sqrt{\dfrac{2m\ell}{f-\mu mg}}$ である．

5. エネルギー収支④（摩擦）

図のように，粗い斜面（傾斜角 θ）にある物体（質量 m）に，斜面に沿って斜面上向きの初速度 v_0 を与えた．この時刻を $t=0$ とする．物体は，斜面をすべりあがった後，ある位置で折り返し，斜面下向きに滑り始めた．斜面上向きに x 軸を定め，その原点を $t=0$ における物体の位置に定める．斜面と物体の間の静止摩擦係数を μ_0，動摩擦係数を μ，重力加速度の大きさを g とする．

I　物体の運動を，物体のエネルギー収支によって運動を考察する．

(1)　物体上昇している間，物体にはたらく力の x 成分 f_x を求めよ．また，物体が原点から位置 x まで運動する間に，f_x が物体にした仕事 W を求めよ．

(2)　物体が位置 x にあるときの物体の速度を v とする．このときの物体のエネルギー収支の式を立式せよ．

(3)　物体が折り返した位置 x_0 を求めよ．

(4)　物体が再び $x=0$ を通過する瞬間の物体の速度 v を求めよ．

(5)　物体が最高点で折り返した後，斜面下方向に滑り始めるための $\tan\theta$ の条件を求めよ．

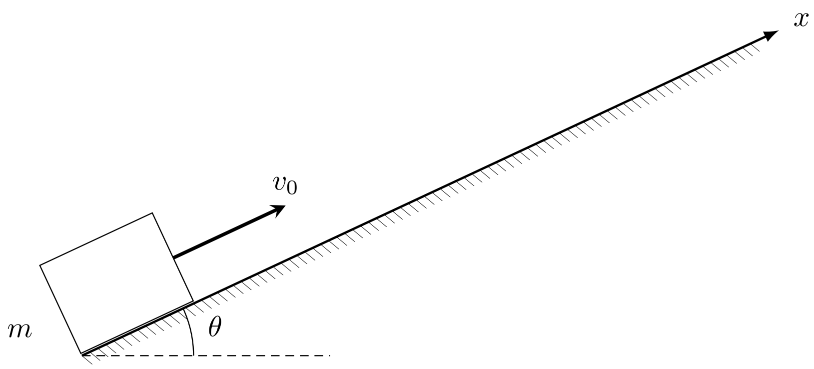
II　物体の運動を，時間追跡によって考察する．

(1)　物体が上昇している間を考える．物体が位置 x にあるときの物体の加速度を a とする．物体の運動方程式を立式せよ．

(2)　物体が上昇している間の物体の位置 x，および速度 v を，それぞれ時刻 t の関数として表せ．

(3)　物体が折り返す時刻 t_0，および折り返す位置 x_0 をそれぞれ求めよ．

(4)　物体が再び $x=0$ を通過する瞬間の物体の速度 v を求めよ．このとき，斜面を上昇する間と下降する間で物体の加速度が異なることに注意せよ．


x
v_0
m
θ

【解答】

I (1)　物体にはたらく力の x 成分 f_x は，

$$f = \underline{-mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta}\,.$$

よって，f_x が物体にする仕事 W は[*44]，

$$W = (-mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta)x\cos 0^\circ = \underline{-mgx(\sin\theta + \mu\cos\theta)}\,.$$

(2)　物体のエネルギー収支は，はじめ $v = v_0$，$x = 0$ より，

$$\underline{\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = -mgx(\sin\theta + \mu\cos\theta)}\,.$$

(3)　エネルギー収支の式に $v = 0$ を代入して，

$$-\frac{1}{2}m{v_0}^2 = -mgx_0(\sin\theta + \mu\cos\theta)\,, \qquad \therefore x_0 = \underline{\frac{{v_0}^2}{2g(\sin\theta + \mu\cos\theta)}}\,.$$

(4)　物体が $x = x_0$ から $x = 0$ へ滑り落ちる間にされた仕事 W' は，

$$W' = (-mg\sin\theta + \mu mg\cos\theta)x_0\cos(180^\circ) = mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)x_0\,.$$

よって，物体のエネルギー収支を考えて，

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)x_0\,, \qquad \therefore v = \underline{-v_0\sqrt{\frac{\tan\theta - \mu}{\tan\theta + \mu}}}\,.$$

(5)　静止しているときを考えて，はたらく静止摩擦力を x 軸正の向きに R とすると[*45]，

$$0 = -mg\sin\theta + R\,, \qquad \therefore R = mg\sin\theta\,.$$

よって，滑らない条件の対偶を考えて，

$$R \geq \mu_0 N = \mu_0 mg\cos\theta\,, \qquad \therefore \underline{\tan\theta \geq \mu_0}\,.$$

II (1)　運動方程式は，

$$\underline{ma = -mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta}\,.$$

[*44] 物体にはたらくそれぞれの力による仕事を計算しても同様の結果を得る（授業ではこのように説明をしている）．

$$W = mgx\cos(\theta + 90^\circ) + Nx\cos(90^\circ) + mumg\cos\theta\cdot x\cos(180^\circ) = -mgx(\sin\theta + \mu\cos\theta)\,.$$

[*45] 静止摩擦については，向きを逆においても，運動方程式（今はつりあい）を解くことで R が求まり，その符号から自分の置いた向きが正しいかどうかを判断できる．

(2)　運動方程式より，

$$a = -g(\sin\theta + \mu\cos\theta)\,.$$

よって，加速度一定より，

$$\begin{cases} x = v_0 t - \dfrac{1}{2}g(\sin\theta + \mu\cos\theta)t^2\,, \\ v = v_0 - g(\sin\theta + \mu\cos\theta)t\,. \end{cases}$$

(3)　静止しているときを考えて，はたらく静止摩擦力を x 軸正の向きに R とすると[*46]，

$$0 = -mg\sin\theta + R\,, \qquad \therefore R = mg\sin\theta\,.$$

よって，滑らない条件の対偶を考えて，

$$R \geq \mu_0 N = \mu_0 mg\cos\theta\,, \qquad \therefore \tan\theta \geq \mu_0\,.$$

(4)　$v = 0$ を解いて，

$$t_0 = \frac{v_0}{g(\sin\theta + \mu\cos\theta)}\,, \qquad \therefore x_0 = \frac{{v_0}^2}{2g(\sin\theta + \mu\cos\theta)}\,.$$

(5)　物体が斜面を下るときの加速度は，動摩擦力の向きが変わることに注意して，

$$ma = -mg\sin\theta + \mu mg\cos\theta\,, \qquad \therefore a = -g(\sin\theta - \mu\cos\theta)\,.$$

折り返した時刻を再度 $t = 0$ と取れば，

$$\begin{cases} x = x_0 - \dfrac{1}{2}g(\sin\theta - \mu\cos\theta)t^2\,, \\ v = -g(\sin\theta - \mu\cos\theta)t\,. \end{cases}$$

よって，$x = 0$ を解いて，

$$t = \sqrt{\frac{2x_0}{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)}}\,, \qquad \therefore v = -\sqrt{2g(\sin\theta - \mu\cos\theta)x_0} = -v_0\sqrt{\frac{\tan\theta - \mu}{\tan\theta + \mu}}\,.$$

[*46] 静止摩擦については，向きを逆においても，運動方程式（今はつりあい）を解くことで R が求まり，その符号から自分の置いた向きが正しいかどうかを判断できる．

6. エネルギー収支⑤（ばね）

図のように，ばね（ばね定数 k）の一端を固定された壁に取り付け，他端を小物体（質量 m）につなぐ．水平右向きに x 軸を定め，その原点をばねが自然長のときの物体の位置に取る．

I　時刻 $t=0$ に原点にある物体に x 軸正の向きに大きさ v_0 の初速度を与えたところ，物体は位置 $x=x_0$ で折り返した．

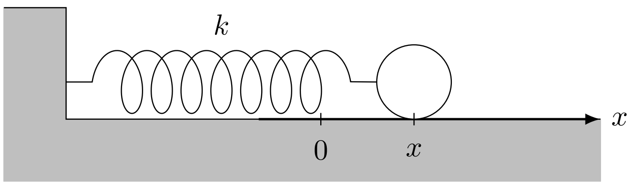
(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，x_0 を求めよ．

(2)　物体とばねを 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）を用いることで，x_0 を求めよ．

II　物体を位置 $x=a$ の位置から静かに手を放した．位置 $x=\dfrac{a}{2}$ における物体の速さを v とする．

(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，v を求めよ．

(2)　物体とばねを 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）を用いることで，v を求めよ．



【メモ】

弾性力のする仕事の計算の確認．積分公式を使えば楽に計算が行えるが，グラフを図示し符号付き面積を計算してもよい（定数関数，1 次関数の場合のみ可能）．また，エネルギーと仕事の関係を論じるときは，どこまでを系と見做すかが重要となる．

【解答】

I (1)　ばねが物体にした仕事 W は[*47]，

$$W = \int_0^{x_0} (-kx)\,dx = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_0^{x_0} = -\frac{1}{2}k{x_0}^2\,.$$

物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}k{x_0}^2\,, \qquad \therefore x_0 = \underset{\sim\sim\sim}{v_0\sqrt{\frac{m}{k}}}\,.$$

(2)　物体とばねを 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 + \frac{1}{2}k{x_0}^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + \frac{1}{2}k\cdot 0^2\,, \qquad \therefore x_0 = \underset{\sim\sim\sim}{v_0\sqrt{\frac{m}{k}}}\,.$$

II (1)　弾性力のする仕事 W は[*48]，

$$W = \int_a^{\frac{1}{2}a} (-kx)\,dx = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_a^{\frac{1}{2}a} = \frac{3}{8}ka^2\,.$$

物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = \frac{3}{8}ka^2\,, \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3k}{m}}}\,.$$

(2)　物体とばねを 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{2}m\cdot 0^2 + \frac{1}{2}ka^2\,, \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3k}{m}}}\,.$$

[*47] グラフによる符号付き面積の計算（図略）: $W = \frac{1}{2}x_0(-kx_0) = -\frac{1}{2}k{x_0}^2\,.$

[*48] グラフ利用 : $W = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a - a\right)\left(-\frac{1}{2}ka - ka\right) = \frac{3}{8}ka^2\,.$

7. エネルギー収支⑥（ばねと重力）

図のように，ばね（ばね定数 k）の一端を固定された床に取り付け，他端を物体（質量 m）に繋ぐ．物体とばねは透明な筒の中にあり，物体の運動は鉛直方向に限られるようになっている．鉛直上向きに x 軸を定め，その原点をばねが自然長の位置に定める．重力加速度の大きさを g とする．

I　物体を手で支え，$x=0$ の位置からゆっくりと鉛直下向きに動かしていくと，物体は位置 $x=-d$ で静止した．d を求めよ．

II　物体を位置 $x=0$ から静かに手を放したところ，$x=s$ で折り返した．

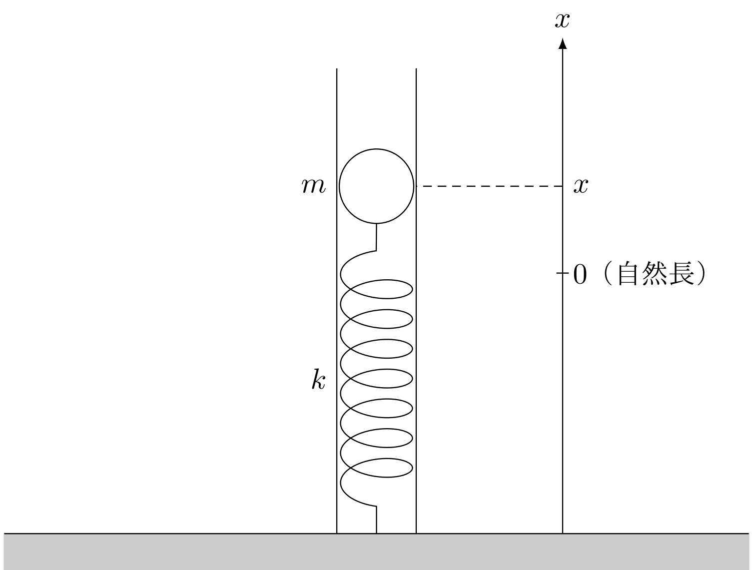
(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，s を求めよ．

(2)　物体，ばね，重力場を合わせて 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）を用いることで，s を求めよ．

III　物体を位置 $x=d$ から静かに手を放した．位置 $x=\dfrac{d}{3}$ を通過する瞬間の物体の速さを v とする．

(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，v を求めよ．

(2)　物体，ばね，重力場を合わせて 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）を用いることで，v を求めよ．



【解答】

I　運動方程式より，

$$m \cdot 0 = -kx - mg\,, \qquad \therefore x = -\frac{mg}{k}\,,\quad \therefore d = \underset{\sim\sim}{\frac{mg}{k}}\,.$$

II (1)　物体に作用する力のする仕事 W は[*49]，

$$W = \int_0^s (-kx - mg)\,dx = -\frac{1}{2}ks^2 - mgs\,.$$

物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = -\frac{1}{2}ks^2 - mgs\,, \qquad \therefore s = \underset{\sim\sim}{-\frac{2mg}{k}}\,.$$

(2)　物体，ばね，重力場を 1 つの系と見る．弾性力の位置エネルギーの基準点，および重力の位置エネルギーの基準点をともに $x = 0$ として，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）より，

$$\frac{1}{2}m \cdot 0^2 + \frac{1}{2}ks^2 + mgs = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + \frac{1}{2}k \cdot 0^2 + mg \cdot 0\,, \qquad \therefore s = \underset{\sim\sim}{-\frac{2mg}{k}}\,.$$

III (1)　物体に作用する力のする仕事 W は[*50]，

$$W = \int_{\frac{mg}{k}}^{\frac{mg}{3k}} (-kx - mg)\,dx = \frac{10}{9}\frac{(mg)^2}{k}\,.$$

物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = \frac{10}{9}\frac{(mg)^2}{k}\,, \qquad \therefore v = \underset{\sim\sim}{\frac{2}{3}g\sqrt{\frac{5m}{k}}}\,.$$

(2)　物体，ばね，重力場を 1 つの系と見る．弾性力の位置エネルギーの基準点，および重力の位置エネルギーの基準点をともに $x = 0$ として，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{3k}\right)^2 + mg\frac{mg}{3k} = \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + mg\frac{mg}{k}$$
$$\therefore v = \underset{\sim\sim}{\frac{2}{3}g\sqrt{\frac{5m}{k}}}\,.$$

[*49] グラフ利用：$W = \frac{1}{2}s(-ks - mg) = -\frac{1}{2}ks^2 - mgs$.

[*50] グラフ利用：$W = \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{k} - \frac{mg}{3k}\right)\left\{\left(-k\frac{mg}{k} - mg\right) + \left(-k\frac{mg}{3k} - mg\right)\right\} = -\frac{10}{9}\frac{(mg)^2}{k}$.

8. エネルギー収支⑦（ばねと重力）

図のように，ばね（ばね定数 k）の一端を固定された天井に取り付け，他端を小物体（質量 m）に繋ぐ．物体の運動は鉛直方向に限られるようになっている．鉛直下向きに x 軸を定め，その原点をばねが自然長の位置に定める．重力加速度の大きさを g とする．

I　物体を手で支え，$x = 0$ の位置からゆっくりと鉛直下向きに動かしていくと，物体は位置 $x = d$ で静止した．d を求めよ．

II　位置 $x = d$ にある物体に x 正方向の初速度 v_0 を与えたところ，$x = s\,(> d)$ で折り返した．

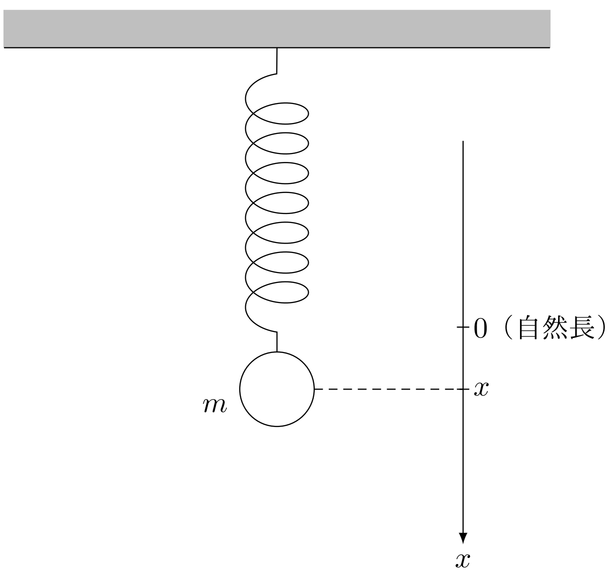
(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，s を求めよ．

(2)　物体，ばね，重力場を合わせて 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）を用いることで，s を求めよ．

III　物体を位置 $x = \dfrac{d}{2}$ にある物体に x 正方向の初速度 v_0 を与えたところ，$x = 2d$ で折り返した．

(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，v_0 を求めよ．

(2)　物体，ばね，重力場を合わせて 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）を用いることで，v_0 を求めよ．



【解答】

I　運動方程式より，

$$m\cdot 0=-kx+mg\,,\qquad \therefore d=\underset{\sim\sim}{\frac{mg}{k}}\,.$$

II (1)　物体に作用する力のする仕事 W は[*51*52]，

$$W=\int_{\frac{mg}{k}}^{s}(-kx+mg)\;dx=-\frac{1}{2}ks^2+mgs-\frac{(mg)^2}{2k}\,.$$

物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2-\frac{1}{2}m{v_0}^2=-\frac{1}{2}ks^2+mgs-\frac{(mg)^2}{2k}\,,\qquad \therefore s=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{mg}{k}+v_0\sqrt{\frac{m}{k}}}\,.$$

(2)　物体，ばね，重力場を 1 つの系と見る．弾性力の位置エネルギーの基準点，および重力の位置エネルギーの基準点をともに $x=0$ として，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2+\frac{1}{2}ks^2+mg(-s)=\frac{1}{2}m{v_0}^2+\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2+mg\left(-\frac{mg}{k}\right)$$

$$\therefore s=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{mg}{k}+v_0\sqrt{\frac{m}{k}}}\,.$$

III (1)　物体に作用する力のする仕事 W は[*53]，

$$W=\int_{\frac{mg}{2k}}^{\frac{2mg}{k}}(-kx+mg)\;dx=-\frac{3}{8}\frac{(mg)^2}{k}\,.$$

物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2-\frac{1}{2}m{v_0}^2=-\frac{3}{8}\frac{(mg)^2}{k}\,,\qquad \therefore v_0=\underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{g}{2}\sqrt{\frac{3m}{k}}}\,.$$

(2)　物体，ばね，重力場を 1 つの系と見る．弾性力の位置エネルギーの基準点，および重力の位置エネルギーの基準点をともに $x=0$ として，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2+\frac{1}{2}k\left(\frac{2mg}{k}\right)^2+mg\left(-\frac{2mg}{k}\right)=\frac{1}{2}m{v_0}^2+\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{2k}\right)^2+mg\left(-\frac{mg}{2k}\right)$$

$$\therefore v_0=\underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{g}{2}\sqrt{\frac{3m}{k}}}\,.$$

---

*51 グラフ利用：$W=\frac{1}{2}\left(s-\frac{mg}{k}\right)(-ks+mg)=-\frac{1}{2}ks^2+mgs-\frac{(mg)^2}{2k}$.

*52 W を，$W=-\frac{1}{2}k\left(s-\frac{mg}{k}\right)^2$ と整理すれば，エネルギー収支の式の計算の見通しが良くなる．

*53 グラフ利用：$W=\frac{1}{2}\left(\frac{2mg}{k}-\frac{mg}{2k}\right)\left\{\left(-k\frac{2mg}{k}+mg\right)+\left(-k\frac{mg}{2k}+mg\right)\right\}=-\frac{3}{8}\frac{(mg)^2}{k}$.

9. エネルギー収支⑧（ばねと重力，原点がつりあう位置）

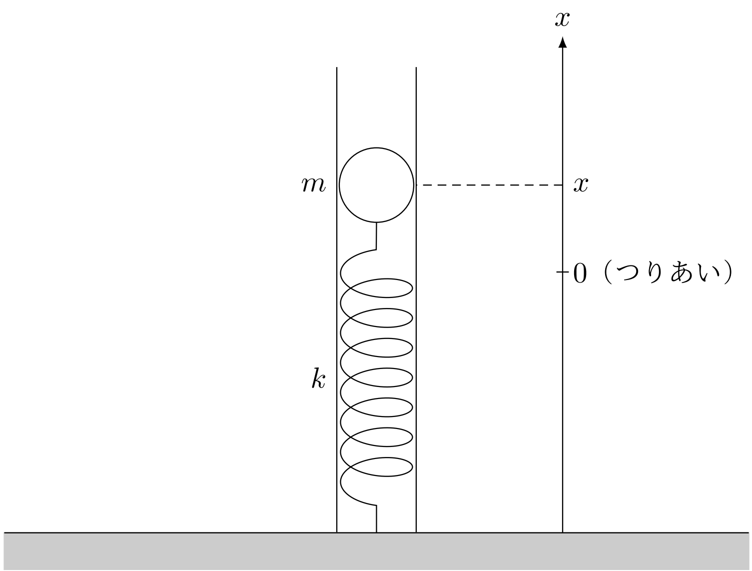
図のように，ばねの一端を固定された床に取り付け，他端を小物体（質量 m）に繋ぐ．小物体とばねは透明な筒の中にあり，物体の運動は鉛直方向に限られるようになっている．鉛直上向きに x 軸を定め，その原点を物体がつりあう位置に定める．物体が弾性力と重力のみを受けてつりあっているとき（原点にあるとき）のばねの縮みを d とする．重力加速度の大きさを g とする．

I　原点においてばねが d だけ縮んで静止することから，ばね定数 k を求めよ．

II　物体を位置 $x = d$ から静かに手を放したところ，$x = 0$ を速さ v で通過した．

(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，v を求めよ．

(2)　物体，ばね，重力場を合わせて 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）を用いることで，v を求めよ．



【解答】

I　物体が位置 x にあるときのばねの伸びは $x-d$ である．運動方程式より，$x=0$ でつりあい（加速度 $a=0$）ゆえ

$$m\cdot 0=-k(0-d)-mg\,,\qquad \therefore k=\underset{\sim\sim}{\frac{mg}{d}}\,.$$

II (1)　物体にはたらく力は，

$$f=-\frac{mg}{d}(x-d)-mg=-\frac{mg}{d}x\,.$$

よって，物体に作用する力のする仕事 W は[*54]，

$$W=\int_d^0\left(-\frac{mg}{d}x\right)dx=\frac{1}{2}mgd\,.$$

物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}m\cdot 0^2=\frac{1}{2}mgd\,,\qquad \therefore v=\underset{\sim\sim}{\sqrt{gd}}\,.$$

(2)　物体，ばね，重力場を 1 つの系と見る．重力の位置エネルギーの基準点を $x=0$ として，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2+\frac{1}{2}\frac{mg}{d}(0-d)^2+mg\cdot 0=\frac{1}{2}m\cdot 0^2+\frac{1}{2}\frac{mg}{d}\cdot 0^2+mgd\,,\qquad \therefore v=\underset{\sim\sim}{\sqrt{gd}}\,.$$

[*54] グラフ利用：$W=\frac{1}{2}s(-ks-mg)=-\frac{1}{2}ks^2-mgs\,.$

10. エネルギー収支⑨（ばねと重力，原点がつりあう位置）

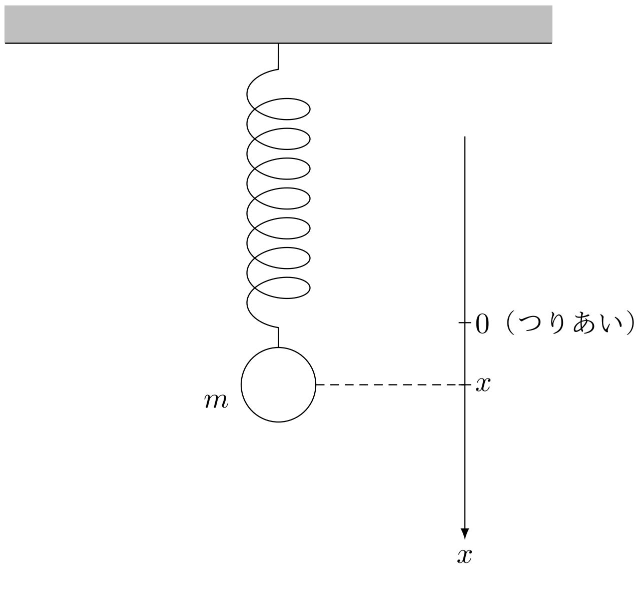
図のように，ばねの一端を固定された天井に取り付け，他端を小物体（質量 m）に繋ぐ．物体の運動は鉛直方向に限られるようになっている．鉛直下向きに x 軸を定め，その原点を物体がつりあう位置に定める．物体が弾性力と重力のみを受けてつりあっているとき（原点にあるとき）のばねの伸びを s とする．重力加速度の大きさを g とする．

I　原点においてばねが s だけ伸びて静止することから，ばね定数 k を求めよ．

II　原点にある物体に x 負方向に大きさ v_0 の初速度を与えたところ，ちょうどばねが自然長となる位置で折り返した．

(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，v_0 を求めよ．

(2)　物体，ばね，重力場を合わせて 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）を用いることで，v_0 を求めよ．



【解答】

I　物体が位置 x にあるときのばねの伸びは $x+s$ である．運動方程式より，$x=0$ でつりあい（加速度 $a=0$）ゆえ

$$m\cdot 0=-k(0+s)+mg\,,\qquad \therefore k=\utilde{\frac{mg}{s}}\,.$$

II (1)　物体にはたらく力は，

$$f=-\frac{mg}{s}(x+s)+mg=-\frac{mg}{s}x\,.$$

よって，物体に作用する力のする仕事 W は[*55]，

$$W=\int_0^{-s}\left(-\frac{mg}{s}x\right)dx=-\frac{1}{2}mgs\,.$$

物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2-\frac{1}{2}m{v_0}^2=-\frac{1}{2}mgs\,,\qquad \therefore v_0=\utilde{\sqrt{gs}}\,.$$

(2)　物体，ばね，重力場を 1 つの系と見る．重力の位置エネルギーの基準点を $x=0$ として，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2+\frac{1}{2}\frac{mg}{s}\cdot 0^2+mgs=\frac{1}{2}m{v_0}^2+\frac{1}{2}\frac{mg}{s}(0+s)^2+mg\cdot 0\,,\qquad \therefore v_0=\utilde{\sqrt{gs}}\,.$$

[*55] グラフ利用：$W=\frac{1}{2}s(-ks-mg)=-\frac{1}{2}ks^2-mgs\,.$

11. エネルギー収支⑩（ばねと重力，復習）

図のように，ばね（ばね定数 k）の一端を固定された天井に取り付け，他端を小物体（質量 m）につなぐ．鉛直下向きに x 軸を定め，その原点をばねが自然長のときの物体の位置に取る．重力加速度の大きさを g とする．

I　物体を手で支え，$x=0$ の位置からゆっくりと鉛直下向きに動かしていくと，物体は位置 $x=x_0$ で静止した．x_0 を求めよ．

II　時刻 $t=0$ に $x=x_0$ にある物体に x 軸正の向きに大きさ v_0 の初速度を与えたところ，物体は位置 $x=x_1$ で折り返した．

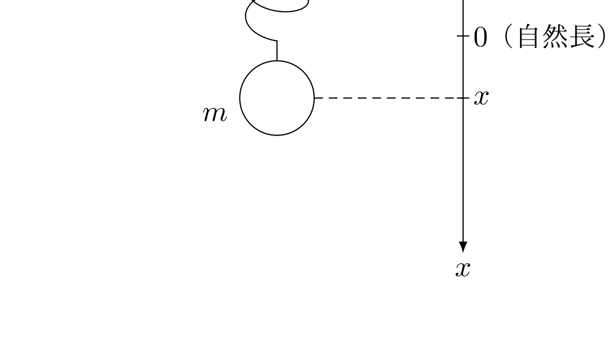
(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，x_1 を求めよ．

(2)　物体，ばね，重力場を合わせて 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）を用いることで，x_1 を求めよ．

III　物体を位置 $x=0$ の位置から静かに手を放した．位置 $x=\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)x_0$ における物体の速さを v とする．

(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，v を求めよ．

(2)　物体，ばね，重力場を合わせて 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）を用いることで，v を求めよ．



【解答】

I　運動方程式より，

$$m\cdot 0=-kx_0+mg\,,\qquad \therefore x_0=\frac{mg}{k}\,.$$

II (1)　物体に作用する力のする仕事 W は[*56][*57]，

$$W=\int_{-\frac{mg}{k}}^{x_1}(-kx+mg)\;dx=-\frac{1}{2}k{x_1}^2+mgx_1-\frac{1}{2}\frac{(mg)^2}{k}\,.$$

物体のエネルギー収支の式より[*58]，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2-\frac{1}{2}m{v_0}^2=-\frac{1}{2}k{x_1}^2+mgx_1-\frac{1}{2}\frac{(mg)^2}{k}\,,\qquad \therefore x_1=\frac{mg}{k}+v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

(2)　物体，ばね，重力場を 1 つの系と見る．弾性力の位置エネルギーの基準点，および重力の位置エネルギーの基準点をともに $x=0$ として，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2+\frac{1}{2}k{x_1}^2+mg(-x_1)=\frac{1}{2}m{v_0}^2+\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)+mg\left(-\frac{mg}{k}\right)$$

$$\therefore x_1=\frac{mg}{k}+v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

III (1)　弾性力のする仕事 W は[*59]

$$W=\int_0^{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{mg}{k}}(-kx+mg)\;dx=\frac{1}{8}\frac{(mg)^2}{k}\,.$$

物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}m\cdot 0^2=\frac{1}{8}\frac{(mg)^2}{k}\,,\qquad \therefore v=\frac{g}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

(2)　物体，ばね，重力場を 1 つの系と見る．弾性力の位置エネルギーの基準点，および重力の位置エネルギーの基準点をともに $x=0$ として，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）より，

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k\left\{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{mg}{k}\right\}^2+mg\left\{-\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{mg}{k}\right\}=0\,,\qquad \therefore v=\frac{g}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

---

*56 グラフ利用：$W=\frac{1}{2}(x_1-x_0)(-kx_1+mg)=-\frac{1}{2}k{x_1}^2+mgx_1-\frac{1}{2}\frac{(mg)^2}{k}$.

*57 W を，$W=-\frac{1}{2}k\left(x_1-\frac{mg}{k}\right)^2$ と整理すれば，エネルギー収支の式の計算の見通しが良くなる．

*58 2 次方程式の解の公式を利用．このとき，$x_1>x_0$ より，正の解を選択．

*59 グラフ利用：$W=\frac{1}{2}mg\frac{mg}{k}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{mg}{k}\left\{-k\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{mg}{k}+mg\right\}=\frac{1}{8}\frac{(mg)^2}{k}$.

12. エネルギー収支⑪（ばねと重力，斜め）

図のように，ばね（ばね定数 k）の一端を斜面（傾斜角 θ）の端に固定された壁に取り付け，他端を小物体（質量 m）につなぐ．斜面上向きに x 軸を定め，その原点をばねが自然長のときの物体の位置に取る．重力加速度の大きさを g とする．

I　物体を手で支え，$x=0$ の位置からゆっくりと斜面下向きに動かしていくと，物体は位置 $x=x_0$ で静止した．x_0 を求めよ．

II　時刻 $t=0$ に $x=x_0$ にある物体に x 軸負の向きに大きさ v_0 の初速度を与えたところ，物体は $x_1 \leq x \leq x_2\,(x_1 < x_2)$ の間を周期運動した．

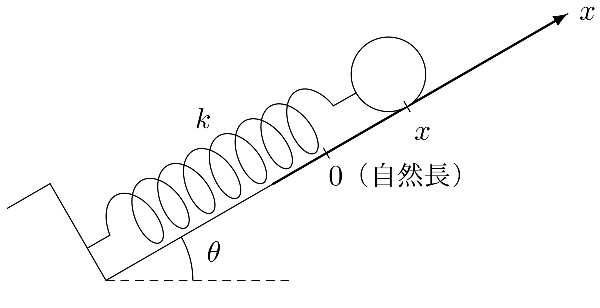
(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，x_1，x_2 をそれぞれ求めよ．

(2)　物体，ばね，重力場を合わせて 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）を用いることで，x_1，x_2 をぞれぞれ求めよ．

III　物体を位置 $x=0$ の位置から静かに手を放した．位置 $x=\dfrac{x_0}{4}$ における物体の速さを v とする．

(1)　物体のエネルギー収支に注目することで，v を求めよ．

(2)　物体，ばね，重力場を合わせて 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）を用いることで，v を求めよ．



【解答】

I (1)　運動方程式より，

$$m\cdot 0=-kx_0-mg\sin\theta\,,\qquad \therefore x_0=-\frac{mg}{k}\sin\theta\,.$$

II (1)　物体に作用する力が位置 x に至るまでにする仕事 W は[*60]，

$$W=\int_{-\frac{mg}{k}\sin\theta}^{x}(-kx-mg\sin\theta)\,dx=\underbrace{-\frac{1}{2}kx^2-mgx\sin\theta+\frac{1}{2}\frac{mg}{k}\sin\theta}_{=-\frac{1}{2}k\left(x+\frac{mg}{k}\sin\theta\right)^2}\,.$$

物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2-\frac{1}{2}m{v_0}^2=-\frac{1}{2}k\left(x_1+\frac{mg}{k}\sin\theta\right)^2\,,\qquad \therefore x=-\frac{mg}{k}\sin\theta\pm v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

$x_2>x_1$ より，

$$x_1=-\frac{mg}{k}\sin\theta-v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\,,\quad x_2=-\frac{mg}{k}\sin\theta+v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

(2)　物体とばねと重力場を 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m\cdot 0^2+\frac{1}{2}kx^2+mgx\sin\theta&=\frac{1}{2}m{v_0}^2+\frac{1}{2}k{x_0}^2+mgx_0\sin\theta\\ \frac{1}{2}kx^2+mgx\sin\theta&=\frac{1}{2}m{v_0}^2+\frac{1}{2}\frac{(mg\sin\theta)^2}{k}\\ \therefore x_1=-\frac{mg}{k}\sin\theta-v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\,,&\quad x_2=-\frac{mg}{k}\sin\theta+v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\,.\end{aligned}$$

III (1)　弾性力，および重力のする仕事 W は[*61]

$$\begin{aligned}W&=\int_0^{-\frac{mg}{4k}\sin\theta}(-kx-mg\sin\theta)\,dx\\ &=-\frac{1}{2}k\left(-\frac{mg}{4k}\sin\theta\right)^2-mg\sin\theta\left(-\frac{mg}{4k}\sin\theta\right)+\frac{1}{2}k\cdot 0^2+mg\sin\theta\cdot 0\\ &=\frac{7}{32}\frac{(mg\sin\theta)^2}{k}\,.\end{aligned}$$

物体のエネルギー収支の式より，

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}m\cdot 0^2=\frac{7}{32}\frac{(mg)^2\sin^2\theta}{k}\,,\qquad \therefore v=\frac{g\sin\theta}{4}\sqrt{\frac{7m}{k}}\,.$$

---

*60 グラフ利用：$W=\dfrac{1}{2}(x-x_0)\,(-kx-kx_0)$.

*61 グラフ利用：$W=\dfrac{1}{2}\dfrac{x_0}{4}\left\{mg\sin\theta+\left(-\dfrac{1}{4}kx_0-mg\sin\theta\right)\right\}=\dfrac{7}{32}\dfrac{(mg\sin\theta)^2}{k}$.

(2)　物体とばねを 1 つの系と見て，全体のエネルギー保存則（力学的エネルギー保存則）より，

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k\left(\frac{x_0}{4}\right)^2+mg\frac{x_0}{4}\sin\theta=\frac{1}{2}m\cdot 0^2+\frac{1}{2}k\cdot 0^2+mg\cdot 0\,,$$

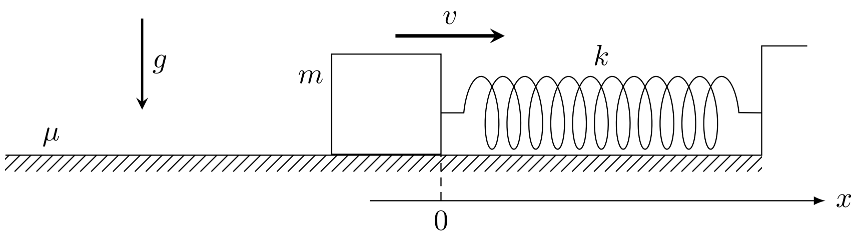
$$\therefore v=\underline{\frac{g\sin\theta}{4}\sqrt{\frac{7m}{k}}}\,.$$

13. エネルギー収支⑫（ばねと摩擦）

図のように，水平右向きに x 軸を定める．物体（質量 m）を粗い床面の上に置き，x 正方向に初速 v で打ち出したところ，ばねが s だけ縮んだ位置で折り返した．重力加速度の大きさを g，物体と床の間の動摩擦係数を μ とする．

(1)　s を，物体のエネルギー収支を計算することにより求めよ．

(2)　s を，物体とばねからなる力学的エネルギー収支を計算することにより求めよ．



【解答】

(1)　物体が x 正方向に滑るとき，位置 x にある物体にはたらく力は $f = -kx - \mu N = -kx - \mu mg$ となる[*62]である．よって，物体のエネルギー収支より，

$$\frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \int_0^s (-kx - \mu mg)\,dx = -\frac{1}{2}ks^2 - \mu mgs$$

$$\therefore s = \underline{\frac{\mu mg}{k}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{k}{m}\left(\frac{v}{\mu g}\right)^2}\right)}.$$

(2)　物体とばねからなる系は，摩擦から仕事をされる．よってこの系のエネルギー収支は，

$$\left(\frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}mv^2\right) + \left(\frac{1}{2}ks^2 - \frac{1}{2}k \cdot 0^2\right) = \mu mgs\cos\pi = -\mu mgs$$

$$\therefore s = \underline{\frac{\mu mg}{k}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{k}{m}\left(\frac{v}{\mu g}\right)^2}\right)}.$$

[*62] 鉛直方向のつりあいより垂直抗力の大きさ N は $N = mg$ である．

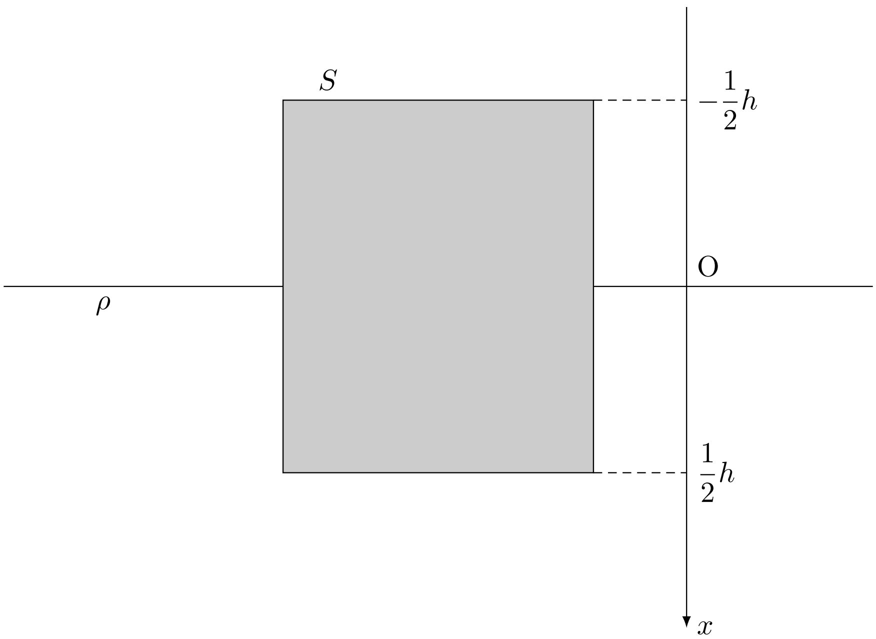
14. エネルギー収支⑬（浮力）

物体（断面積 S，高さ h）を液体（密度 ρ）の上に浮かべたところ，物体は水面から $\frac{1}{2}h$ だけ沈み静止した．鉛直下向きに x 軸を定め，物体の位置 x は物体底面の位置とし，水面を原点に取る．重力加速度の大きさを g とし，液面の高さの変化を無視する．

(1)　物体の質量 m を求めよ．

(2)　物体の底面が $0 \leq x \leq h$ にあるとき，物体にはたらく力 f を x を含む式で表せ．

(3)　物体に外力を加え，力のつりあいを保ちながら $x = \frac{1}{2}h$ から $x = h$ まで押し込むとき，外力が物体にした仕事 W を求めよ．



【解答】

(1)　大気圧を P_0 とすれば，

$$m \cdot 0 = mg + P_0 S - \left(P_0 + \rho \cdot \frac{1}{2}hg\right) S\,, \qquad \therefore m = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}\rho Sh}\,.$$

また，浮力の公式を用いれば，

$$m \cdot 0 = mg - \rho \cdot \frac{1}{2}hgS\,, \qquad \therefore m = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}\rho Sh}\,.$$

(2)　物体にはたらく力は，

$$f = mg - \rho Sxg = \frac{1}{2}\rho Shg - \rho Sxg = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}\rho Shg\left(1 - \frac{2x}{h}\right)}\,.$$

(3)　物体に加える外力を F とすれば，

$$m \cdot 0 = F + mg - \rho Sgx = F + \frac{1}{2}\rho Shg - \rho Sgx\,, \qquad \therefore F = -\frac{1}{2}\rho Shg + \rho Sgx\,.$$

上記の式より，外力 F は定数ではなく位置 x に依存するため積分する他ない．よって，仕事の定義より，

$$\begin{aligned} W = \int_{\frac{h}{2}}^{h} F\,dx &= \int_{\frac{h}{2}}^{h} \left(-\frac{1}{2}\rho Shg + \rho Sgx\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\rho Shg \int_{\frac{h}{2}}^{h} \left(-1 + \frac{2x}{h}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\rho Shg \left[-x + \frac{x^2}{h}\right]_{\frac{h}{2}}^{h} \\ &= \underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{8}\rho Sgh^2}\,. \end{aligned}$$

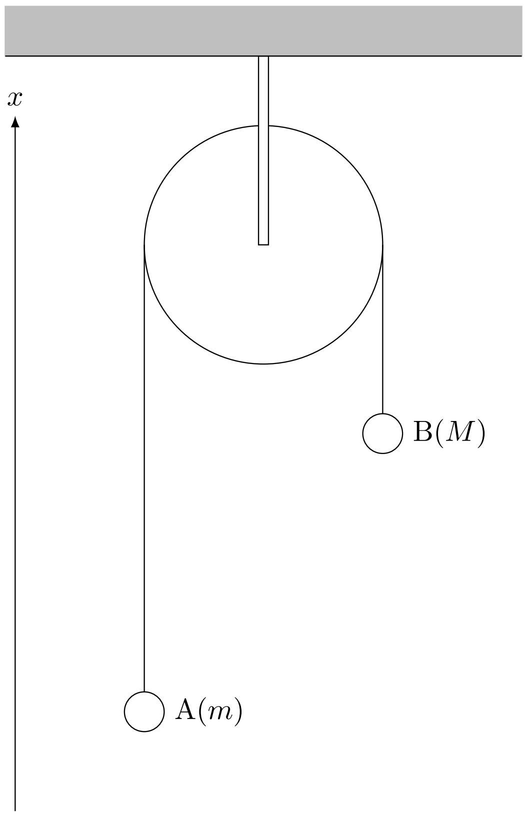
15. 複数の物体からなる系

物体 A（質量 m）と物体 B（質量 $M\,(>m)$）を固定された軽い滑車にかけ，静かに手を放した．鉛直上向きに x 軸を定める．糸と滑車の間の摩擦は無視し，重力加速度の大きさを g とする．物体 A が h 上昇したときの物体 A の速度を v とする．

(1)　張力の大きさを T とする．物体 A が h 上昇する間に，張力が A にした仕事 W_{A}，および張力が B にした仕事 W_{B} を求めよ．

(2)　A と B を合わせて 1 つの系を見たとき，この系の力学的エネルギーは保存する．v を求めよ．

(3)　おまけ：時間追跡（運動方程式）により得られた結果が，上記の結果と整合していることを確認せよ．



【メモ】

各物体のみに注目すると張力の仕事が現れるが，全体に注目することで張力の仕事は相殺する．

【解答】

(1)　仕事の定義より，

$$W_{\mathrm{A}} = Th\,,\quad W_{\mathrm{B}} = -Th\,.$$

(2)　力学的エネルギー保存則より[*63][*64]，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + mgh + Mg\cdot 0 = \frac{1}{2}m\cdot 0^2 + \frac{1}{2}M\cdot 0^2 + mg\cdot 0 + Mgh$$
$$\therefore v = \sqrt{\frac{2(M-m)}{M+m}gh}\,.$$

(3)　運動方程式・束縛条件より，

$$\begin{cases} \mathrm{A} : ma = T - mg\,, \\ \mathrm{B} : M(-a) = T - Mg\,, \end{cases} \qquad \therefore a = \frac{M-m}{M+m}g\,,\quad T = \frac{2Mm}{M+m}g\,.$$

加速度一定より，$x_{\mathrm{A}}(0) = 0$ として，$v_{\mathrm{A}}(0) = 0$ より[*65]，

$$\begin{cases} x_{\mathrm{A}}(t) = \frac{1}{2}at^2\,, \\ v_{\mathrm{A}}(t) = at\,, \end{cases} \qquad \therefore t = \sqrt{\frac{2h}{a}}\,,\quad v = \sqrt{\frac{2(M-m)}{M+m}gh}\,.$$

[*63] 各物体のエネルギー収支の式は，

$$\begin{cases} \mathrm{A} : \frac{1}{2}mv^2 - 0 = Th + mg(-h)\,, \\ \mathrm{B} : \frac{1}{2}MV^2 - 0 = T(-h) + Mgh\,. \end{cases}$$

2 式の和を取って整理すると，

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + mgh + Mg(-h) = 0$$

となり，2 物体と重力場からなる系の力学的エネルギー保存則を得る．

[*64] 束縛条件（糸の長さが一定の条件）より両物体の速度は大きさが等しく逆向きである．糸が出てきたら束縛条件を頭にちらつかせるように．

[*65] このとき B は，$x_{\mathrm{B}}(0) = h$，$v_{\mathrm{B}}(0) = 0$ である．