7

波動後半

第 7 部波動後半では，光波に関する内容を扱う．第 1 章では，幾何光学を扱う．幾何光学では，物理法則はスネルの法則だけであり，幾何光学の難しい部分は図形の考察である．図形の考察もパターン処理できるので，この章では図形の考察の仕方の基本を身に着けたい．第 2 章では，レンズ・球面鏡の性質について扱う．特徴的な光線の作図の仕方を覚えた後，レンズの写像公式の導出を行い，写像公式を使う練習を行う．第 3 章では，光速の測定実験と，光の干渉について扱う．光の干渉は光分野の最も比重の大きな分野である．学習形態としては，各有名テーマを押さえていくような学習となる．また，光速の測定実験についてはフィゾーの実験とフーコーの実験を扱う．

§7.1 幾何光学

第 1 章では，幾何光学を扱う．幾何光学では，現象を支配する物理法則はスネルの法則（屈折の法則）のみであり，物理以外の知識として図形の考察を行う．図形の考察も考え方の基本が存在するので，基本に忠実に計算できるよう練習したい．

■簡単なまとめ

- スネルの法則：

  媒質 1 側の屈折率を n_1，入射角を θ，媒質 2 側の屈折率を n_2，屈折角を θ_2 とする．

  $$n_1 \sin\theta = n_2 \sin\theta_2$$

  境界間で振動数は保存し，波が屈折率 n_1 の領域から n_2 の領域に透過したとき，その波長は $\lambda \to \dfrac{\lambda}{n_2/n_1}$ となる（波の基本式より v も同様）．なお，全反射は屈折角が存在しない条件を考えればよい．

- 図形の考察：与えられている量の組み合わせによって，以下のように考える．

  - 角度のみ　→　三角形の内外角に注目（二等辺三角形に注意）／平行性の性質を利用（錯角・同位角）
  - 辺のみ　→　相似な三角形の相似比を利用
  - 角と辺　→　三角比を利用（正弦定理・余弦定理に注意）

1. 見かけの深さ（虚像）

空気中（屈折率 1）から水中の物体を観察するとき，実際の深さとは異なる位置に物体が観察される．空気の屈折率を 1 とする．

I　はじめ，水（屈折率 n）と空気の境界面（水面）から深さ d の位置に物体（大きさ無視）を置いた．光源から水面に向かう光線の入射角を θ，屈折角を ϕ，物体の見かけの深さを d^* とする．

(1)　スネルの法則を記せ．

(2)　$\triangle$OPA，$\triangle$OP$'$A に注目し，$\overline{\mathrm{OA}}$ を 2 通りで表せ．

(3)　θ，ϕ が微小角のとき，d^* を n，d を用いて表せ．なお，微小量 $x\,(|x| \ll 1)$ に対して成り立つ近似式 $\sin x \fallingdotseq x$，$\cos x \fallingdotseq 1$，$\tan x \fallingdotseq x$ を用いてよい．

(4)　光源 P の真上に半径 R の円板を置くと，ある半径 R_{c} の大きさで光源 P が視認できなくなる．視認できなくなるための R の条件を求めよ．

II　続いて，水（屈折率 n）の上に油（屈折率 n'，厚さ d'）を流した．角度 θ，θ'，ϕ を図 2 のように定める．物体の見かけの深さを d^* とする．

(1)　各境界面におけるスネルの法則を記せ．

(2)　$\overline{\mathrm{O'A}}$ を 2 通りで表せ．

(3)　全ての角度が微小角のとき，d^* を n，n'，d，d' を用いて表せ．

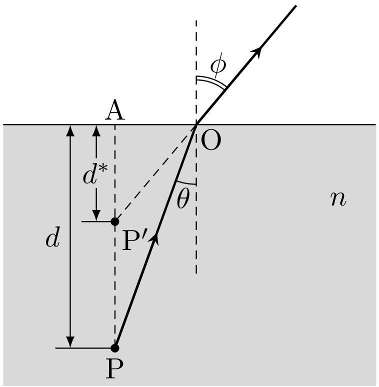


図 1

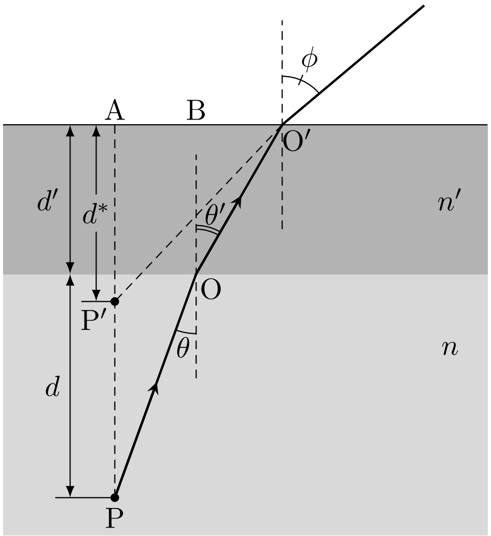


図 2

【メモ】

角度と辺から図形を考察するので，三角比を利用する．

【解答】

I (1) $\underline{n \sin\theta = 1 \cdot \sin\phi}$.

(2) △OPA，△OP′A に注目し[*1]

$$\overline{\mathrm{OA}} = \underline{d \tan\theta} = \underline{d^* \tan\phi} .$$

(3) スネル則，および図形の考察より，近似式を施し，

$$\begin{cases} n\theta \fallingdotseq \phi , \\ \overline{\mathrm{OA}} \fallingdotseq d\theta \fallingdotseq d^*\phi , \end{cases} \qquad \therefore d^* = \underline{\frac{d}{n}} .$$

(4) スネル則より $\sin\phi = n \sin\theta$ であり，状況から $\sin\theta = \dfrac{R}{\sqrt{R^2+d^2}}$ である．ϕ が存在しない条件 $\sin\phi > 1$ を考えて，

$$\sin\phi = n\sin\theta = \frac{nR}{\sqrt{R^2+d^2}} > 1 , \qquad \therefore \underline{R > \frac{d}{\sqrt{n^2-1}}} .$$

II (1) $$\underline{\begin{cases} n\sin\theta = n'\sin\theta' , \\ n'\sin\theta' = 1 \cdot \sin\phi . \end{cases}}$$

(2) $\overline{\mathrm{O'A}} = \overline{\mathrm{O'B}} + \overline{\mathrm{BA}}$ より，

$$\overline{\mathrm{O'A}} = \underline{d^* \tan\phi} = \underline{d\tan\theta + d'\tan\theta'} .$$

(3) スネル則，および図形の考察より，近似式を施し，

$$\begin{cases} n\theta \fallingdotseq n'\theta' , \\ n'\theta' \fallingdotseq \phi , \\ \overline{\mathrm{OA}} \fallingdotseq d^*\phi \fallingdotseq d\theta + d'\theta' , \end{cases} \qquad \therefore d^* = \underline{\frac{d}{n} + \frac{d'}{n'}} .$$

[*1] 辺と角が与えられているので三角比を利用する．

2. プリズム

図 1 のように，このプリズムの AB 面上の点 O から単色光を入射したところ，AC 面上の点 P に到達した．∠BAC を α，この単色光におけるガラスの屈折率を $n\,(>1)$，点 O における入射角と屈折角をそれぞれ i，r，点 P における入射角と屈折角をそれぞれ θ，ϕ とし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqq i < \dfrac{\pi}{2}$ のときを考える．

(1)　点 O で屈折の法則から得られる関係式を n，i，r を用いて表せ．

(2)　点 P での入射角 θ を r，α を用いて表せ．

(3)　点 P における屈折角の正弦 $\sin\phi$ を n，i，α を用いて表せ．

(4)　$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，入射角 i に関わらず点 P で全反射しない屈折率 n の条件を記せ．

(5)　次に，図 1 と同じ三角プリズムの点 O に白色光を入射した．入射した光は分散し，図 2 のように設置したスクリーン上では連続スペクトルが観測された．このとき，光の三原色として知られている『青』,『赤』,『緑』は，a から b の方向でどのような順に並んでいるか．

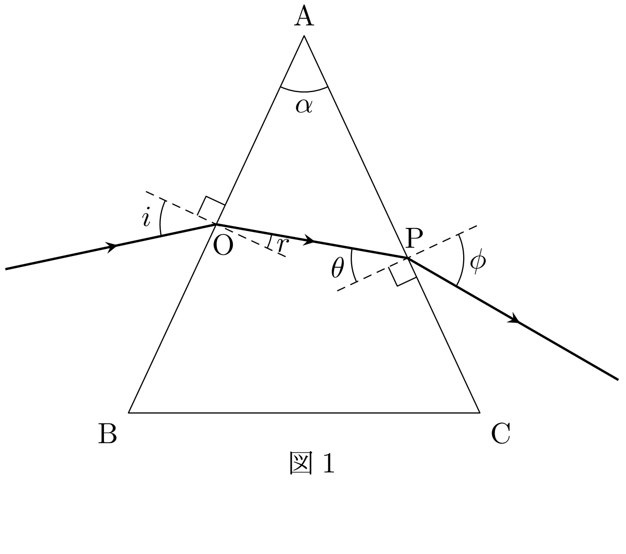


図 1

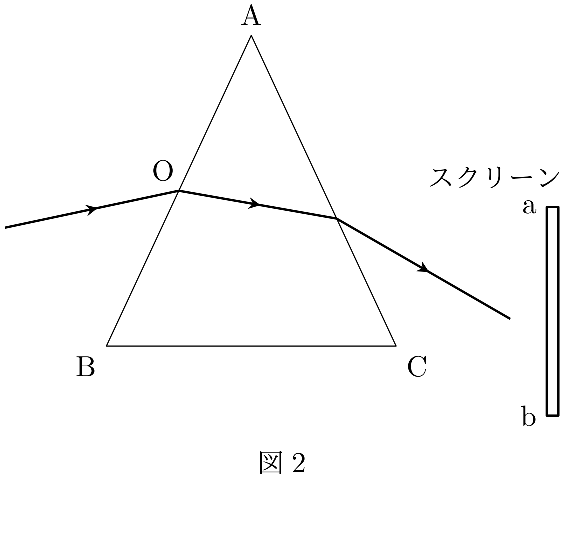


図 2

【メモ】

角度のみから図形を考察する．今の場合，平行線がないため，三角形の内角・外角を見るほかない．

【解答】

(1)　点 O でのスネル則より，

$$\underset{\sim}{1\cdot\sin i = n\sin r}\,.$$

(2)　△AOP に注目して[*2]，

$$\left(\frac{\pi}{2}-r\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\alpha=\pi \qquad \therefore\ \theta=\underset{\sim}{\alpha-r}\,.$$

(3)　点 P での屈折の法則より，

$$1\cdot\sin\phi = n\sin\theta = n\sin(\alpha-r) = n(\sin\alpha\cos r-\cos\alpha\sin r)\,.$$

ここに，(1) より，

$$\sin r=\frac{\sin i}{n}\,,\quad \cos r=\sqrt{1-\left(\frac{\sin i}{n}\right)^2}$$

であることを用いて，

$$\sin\phi=\underset{\sim}{\sin\alpha\sqrt{n^2-\sin^2 i}-\cos\alpha\sin i}\,.$$

(4)　$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，全反射しない（角 ϕ が存在する）条件は，

$$\sin\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{n^2-\sin^2 i}-\sin i\right)<1\,.$$

これが任意の角 i に対して成り立てばよい．この式において ϕ が最大となるのは $i=0$ のときゆえ，$i=0$ で成り立てば十分である[*3]．よって，

$$\underset{\sim}{n<\sqrt{2}}\,.$$

(5)　赤→緑→青 の順．

[*2] 角から角の対応を付けるので，三角形の内角・外角か，平行線に注目することになる．今の場合，図形に平行な線がないため，三角形の内角・外角に注目することになる．

[*3] 式の形から，i に関して減少関数となっていることは明らか．

3. 虹

雨上がりの晴れた空に見られる虹について，その原理について考える．図に示されるように，空中に浮遊している完全な球と見なせる雨粒を考え，これに特定に波長の可視光（ここでは緑とする）が点 A で入射する．入射した光は点 B で一部が反射，一部が透過し，反射した光の一部は点 C で透過する．点 A における入射角を i，屈折角を θ，点 C における屈折角を t，入射光と反射光のなす角を ϕ とする．空気の屈折率を 1，水の屈折率を $n\,(n > 1)$ とする．

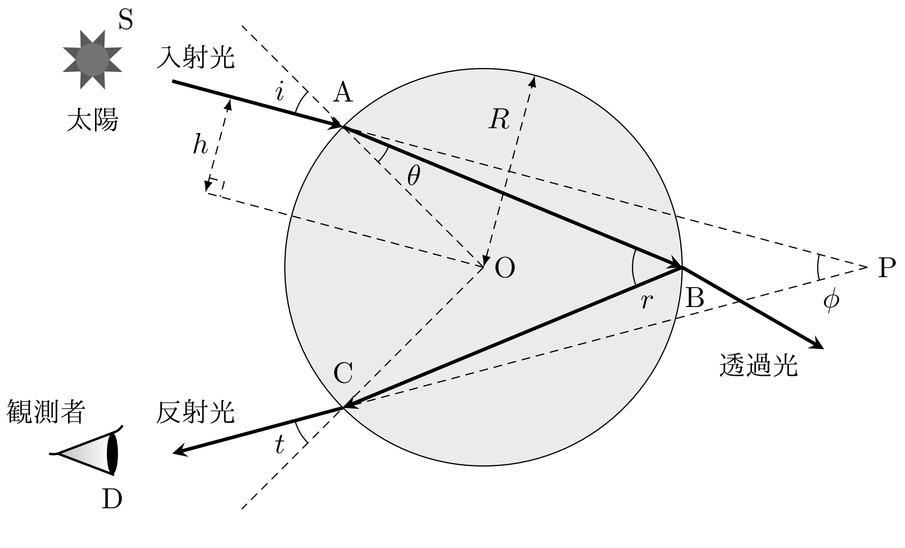
(1)　A におけるスネルの法則を立式せよ．

(2)　適当な三角形に注目し，r を θ を用いて表せ．

(3)　C におけるスネルの法則より，t を i を用いて表せ．

(4)　適当な三角形に注目し，ϕ を i，θ を用いて表せ．

(5)　余力がある人は，解説に載っている補足計算を追ってみよう．



【メモ】

角度のみから図形を考察する．今の場合，平行線がないため，三角形の内角・外角を見るほかない．

【解答】

(1)　$\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{1 \cdot \sin i = n \sin\theta}\,.$

(2)　△OAB，△OCB は合同な二等辺三角形である．よって，二等辺三角形の底角は等しく，

$$\frac{r}{2} = \theta\,, \qquad \therefore r = \underset{\sim}{2\theta}\,.$$

(3)　スネル則より，

$$1 \cdot \sin t = n \sin\theta = \sin i\,, \qquad \therefore t = i\,.$$

(4)　∠AOC $(< \pi)$ は，△OAB，△OCB それぞれの外角から[*4]，

$$\angle \mathrm{AOC} = \left(\frac{r}{2} + \theta\right) \times 2 = r + 2\theta = 4\theta\,.$$

よって，△OAB，△OCB の内角[*5]，

$$\phi + 2i + (\pi - 2\theta) \times 2 = 2\pi\,, \qquad \therefore \phi = \underset{\sim\sim\sim}{4\theta - 2i}\,.$$

[*4] “ひらめけば” 円周角と中心核の関係を用いてもよい．

[*5] 2 つを合わせた図形四角形 OAPC の内角を見ても同じ．

【補足】虹を見上げる角度と色の配置

図のように，雨粒の半径を R，入射光と平行な球の中心 O を通る軸と入射光の距離を h とし，相対入射位置 $k=\dfrac{h}{R}$ と定義する．すると，図より，

$$k=\frac{h}{R}=\sin i=n\sin\theta\,.$$

ここで，$i=2\theta-\dfrac{\phi}{2}$ より，

$$k=\sin\left(2\theta-\frac{\phi}{2}\right).$$

θ はスネル則より n，k のみで表せるので，上式は ϕ と k の間の関係式となる[*6]．これをグラフにすると以下のようになる[*7]．

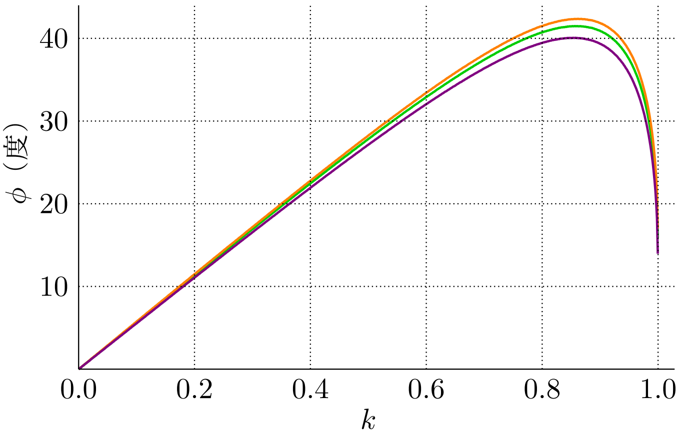


図 1　仰角 ϕ の k 依存性

図 1 から，およそ $\phi\fallingdotseq 40^\circ$ の方向に最も強く光が反射されることがわかる．太陽光線はほとんど水平と見なせることから，角度 ϕ は仰角と見なせ，虹を見上げる角度はおよそ $\phi\fallingdotseq 40^\circ$ となる．

また，図 1 から赤に近いほど仰角 ϕ が大きく，紫に近いほど仰角 ϕ は小さくなる．すなわち，虹は外側（上側）が赤，内側（下側）が紫となる．なお，これは屈折率の波長依存性（光の分散）からもわかり，波長が短い光ほどよく屈折するので，屈折の様子は以下の図 2 のようになる．

[*6] 逆三角関数を用いれば，

$$\begin{cases} k=n\sin\theta\,, \\ k=\sin\left(2\theta-\dfrac{\phi}{2}\right), \end{cases} \qquad \therefore\ \phi=4\arcsin\left(\frac{k}{n}\right)-2\arcsin k$$

と表せる．これをプロットしたものが解答のグラフである．

[*7] 屈折率は波長によって異なり，波長が短いほど屈折率は大きくなる．グラフは，色に対応した屈折率で線を引いている．

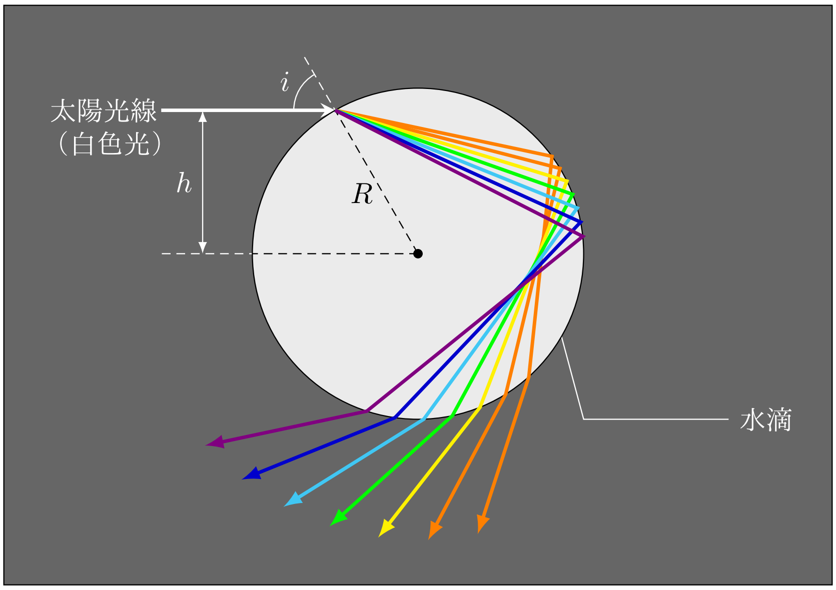


図 2　光の分散：$k = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$i = 60^\circ$ とした

図 2 からも，赤色は高い位置の雨粒からの光を，紫色は低い位置の雨粒からの光を見ていることが読み取れる．

4. レンズの仕組み

凸レンズは光を 1 点に集光する性質がある．ここでは，凸レンズの仕組みについて考えよう．次の文章を読み，［　　］に適した式，または数値を解答せよ．なお，［［　　］］は，すでに［　　］で与えられたものと同じものを表す．以下では，プリズム，および凸レンズの屈折率を n，空気の屈折率を 1 とする．必要であれば，微小量 x $(|x| \ll 1)$ について成り立つ近似式 $\sin x \fallingdotseq x$，$\tan x \fallingdotseq x$ を用いてよい．

(1) 図 1 の頂角 θ のプリズムの点 P_1，P_2 それぞれの点における光線の屈折について考える．P_1 における入射角を i，屈折角を r とすると，屈折の法則から $\sin r =$ ［①］ が成り立ち，同様にして，P_1 における入射角を i'，屈折角を r' とすると，屈折の法則から $\sin i' =$ ［②］ が成り立つ．ここで，光線として近軸光線[*8]のみを考えると，i，r，i'，r' はそれぞれ微小量と見なすことができ，［［①］］ より $r \fallingdotseq$ ［③］ を，［［②］］ より $i' \fallingdotseq$ ［④］ を得る．

さて，図 1 の $\triangle OP_1P_2$ に注目すると，i' は r，θ を用いて $i' =$ ［⑤］ と表すことができるため，全屈折角 δ は，θ，n を用いて $\delta =$ ［⑥］ となる．

(2) 図 2 のように，点 A から出た光線が凸レンズで屈折され点 B に達する状況を考える．凸レンズは十分薄く，レンズの中心から点 A までの距離を a，点 B までの距離を b とすると，$\overline{AH_1} \fallingdotseq a$，$\overline{BH_2} \fallingdotseq b$ が成り立つ．点 A のある側をレンズ前方，点 B のある側をレンズ後方と呼び，レンズ前方の光線と光軸のなす角を α，レンズ後方の光線と光軸のなす角を β とする．近軸光線のみを考える場合，α，β はともに微小量として扱え，また，$h = \overline{P_1H_1} \fallingdotseq \overline{P_2H_2}$ が成り立つ．このとき，図 2 − 2 中の $\triangle AP_1H_1$ に注目することで，α は a，h を用いて $\alpha \fallingdotseq$ ［⑦］ と表せる．同様にして，b，h を用いて $\beta \fallingdotseq$ ［⑧］ と表せるので，全屈折角 δ は，a，b，h を用いて $\delta =$ ［⑨］ となる．

(3) 図 2 の凸レンズによる光線の屈折は，図 3 のような点 P_1，P_2 で凸レンズに接するようなプリズムによる光線の屈折と考えることができる．凸レンズは，半径 R_1，R_2 の球レンズの一部を組み合わて作られており，半径 R_1 の球の中心を O_1，半径 R_2 の球の中心を O_2，光軸と線分 O_1P_1 とのなす角を θ_1，O_2P_2 とのなす角を θ_2 とする．このとき，［［⑥］］，［［⑨］］ の結果を利用することで，

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \boxed{⑩}$$

と整理できる．この式の右辺をの凸レンズの焦点距離と呼ぶ．

[*8] 光軸付近の光線のこと．

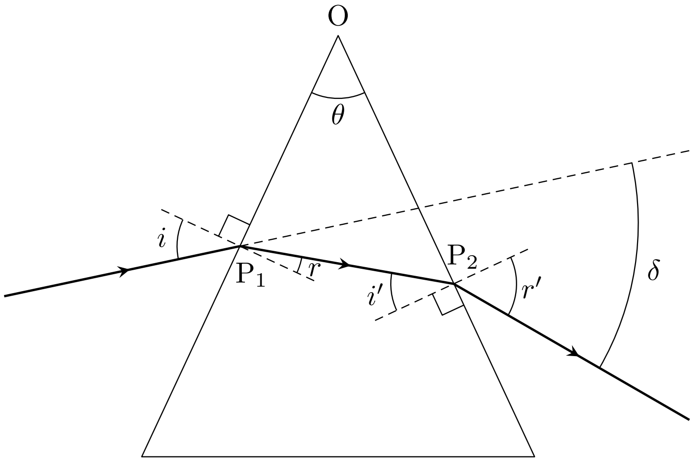


図 1

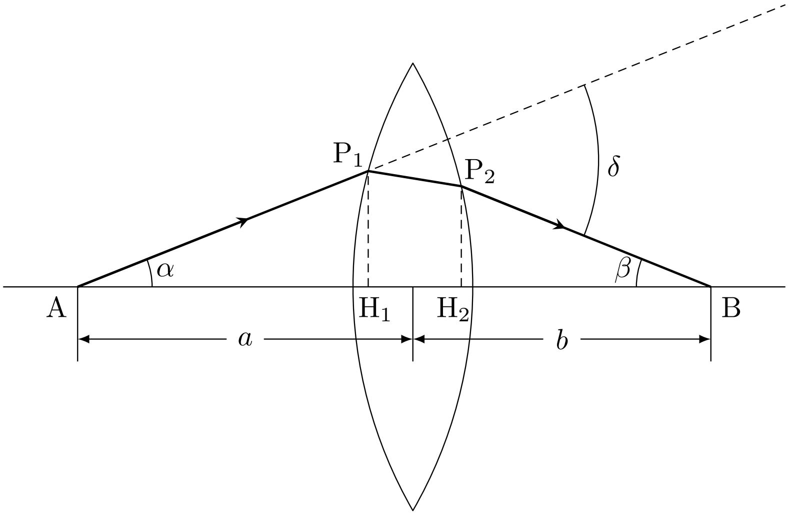


図 2

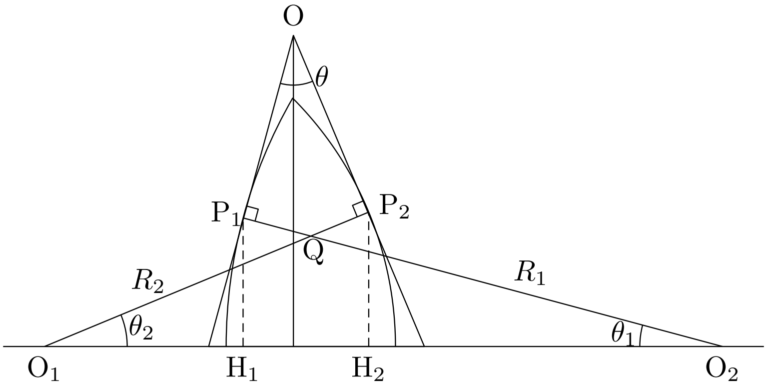


図 3

【メモ】

・(1) は角度のみから図形を考察する．今の場合，平行線がないため，三角形の内角・外角を見るほかない．

・(2) は辺と角度から図形を考察するので，三角比を利用する．

・(3) は角度のみからの考察，角度と辺からの考察の両方を含む．

【解答】

(1)　P_1，および P_2 における屈折の法則より，

$$\begin{cases} n\sin r = \sin i\,, \\ n\sin i' = \sin r'\,, \end{cases} \qquad \therefore \sin r = \underbrace{\frac{1}{n}\sin i}_{①}\ ,\quad \sin i' = \underbrace{\frac{1}{n}\sin r'}_{②}\ .$$

この結果に近軸近似を行って，

$$r \fallingdotseq \underbrace{\frac{i}{n}}_{③}\ ,\quad i' \fallingdotseq \underbrace{\frac{r'}{n}}_{④}\ .$$

ここで，$\triangle \mathrm{OP_1P_2}$ の内角に注目して，

$$\left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - i'\right) + \theta = \pi\,, \qquad \therefore i' = \underbrace{\theta - r}_{⑤}\ .$$

以上より，全屈折角 δ は[*9]，

$$\begin{aligned} \delta &= (r' - i') + (i - r) \\ &\fallingdotseq (n-1)i' + (n-1)r \\ &= (n-1)(\theta - r) + (n-1)r = \underbrace{(n-1)\theta}_{⑥}\ . \end{aligned}$$

(2)　図より，

$$\alpha \fallingdotseq \tan\alpha = \underbrace{\frac{h}{a}}_{⑦}\ ,\quad \beta \fallingdotseq \tan\beta = \underbrace{\frac{h}{b}}_{⑧}\ .$$

よって，図より[*10]，

$$\delta = \alpha + \beta = \underbrace{\frac{h}{a} + \frac{h}{b}}_{⑨}\ .$$

(3)　図より，

$$\theta_1 \fallingdotseq \sin\theta_1 = \frac{h}{R_1}\,,\quad \theta_2 \fallingdotseq \sin\theta_2 = \frac{h}{R_2}$$

[*9] P_2 から出る光線をプリズム内部まで延長した直線と入射光線の延長線によってできた三角形の外角を考えればよい．

[*10] 直線 BP_2 を延長し，AP_1 との交点から光軸に平行な直線を考えると，平行線の錯角・同位角から δ が決定される．

であり，平行線の錯角，および $\triangle \mathrm{OP_1P_2}$ の内角に注目して，

$$\theta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) = \pi\,, \qquad \therefore \theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{h}{R_1} + \frac{h}{R_2}\,.$$

よって，

$$\frac{h}{a} + \frac{h}{b} = (n-1)\left(\frac{h}{R_1} + \frac{h}{R_1}\right) = \frac{1}{f}\,, \qquad \therefore f = \underbrace{\frac{1}{n-1}\frac{R_1R_2}{R_1+R_1}}_{⑩}\,.$$

§7.2 レンズと球面鏡

第 2 章では，レンズ（と鏡）の性質について扱う．内容としては，(i) 写像公式の導出，(ii) 写像公式を使うだけの問題となる．写像公式の導出は，前章問題 4 でやったように，スネルの法則からきちんと議論するものもあるが，この章では，辺の情報だけから（すなわち相似な図形に注目する）写像公式の導出を行う（像の倍率を 2 通りで表現するだけ）．なお，写像公式の導出全パターンは授業内で行う．

■簡単なまとめ

- 凸レンズ・凹レンズの写像公式：
  レンズと物体の距離を a，レンズと像の距離を b，レンズの焦点距離を f とする．

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\begin{cases}\dfrac{1}{f} & \text{（凸レンズ）}\\ -\dfrac{1}{f} & \text{（凹レンズ）}\end{cases}$$

  なお，レンズ前方に生じるような像（虚像）の場合 $b<0$ となり，組み合わせレンズを考える場合，1 つ目のレンズによって $a<0$ となる位置に仮想的に結像する像を虚光源という．また，レンズの倍率 m は，

$$m=\left|\frac{b}{a}\right|$$

  となり，中身の符号が正であれば倒立，負であれば正立である．

- 凸面鏡・凹面鏡の写像公式：
  凸面鏡は凹レンズと，凹面鏡は凸レンズと同様の写像公式となる．なお，b の正の側がレンズと逆向きになっていることに注意．

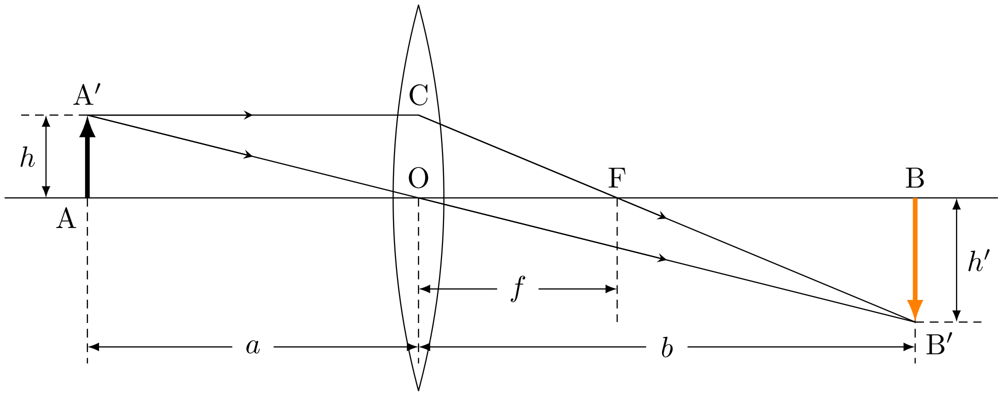
1. 凸レンズの写像公式

図のように各点 O，A，A′，B，B′，C，F（焦点）を定める．$\overline{\mathrm{OA}} = a$，$\overline{\mathrm{OB}} = b$，$\overline{\mathrm{OF}} = f < a$，物体（黒い矢印）の高さを $\overline{\mathrm{AA'}} = h$，観測される像（オレンジの矢印）の高さを $\overline{\mathrm{BB'}} = h'$ とする[*11]．

(1)　図中の相似な図形に注目することで，像の倍率 $\dfrac{h'}{h}$ を，a，b を用いて表せ．

(2)　図中の相似な図形に注目することで，像の倍率 $\dfrac{h'}{h}$ を，b，f を用いて表せ．

(3)　f を，a，b を用いて表せ．



【メモ】

辺のみから図形を考察するので，相似な図形に注目する．$f > a$ の場合は授業ノートを参照．

【解答】

(1)　△OAA′ ∼ △OBB′ より，

$$\frac{h'}{h} = \frac{b}{a}.$$

(2)　△FOC ∼ △FBB′ より，

$$\frac{h'}{h} = \frac{b-f}{f}.$$

(3)　(1)，(2) より，

$$\frac{b}{a} = \frac{b-f}{f}, \qquad \therefore f = \frac{ab}{a+b} \quad \left(\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \right).$$

[*11] 図ではレンズの中心で屈折しているように描いているが，実際は前章の問題 *4* のように屈折している．

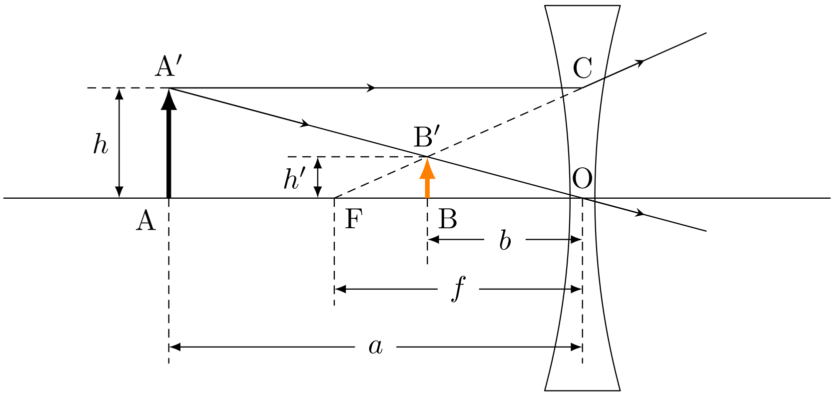
2. 凹レンズの写像公式

図のように各点 O，A，A′，B，B′，C，F（焦点）を定める．$\overline{\mathrm{OA}}=a$，$\overline{\mathrm{OB}}=b$，$\overline{\mathrm{OF}}=f$，物体（黒い矢印）の高さを $\overline{\mathrm{AA'}}=h$，観測される像（オレンジの矢印）の高さを $\overline{\mathrm{BB'}}=h'$ とする．

(1)　図中の相似な図形に注目することで，像の倍率 $\dfrac{h'}{h}$ を，a，b を用いて表せ．

(2)　図中の相似な図形に注目することで，像の倍率 $\dfrac{h'}{h}$ を，b，f を用いて表せ．

(3)　f を，a，b を用いて表せ．



【解答】

(1)　△OAA′ ∼ △OBB′ より，

$$\frac{h'}{h}=\underset{\sim}{\frac{b}{a}}.$$

(2)　△FOC ∼ △FBB′ より，

$$\frac{h'}{h}=\underset{\sim\sim}{\frac{f-b}{f}}.$$

(3)　(1)，(2) より，

$$\frac{b}{a}=\frac{b-f}{f},\qquad \therefore f=\underset{\sim\sim}{\frac{ab}{a-b}}\ \left(\Longleftrightarrow\ \frac{1}{a}+\frac{1}{-b}=-\frac{1}{f}\right).$$

3. 球面鏡の焦点距離と半径の関係

図のように各点 C（球面の中心），A，A′，F（焦点），Q（P から光軸に下した垂線と光軸の交点）を定める．$\overline{\mathrm{OF}} = f$，鏡面の半径を R，$\angle \mathrm{A'PF} = \theta$ とする．近軸光線ゆえ θ は微小角と見なせ，以下では $\sin\theta \fallingdotseq \theta$，$\cos\theta \fallingdotseq 1$，$\tan\theta \fallingdotseq \theta$ と近似せよ．

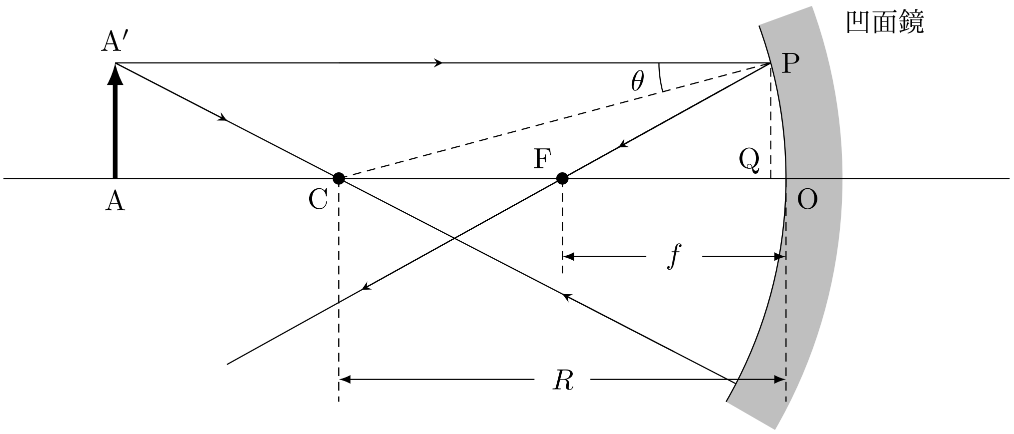
(1)　入射角と反射角が等しいことから，$\angle \mathrm{A'PC} = \angle \mathrm{CPF}$ が成り立つ．$\angle \mathrm{PFQ} = \theta$ を求めよ．

(2)　$\triangle$CPQ に注目し，$\overline{\mathrm{PQ}}$ を R，θ を用いて表せ．

(3)　$\triangle$CPQ，線分 CO に注目し，$\overline{\mathrm{OQ}} \fallingdotseq 0$ を示せ．

(4)　$\triangle$FPQ に注目し，$\overline{\mathrm{PQ}}$ を f，θ を用いて表せ．

(5)　f を R を用いて表せ．



【解答】

(1)　入射角と反射角は等しく $\angle \mathrm{A'PC} = \angle \mathrm{CPF} = \theta$ であり，平行線の錯角から $\angle \mathrm{A'PC} = \angle \mathrm{PCF} = \theta$ である．よって，$\triangle$CPF の外角より $\angle \mathrm{PFQ} = 2\theta$.

(2)　$\overline{\mathrm{PQ}} = R\sin\theta \fallingdotseq R\theta$.

(3)　図より $\overline{\mathrm{CO}} = \overline{\mathrm{CQ}} + \overline{\mathrm{OQ}}$ より，

$$R = R\cos\theta + \overline{\mathrm{OQ}} , \qquad \therefore \overline{\mathrm{OQ}} = R(1-\cos\theta) \fallingdotseq 0 .$$

(4)　$\overline{\mathrm{PQ}} \fallingdotseq f\tan 2\theta \fallingdotseq 2f\theta$.

(5)　(2)，(3) に近軸近似を施して，

$$f \cdot 2\theta \fallingdotseq R\theta , \qquad \therefore f = \frac{R}{2} .$$

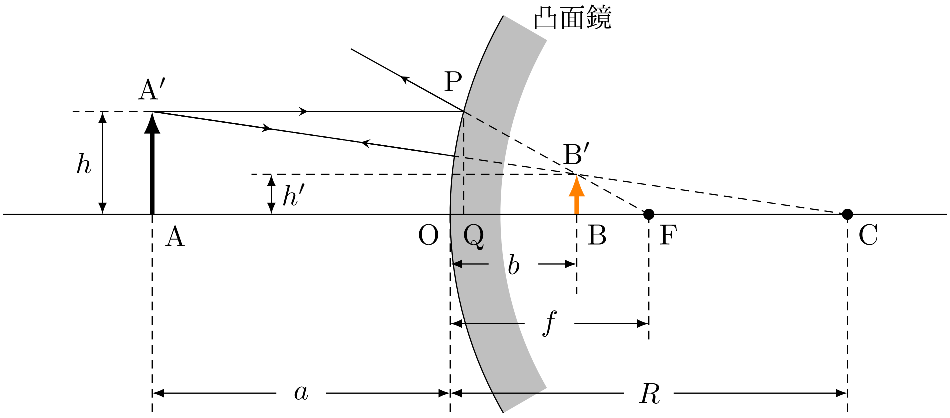
4. 凸面鏡の写像公式

図のように各点 C（球面の中心），A，A′，B，B′，O（光軸と鏡面の交点），F（焦点），Q（P から光軸に下した垂線と光軸の交点）を定める．$\overline{\mathrm{OA}} = a$，$\overline{\mathrm{OB}} = b$，$\overline{\mathrm{OF}} = f$，物体（黒い矢印）の高さを $\overline{\mathrm{AA'}} = h$，観測される像（オレンジの矢印）の高さを $\overline{\mathrm{BB'}} = h'$ とし，近軸光線を考える場合 $\overline{\mathrm{OF}} \fallingdotseq \overline{\mathrm{QF}}$ が成り立つ．

(1)　図中の相似な図形に注目することで，像の倍率 $\dfrac{h'}{h}$ を，a，b，R を用いて表せ．

(2)　図中の相似な図形に注目することで，像の倍率 $\dfrac{h'}{h}$ を，b，f を用いて表せ．

(3)　$R = 2f$ を用い，f を a，b を用いて表せ．



【解答】

(1)　$\triangle\mathrm{CAA'} \sim \triangle\mathrm{CBB'}$ より，

$$\frac{h'}{h} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{R-b}{a+R}}.$$

(2)　$\triangle\mathrm{FPQ} \sim \triangle\mathrm{FBB'}$ より，

$$\frac{h'}{h} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{f-b}{f}}.$$

(3)　(1)，(2) より，

$$\frac{R-b}{R+a} = \frac{f-b}{f}, \qquad \therefore f = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{ab}{a-b}} \quad \left(\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{-b} = -\frac{1}{f}\right).$$

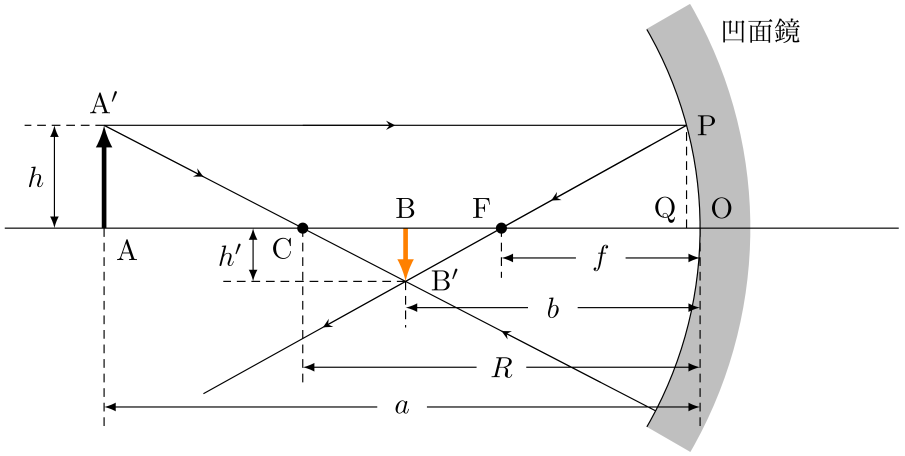
5. 凹面鏡の写像公式

図のように各点 C（球面の中心），A，A′，B，B′，O（光軸と鏡面の交点），F（焦点），Q（P から光軸に下した垂線と光軸の交点）を定める．$\overline{\mathrm{OA}} = a$，$\overline{\mathrm{OB}} = b$，$\overline{\mathrm{OF}} = f < a$，物体（黒い矢印）の高さを $\overline{\mathrm{AA'}} = h$，観測される像（オレンジの矢印）の高さを $\overline{\mathrm{BB'}} = h'$ とし，近軸光線を考える場合 $\overline{\mathrm{OF}} \fallingdotseq \overline{\mathrm{QF}}$ が成り立つ．

(1)　図中の相似な図形に注目することで，像の倍率 $\dfrac{h'}{h}$ を，a，b，R を用いて表せ．

(2)　図中の相似な図形に注目することで，像の倍率 $\dfrac{h'}{h}$ を，b，f を用いて表せ．

(3)　$R = 2f$ を用い，f を a，b を用いて表せ．



【メモ】

$f > a$ で虚像が生じる場合は授業ノートを参照．

【解答】

(1)　$\triangle\mathrm{CAA'} \sim \triangle\mathrm{CBB'}$ より，

$$\frac{h'}{h} = \frac{R-b}{a-R}.$$

(2)　$\triangle\mathrm{FPQ} \sim \triangle\mathrm{FBB'}$ より，

$$\frac{h'}{h} = \frac{b-f}{f}.$$

(3)　(1)，(2) より，

$$\frac{R-b}{a-R} = \frac{b-f}{f}, \qquad \therefore f = \frac{ab}{a+b} \quad \left(\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \right).$$

6. 写像公式使うだけ①

レンズ，球面鏡に対して生じる像に関して考察する．レンズ，および球面鏡に対し物体の側をレンズ前方，逆側をレンズ後方と呼ぶ．以下の設問では，「レンズ前方 10 cm の位置に倍率 3 倍の正立虚像」のように解答せよ．

(1)　凸レンズ（焦点距離 6 cm）から 10 cm 離した位置に物体を置く．観測される像の種類，位置を求めよ．また，物体に対する像の倍率を求めよ．

(2)　凸レンズ（焦点距離 6 cm）から 4 cm 離した位置に物体を置く．観測される像の種類，位置を求めよ．また，物体に対する像の倍率を求めよ．

(3)　凹レンズ（焦点距離 8 cm）から 12 cm 離した位置に物体を置く．観測される像の種類，位置を求めよ．また，物体に対する像の倍率を求めよ．

(4)　凹面鏡（曲率半径 16 cm）から 12 cm 離した位置に物体を置く．観測される像の種類，位置を求めよ．また，物体に対する像の倍率を求めよ．

(5)　凹面鏡（曲率半径 16 cm）から 6 cm 離した位置に物体を置く．観測される像の種類，位置を求めよ．また，物体に対する像の倍率を求めよ．

(6)　凸面鏡（曲率半径 18 cm）から 6 cm 離した位置に物体を置く．観測される像の種類，位置を求めよ．また，物体に対する像の倍率を求めよ．

【解答】

写像公式を用いて計算すると以下のようになる．

(1)　レンズ後方 15 cm の位置に倍率 1.5 倍の倒立実像.

(2)　レンズ前方 12 cm の位置に倍率 3 倍の正立虚像.

(3)　レンズ前方 4.8 cm の位置に倍率 0.4 倍の正立虚像.

(4)　鏡前方 24 cm の位置に倍率 2 倍の倒立実像.

(5)　鏡後方 24 cm の位置に倍率 4 倍の正立虚像.

(6)　鏡後方 3.6 cm の位置に倍率 0.6 倍の正立虚像.

7. 写像公式使うだけ②

焦点距離 8 cm の凸レンズ（レンズ 1）周辺に物体（大きさ 4 cm）を置き，観測される像について考える．レンズに対し物体の側をレンズ前方，逆側をレンズ後方と呼ぶ．以下の設問では，「レンズ前方 10 cm の位置に大きさ 4 cm の正立虚像」のように解答せよ．

(1)　レンズ 1 前方 12 cm の位置に物体を置き，レンズ 1 後方 48 cm の位置に焦点距離 12 cm の凸レンズ（レンズ 2）を置く．最終的に観測される像について述べよ．

(2)　レンズ 1 前方 12 cm の位置に物体を置き，レンズ 1 後方 16 cm の位置に焦点距離 12 cm の凹レンズ（レンズ 2）を置く．最終的に観測される像について述べよ．

(3)　レンズ 1 後方 x の位置に焦点距離 12 cm の凸レンズ（レンズ 2）を置くと，最終的にレンズ 2 前方 24 cm の位置に虚像が観測された．x を求めよ．

(4)　レンズ 1 前方 12 cm の位置に物体を置き，レンズ 1 後方 16 cm の位置に曲率半径 16 cm の凹面鏡を置く．最終的に観測される像について述べよ．

【解答】

(1)　レンズ 1 に対して写像公式を用い，

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{b}=\frac{1}{8}\,,\qquad \therefore b=24\,\mathrm{cm}\,.$$

同様にレンズ 2 に対して写像公式を用い，

$$\frac{1}{24}+\frac{1}{b'}=\frac{1}{12}\,,\qquad \therefore b'=24\,\mathrm{cm}\,.$$

よって，総合倍率は，

$$m=\left|\frac{24}{12}\right|\cdot\left|\frac{24}{24}\right|=2\,.$$

以上より，レンズ 2 後方 24 cm の位置に大きさ 8 cm の正立実像 となる．

(2)　レンズ 1 に対して写像公式を用い，

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{b}=\frac{1}{8}\,,\qquad \therefore b=24\,\mathrm{cm}\,.$$

よって，レンズ 2 に対してはこの像を虚光源と見なし写像公式を用いて，

$$\frac{1}{-8}+\frac{1}{b'}=-\frac{1}{12}\,,\qquad \therefore b'=24\,\mathrm{cm}\,.$$

よって，総合倍率は，

$$m=\left|\frac{24}{12}\right|\cdot\left|\frac{24}{-8}\right|=6\,.$$

以上より，レンズ 2 後方 24 cm の位置に大きさ 24 cm の倒立実像 となる．

(3)　レンズ 1 に対して写像公式を用い，

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{b}=\frac{1}{8}\,,\qquad \therefore b=24\,\mathrm{cm}\,.$$

同様にレンズ 2 に対して写像公式を用い[*12]，

$$\frac{1}{x-24}+\frac{1}{-24}=\frac{1}{12}\,,\qquad \therefore x=32\,\mathrm{cm}\,.$$

(4)　レンズ 1 に対して写像公式を用い，

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{b}=\frac{1}{8}\,,\qquad \therefore b=24\,\mathrm{cm}\,.$$

[*12] $x>24\,\mathrm{cm}$ の場合を考えると，虚光源として扱って $a=-x-24$ となり式と結果ともに同じものとなる．

よって，凹面鏡に対してはこの像を虚光源と見なし写像公式を用いて，

$$\frac{1}{-8}+\frac{1}{b'}=\frac{1}{8}, \qquad \therefore b'=4\,\mathrm{cm}$$

となり，凹面鏡前方 4 cm の位置に実像が生じる．更にこれの像に対してレンズ 1 の写像公式を用いれば，鏡によって光軸（光の進行方向）が反転することに注意して[*13]，

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{b''}=\frac{1}{8}, \qquad \therefore b''=24\,\mathrm{cm}\,.$$

以上より，総合倍率は，

$$m=\left|\frac{24}{12}\right|\cdot\left|\frac{4}{-8}\right|\cdot\left|\frac{24}{12}\right|=2$$

であり，レンズ 1 左方 24 cm の位置に大きさ 8 cm の正立実像 となる．

*13 普段右向き対して正負を考えているものを左向きに対して正負を考える．

§7.3 光の干渉

第 3 章では，光の干渉を主に扱う．光の干渉は，ヤングの実験を始めとした有名テーマ毎に押さえていく．なお，はじめに光速の測定に関する話題も触れておく．

■簡単なまとめ

- 干渉：

  干渉条件は位相差で議論できるようにしておく．

$$
\begin{aligned}
(\text{位相差}) &= \frac{2\pi}{\lambda}(\text{経路差}) + (\text{初期位相差}) + (\text{反射に伴う位相のずれ}) \\
&= \begin{cases} 2m\pi & (\text{強めあい}), \\ (2m-1)\pi & (\text{弱めあい}). \end{cases}
\end{aligned}
$$

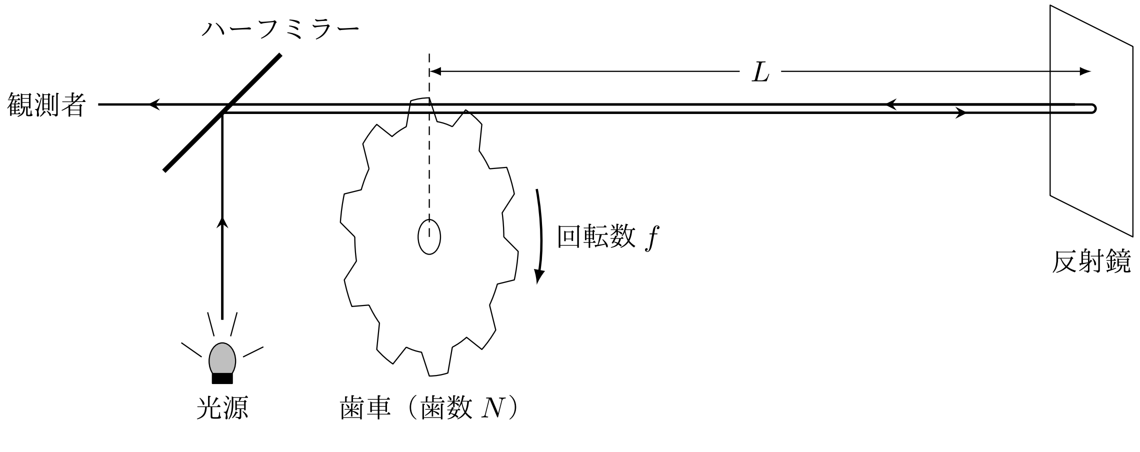
1. 光速の測定実験①

フィゾーは，1849 年に地上で初めて光速の測定を行った．図は，その実験装置の模式図である．光源から出た光の一部がハーフミラーで反射され，歯数 N の歯車の隙間を通過し，歯車から距離 L だけ離れた反射鏡で反射された光が再び歯車を通過し，ハーフミラーを透過して観測者によって観測される仕組みとなっている．歯車の回転数（単位時間当たりの回転回数）が小さいとき観測者は絶え間なく光を観測するが，回転数が f となったとき，初めて光が観測されなくなった．光速を c とする．

(1)　光が歯車の隙間を通過し，鏡で反射され，再び歯車に戻ってくるまでの時間 t_1 を，c，L を用いて表せ．

(2)　歯車の回転数が f のとき，光が往復する間の時間に歯車はちょうど歯 1 個分（歯のある部分が歯のない部分へ 1 個ずれる）だけ回転する．歯車が歯 1 個分だけ回転する時間 t_2 を，f，N を用いて表せ．

(3)　t_1 と t_2 が等しいことから，c を，f，N，L で表せ．



【解答】

(1)　$t_1 = \dfrac{2L}{c}$.

(2)　歯数が N 個のため，この間，歯車は $\dfrac{1}{2N}$ 周する．よって，

$$ft_2 = \frac{1}{2N}, \qquad \therefore t_2 = \frac{1}{2fN}.$$

(3)　$c = 4fNL$.

2. 光速の測定実験②

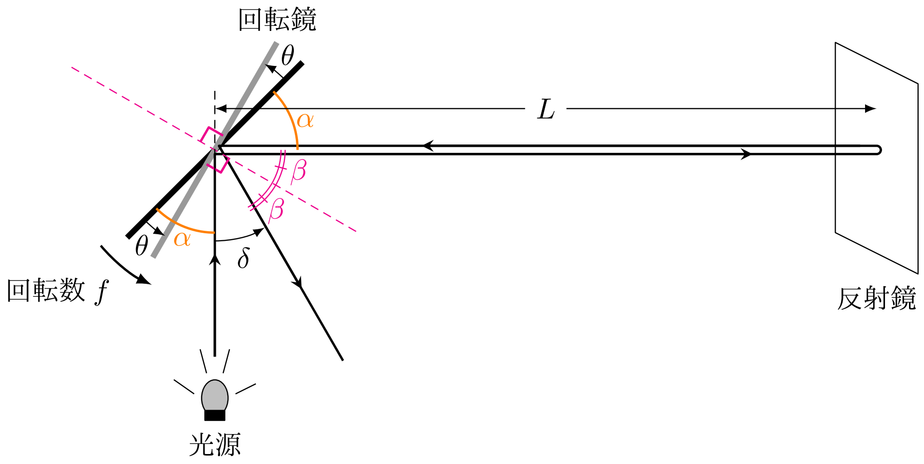
フーコーは 1862 年に光速の測定を行った．図は，その実験装置の模式図である．光源から出た光が回転鏡（回転数 f）で反射され，回転鏡から距離 L だけ離れた位置にある反射鏡で反射された後，再び回転鏡で反射される．このとき，戻ってきた反射光は，入射した光に対し δ だけずれた方向に観測される．光速を c とする．

(1)　光が回転鏡で反射され反射鏡で反射された後，再び回転鏡に戻ってくるまでの時間 t_1 を，c，L を用いて表せ．

(2)　光が 1 回目に回転鏡を反射してから 2 回目に反射するまでの回転鏡の回転角を θ とする．回転鏡の回転角が θ となる時間 t_2 を，f，θ を用いて表せ．

(3)　θ を，δ を用いて表せ．

(4)　t_1 と t_2 が等しいことから，c を，f，δ，L で表せ．



【解答】

(1)　$t_1 = \dfrac{2L}{c}$．

(2)　回転鏡の単位時間当たりの回転角は $\dfrac{1}{2\pi f}$ ゆえ，θ 回転するのに要する時間は $t_2 = \dfrac{\theta}{2\pi f}$．

(3)　図より[*14]，$\theta = \dfrac{\delta}{2}$．

(4)　$c = \dfrac{8\pi f L}{\delta}$．

*14 入射角と反射角が等しいことから α，β が図のようになり，$\begin{cases} (\alpha - \theta) + \delta + \beta = \dfrac{\pi}{2} \\ \theta + \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

3. ヤングの実験（I は基本）

図のように，単色光（波長 λ）がスリット S_0 で回折し，そこから 2 つのスリット S_1，S_2 で回折され，スクリーン上では干渉縞が観測された．スリット S_0 と S_1，S_2 の距離を ℓ，スリット S_1，S_2 とスクリーンの距離を L，S_1 と S_2 の間隔を d とする．この装置全体は真空中に在り，真空の屈折率を 1 とする．以下では，L，ℓ 以外の長さに関する量は全て L，ℓ に比べて十分に小さいとする．

スリット S_1，S_2 の垂直二等分線とスクリーンの交点を原点 O とし，図のように x 軸を定める．スクリーン上の位置 x_m にある点 P では，m 次の明線が観測された（m は整数）．

I　まず，ヤングの実験の基本的な計算を行う．

(1)　スリット S_1，S_2 から点 P で観測される 2 つの光の位相差 $\Delta\phi$ を，以下の 2 通りによって d，L，x_m，λ を用いて表せ[*15]．

(a)　図 2 のように両スリットから点 P に届く光は平行と見なせるとし，その方向 θ は微小で，微小角 θ に対して成り立つ近似式 $\sin\theta \fallingdotseq \tan\theta$ を用いることで経路差を計算する．

(b)　三平方の定理から $\overline{S_1P}$，$\overline{S_2P}$ をそれぞれ計算し，$|\varepsilon| \ll 1$ の微小量 ε に対して成り立つ近似式 $\sqrt{1+\varepsilon} \fallingdotseq 1 + \dfrac{1}{2}\varepsilon$ を用いることで経路差を計算する．

(2)　O 付近で観測される明線の間隔 Δx を，d，L，λ を用いて表せ．

II　I の装置に対して，以下の条件を付与したときの明線の状況を考える．

(1)　単色光ではなく白色光を入射した場合，明線付近の明線の様子はどうなるか．

(2)　スリット S_1 の手前側に厚さ a，屈折率 n の媒質を貼り付けたとき，0 次の明線が観測される位置は，はじめと比べてどれだけずれるか．

(3)　スリット S_1 の媒質を除く．スリット S_0 を x 軸正方向に $h\,(>0)$ だけ動かしたとき，0 次の明線が観測される位置は，はじめと比べてどれだけずれるか．ただし，$h \ll \ell$ とする．

(4)　S_1，S_2 の位置にあるスリットの数を 2 つから増やしていくと，観測される明線の様子はどのようになっていくか（この問題の定量的解説は問題 *9* に）．

[*15] この 2 通りとさらに異なるやり方については授業内で紹介します．

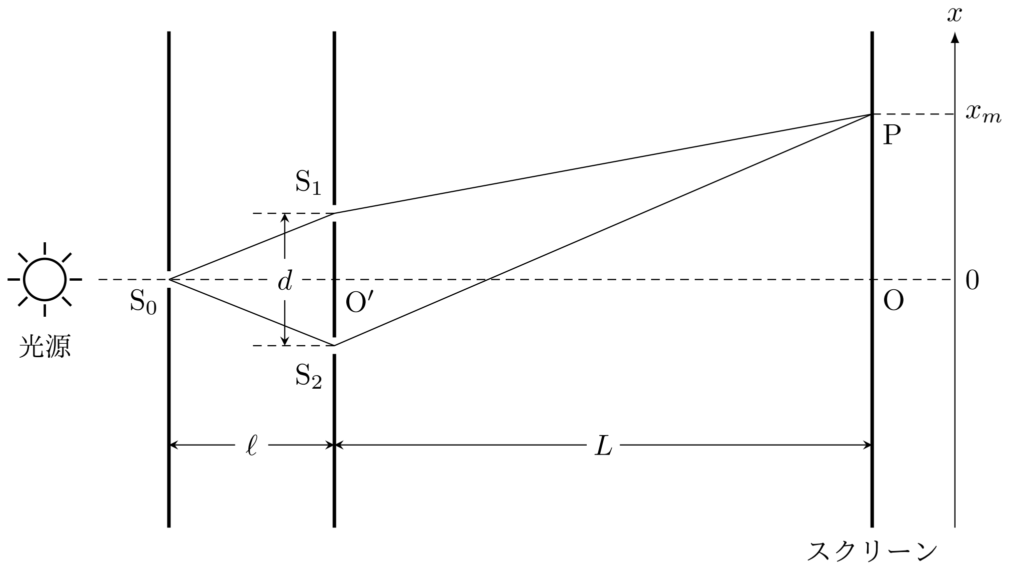


図 1

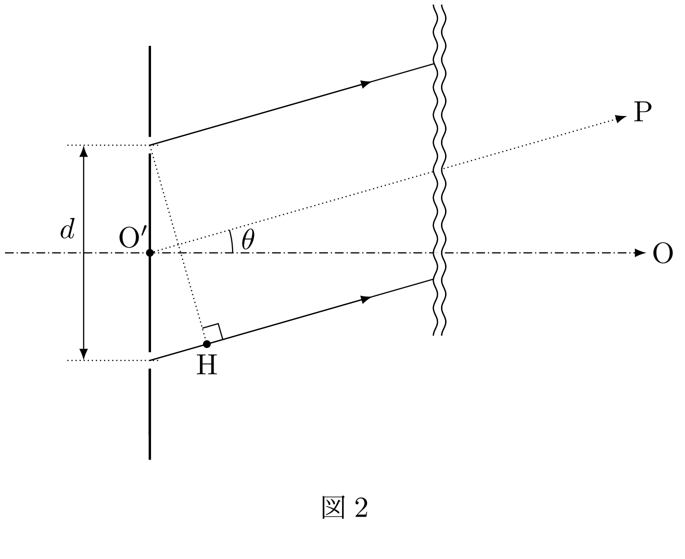


図 2

【解答】

I (1) (a)　2 つの光の経路差は $d\sin\theta \fallingdotseq d\tan\theta$ であり，図 2 より $\tan\theta = \dfrac{x_m}{L}$ である．近似式を用いて，

$$\varDelta\phi = \underline{\frac{2\pi}{\lambda}\frac{dx_m}{L}}\,.$$

(b)　2 つの光の経路差は

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{S_1P}} - \overline{\mathrm{S_2P}} &= \sqrt{L^2 + \left(x_m + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{L^2 + \left(x_m - \frac{d}{2}\right)^2} \\ &= L\left\{\sqrt{1 + \left(\frac{x_m + d/2}{L}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{x_m - d/2}{L}\right)^2}\right\} \\ &\fallingdotseq L\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x_m + d/2}{L}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x_m - d/2}{L}\right)^2\right)\right\} \\ &= \frac{dx_m}{L}\,.\end{aligned}$$

よって，位相差は，

$$\varDelta\phi = \underline{\frac{2\pi}{\lambda}\frac{dx_m}{L}}\,.$$

(2)　明線条件を考えて，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{dx_m}{L} = 2m\pi\,, \qquad \therefore x_m = \frac{L\lambda}{d}m\,.$$

よって，

$$\varDelta x = x_{m+1} - x_m = \underline{\frac{L\lambda}{d}}\,.$$

II (1)　明線間隔は $\dfrac{L\lambda}{d}$ ゆえ，λ が大きいほど明線間隔もまた大きくなる．すなわち，O ではすべての波長の光が強め合い白色の明線が生じ，そこから離れた位置では O に近い側から青→緑→赤のように波長が短い順に明線が生じる．

(2)　位相差は，

$$\varDelta\phi = \left(\frac{2\pi}{\lambda}t + \frac{2\pi}{\lambda}\overline{\mathrm{S_2P}}\right) - \left(\frac{2\pi}{\lambda/n}t + \frac{2\pi}{\lambda}\overline{\mathrm{S_1P}}\right) \fallingdotseq \frac{2\pi}{\lambda}\left\{(1-n)t + \frac{dx_m}{L}\right\}\,.$$

よって，m 次の明線が観測される位置は，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left\{(1-n)a + \frac{dx_m}{L}\right\} = 2m\pi\,, \qquad \therefore x_m = \frac{L\lambda}{d}m + (n-1)\frac{La}{d}$$

であり，0 次の明線が観測される位置は <u>x 軸正方向に $(n-1)\dfrac{La}{d}$</u> 動く．

(3)　位相差は,

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\overline{\mathrm{S_0S_2}} + \overline{\mathrm{S_2P}}\right) - \frac{2\pi}{\lambda}\left(\overline{\mathrm{S_0S_1}} + \overline{\mathrm{S_1P}}\right) \fallingdotseq \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{dh}{\ell} + \frac{dx_m}{L}\right).$$

よって，m 次の明線が観測される位置は,

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{dh}{\ell} + \frac{dx_m}{L}\right) = 2m\pi\,, \qquad \therefore x_m = \frac{L\lambda}{d}m - \frac{Lh}{\ell}$$

であり，0 次の明線が観測される位置は x 軸負方向に $\dfrac{Lh}{\ell}$ 動く.

(4)　鋭い明線が観測されるようになる.

4. 回折格子（I は基本）

図 1 のように，単色光（波長 λ）を回折格子（格子定数 d）に入射し，回折格子から十分離れた位置にあるスクリーンで明線を観測する．図 2 のように，m 次の明線が観測される方向を θ_m（反時計回りを正）とする[*16]．この装置全体は真空中に在り，真空の屈折率を 1 とする．以下では，L，ℓ 以外の長さに関する量は全て L，ℓ に比べて十分に小さいとする．

I　まず，回折格子の光の干渉における基本的な計算を行う[*17]．

(1)　d が一定なことから，隣り合う 2 つの光が強め合いの条件を満たせば全ての光が強め合う．m 次の明線が観測される方向の条件を求めよ．

(2)　図 3 のように，回折格子へ入射する光を反時計回りに α だけ傾けた．このとき，m 次の明線が観測される方向の条件を求めよ．

(3)　図 4 のような反射光型の回折格子を考える．入射角 β で入射したとき，角度 θ_m の方向で m 次の明線が観測される条件を求めよ．

II　I(1) について，以下の条件を付与したときの明線の状況を考える．

(1)　$\lambda = 400\,\mathrm{nm}$ で回折格子には $1\,\mathrm{mm}$ あたり 1000 本の溝があるとき，明線の観測される方向の正弦 $\sin\theta$ を有効数字 1 桁で求めよ．

(2)　スクリーンに観測される明線が 3 本となるための λ の範囲を求めよ．

*16 θ_m は微小角でないことに注意．

*17 反射型回折格子については時間があれば授業内で扱います．

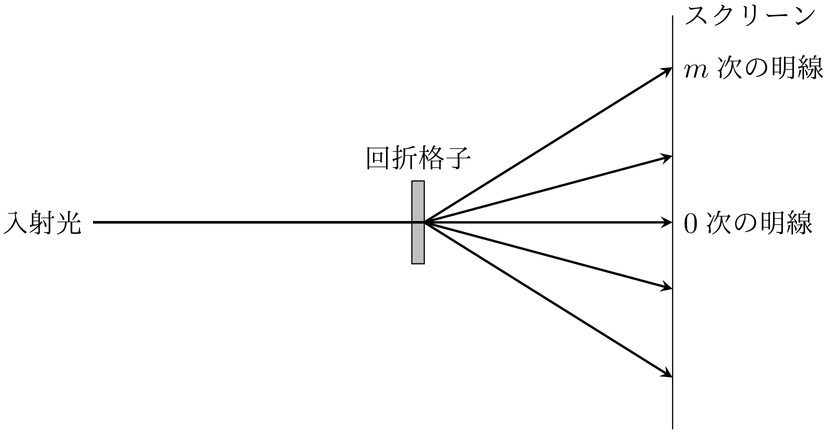

スクリーン
m 次の明線
回折格子
入射光
0 次の明線

図 1

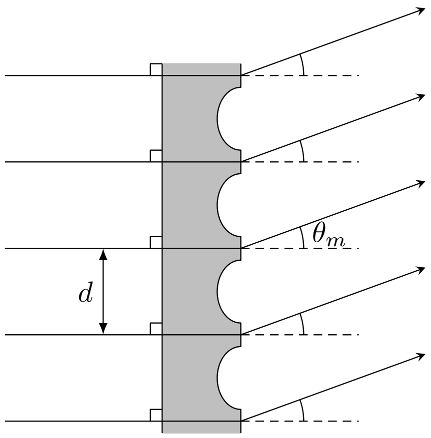

θ_m
d

図 2

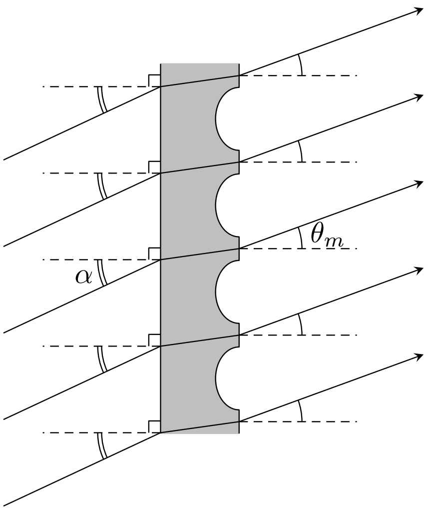

θ_m
α

図 3

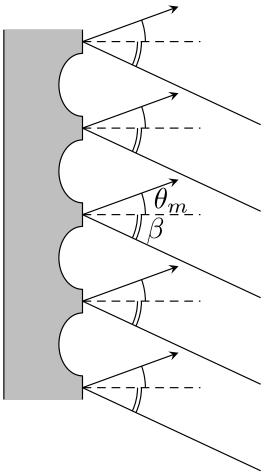

θ_m
β

図 4

【解答】

I (1)　隣り合う 2 つの光の経路差は $d\sin\theta_m$ ゆえ，

$$\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta_m = 2m\pi\,, \qquad \therefore \underset{\sim\sim\sim\sim}{\sin\theta_m = \frac{\lambda}{d}m}\,.$$

(2)　隣り合う 2 つの光の経路差は $d\sin\theta_m - d\sin\alpha$ ゆえ，

$$\frac{2\pi}{\lambda}d(\sin\theta_m - \sin\alpha) = 2m\pi\,, \qquad \therefore \sin\theta_m = \frac{\lambda}{d}m + \sin\alpha\,.$$

(3)　隣り合う 2 つの光の経路差は $d\sin\theta_m - d\sin\beta$ ゆえ，

$$\frac{2\pi}{\lambda}d(\sin\theta_m - \sin\beta) = 2m\pi\,, \qquad \therefore \sin\theta_m = \frac{\lambda}{d}m + \sin\beta\,.$$

II (1)　$d = 1\times10^{-6}\,\mathrm{m}$ である．$-1 < \sin\theta_m < 1$ より，

$$-1 < \frac{400\times10^{-9}}{1\times10^{-6}}m < 1\,, \qquad \therefore -2.5 < m < 2.5\,.$$

よって，この範囲の整数 m は 0，±1，±2 の 5 つであり，この m に対応する正弦は，

$$\sin\theta_m = 0\,,\ 0.4\,,\ 0.8\,.$$

(2)　$-1 < \sin\theta_m < 1$ より，

$$-1 < \frac{\lambda}{d}m < 1\,, \qquad \therefore -\frac{d}{\lambda} < m < \frac{d}{\lambda}\,.$$

この範囲の整数が 3 個となるためには，

$$\begin{cases} 2 < \dfrac{d}{\lambda}\,, \\ \dfrac{d}{\lambda} \leq 3\,, \end{cases} \qquad \therefore \frac{d}{3} \leq \lambda < \frac{d}{2}\,.$$

5. 薄膜干渉（I は基本）

薄膜上に生じる干渉縞を観測する．図のように，空気中（屈折率 1）から薄膜（屈折率 n，厚さ d）に単色光（波長 λ）を入射角 i で入射し屈折した後，屈折率 n' の媒質との境界面上の点 C で反射し，点 D で再び空気中に屈折し透過する．経路 A → B → C → D をたどる光線と薄膜表面で反射した経路 A′→ B′ をたどる光が干渉しあい，干渉縞が生じる．AA′ は入射光の波面，BB′ は屈折光の波面である．

I　まず，薄膜で生じる干渉の基本的な計算を行う．なお，$1 < n < n'$ とし，屈折角を θ とする．

(1)　スネル則より，$\sin\theta$ を i，n を用いて表せ．

(2)　観測される 2 つの光の位相差 $\varDelta\phi$ を，d，n，θ，λ を用いて表せ．

(3)　m 次の明線が観測される方向を i_m とする．$\sin i_m$ を，m，d，n，λ を用いて表せ．なお，m は整数を表す．

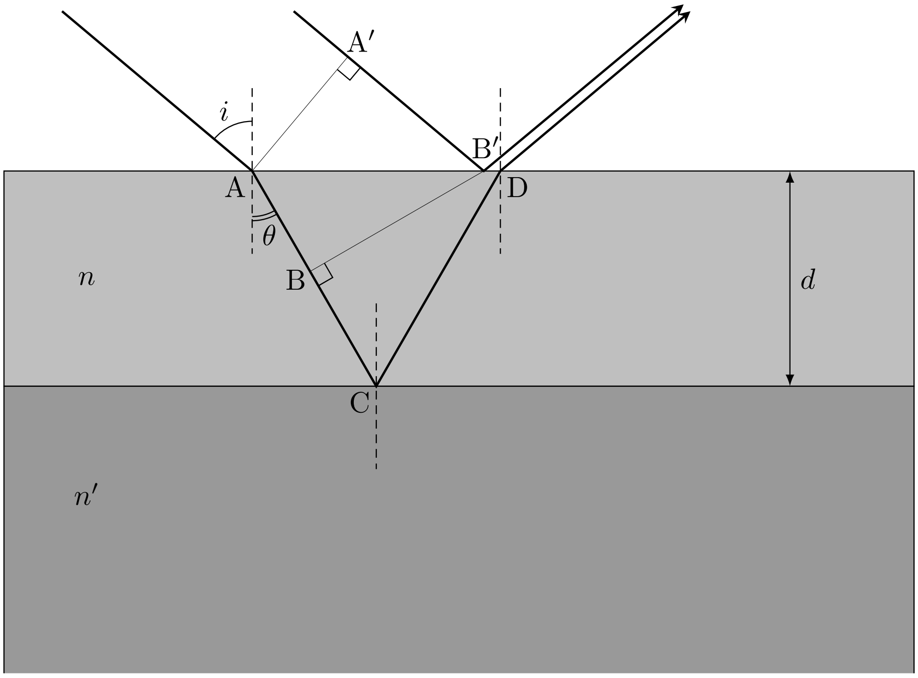
II　以下の状況を考える．

(1)　$1 < n' < n$ としたとき，$\sin i_m$ はどうなるか．

(2)　$i = 0$，$n = 1.2$，$n' = 1$，$d = 1 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$ の場合を考える．このとき，強め合いが生じるような色を答えよ．なお，色と波長の関係は（だいたい）以下のようになっている．

紫: 380 nm〜450 nm	青: 450 nm〜500 nm	緑: 500 nm〜565 nm
黄: 565 nm〜590 nm	橙: 590 nm〜625 nm	赤: 625 nm〜780 nm

(3)　$1 < n < n'$，$i = 0$ とする．膜の厚さ d が λ に比べて十分小さいとき，薄膜の上側での光は必ず強め合うことを示せ．また，膜の厚さ d を徐々に厚くしていったとき，2 度目に弱め合ったときの厚さ d^* を求めよ．


A′
i
B′
A
D
θ
n
B
d
C
n′

【解答】

I (1)　スネル則より，

$$n\sin\theta = 1\cdot\sin i\,,\qquad \therefore \sin\theta = \underset{\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{n}\sin i}\,.$$

(2)　隣り合う 2 つの光の経路差 $\varDelta\ell$ は △BCD に注目して[*18*19]，

$$\begin{aligned}\varDelta\ell &= \frac{d}{\cos\theta} + \frac{d}{\cos\theta}\cos 2\theta \\ &= \frac{d}{\cos\theta}(1+\cos 2\theta) \\ &= 2\cos^2\theta\frac{d}{\cos\theta} \\ &= 2d\cos\theta\,.\end{aligned}$$

よって，位相差はともに反射によって π ずつ位相がずれていることを考慮して，

$$\varDelta\phi = \frac{2\pi}{\lambda/n}\varDelta\ell + \pi - \pi = \frac{4\pi}{\lambda}nd\cos\theta\,.$$

(3)　強め合いの条件を考えて，

$$\frac{4\pi}{\lambda}nd\cos\theta = 2m\pi\,.$$

スネル則より $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin^2 i}$ ゆえ，

$$\frac{4\pi}{\lambda}nd\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin^2 i_m} = 2m\pi\,.,\qquad \therefore \sin i_m = \sqrt{n^2-\left(\frac{\lambda}{2d}m\right)^2}\,.$$

II (1)　下の面で反射する光線の反射の際に生じる位相のずれがなくなるため位相差は，

$$\varDelta\phi = \frac{2\pi}{\lambda/n}\varDelta\ell + \pi = \frac{4\pi}{\lambda}nd\cos\theta + \pi$$

となり，強め合いの条件は，

$$\frac{4\pi}{\lambda}nd\cos\theta + \pi = 2m\pi\,,\qquad \therefore \sin i_m = \sqrt{n^2-\left\{\frac{\lambda}{2d}\left(m-\frac{1}{2}\right)\right\}^2}\,.$$

[*18] 2 倍角の公式 $\cos 2\theta = 2\cos\theta - 1$ を利用している．

[*19] この計算は閃きいらずだが，計算はやや難しく感じられるかもしれない．やや閃きのいる最も一般的なやり方は授業内で扱う．

(2)　干渉条件より，

$$\cos 0 = \frac{\lambda}{2nd}\left(m - \frac{1}{2}\right)\,,\qquad \therefore \lambda = \frac{2nd}{m - \dfrac{1}{2}} = \frac{3\times 10^{-7}}{m - \dfrac{1}{2}}\,\mathrm{m}\,.$$

ここで，可視光領域の範囲内での干渉を考えることから，

$$380\times 10^{-9} \leq \frac{2.4\times 10^{-7}}{m - \dfrac{1}{2}} \leq 780\times 10^{-9}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{24}{76} \leq m \leq \frac{1}{2} + \frac{24}{38}\,,\qquad \therefore m = 1\,.$$

よって，$m = 1$ に対応する光の波長は，

$$\lambda = \frac{2.4\times 10^{-7}}{1 - \dfrac{1}{2}}\,\mathrm{m} = 480\,\mathrm{nm}$$

であり，これは 青 とわかる．

(3)　強め合い，弱め合いの条件は，

$$\frac{4\pi}{\lambda}nd + \pi - \pi = \begin{cases} 2m\pi & \text{強め合い} \\ (2m-1)\pi & \text{弱め合い} \end{cases}$$

ここで，$\dfrac{d}{\lambda} \fallingdotseq 0$ では左辺は 0 となり，これは強め合いの条件の $m = 0$ に相当する．よって，このような場合常に強め合いを示すことがわかる．また，この状態から次の強め合いは $m = 1$ を考えればよく，

$$\frac{4\pi}{\lambda}nd^* = 2\pi\,,\qquad \therefore d^* = \frac{\lambda}{2n}\,.$$

6. 楔形干渉（I は基本）

図 1 のように，屈折率 n の平板ガラスで厚さ D のフィルムを挟み（隙間には空気がある），上から波長 λ の単色光を入射した．ガラスの左端からフィルムまでの距離を L とし，この向きに x 軸を定める（左端を原点に定める）．装置の上側から干渉縞を観測する．空気の屈折率を 1 とする．

I　まず，楔形干渉の基本的な計算を行う．

(1)　ガラスの隙間の角度を θ とする．$\tan\theta$ を D，L を用いて表せ．

(2)　m 番目の明線の位置を x_m とする（m は自然数）．x_m を，m，λ，D，L を用いて表せ．

(3)　θ を微小角とする．前問の x_m を，m，λ，θ を用いて表せ．

II　以下の状況を考える．

(1)　図 2 のように下側から観測したとき，上側で明線だった位置では明線と暗線のどちらが観測されるか．

(2)　再度上側で観測する．下側のガラスを下に d だけ下げたところ，m 次の明線の位置は Δx だけ x 軸負方向にずれた．Δx を求めよ．

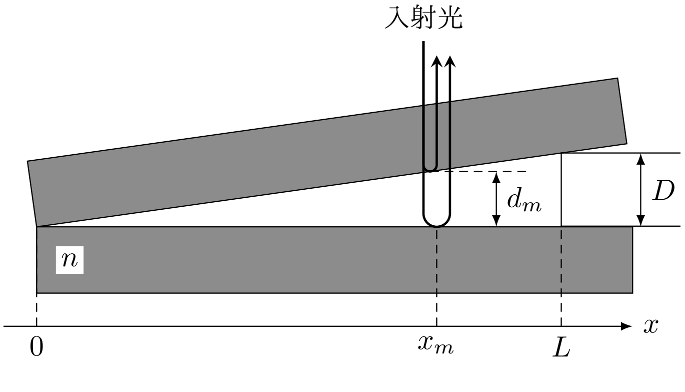


図 1

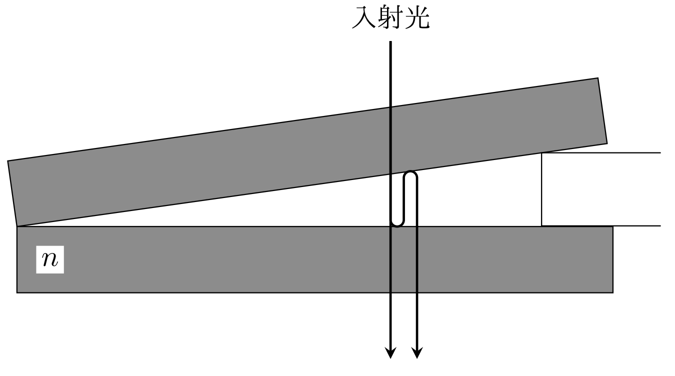


図 2

【解答】

I (1)　$\tan\theta = \underset{\sim\sim}{\dfrac{D}{L}}$.

(2)　$d_m = \dfrac{D}{L}x_m$ ゆえ反射による位相のずれを考慮して，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2\frac{D}{L}x_m + \pi = 2m\pi\,, \qquad \therefore x_m = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{L\lambda}{2D}\left(m-\frac{1}{2}\right)}.$$

(3)　$\tan\theta \fallingdotseq \theta$ より $\dfrac{D}{L} \fallingdotseq \theta$ である．よって，

$$x_m = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{\lambda}{2\theta}\left(m-\frac{1}{2}\right)}.$$

II (1)　反射による位相のずれが 2π となるので強め合いの条件は，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2\frac{D}{L}x_m + 2\pi = 2m\pi\,, \qquad \therefore x_m = \frac{L\lambda}{2D}(m-1)$$

となり，これは上から見たときの弱め合いの条件（$m-1$ 番目の暗線）と一致する．したがって，上から観測して明線となる位置を下から見たとき暗線が観測される．

(2)　強め合いの条件より，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(2\frac{D}{L}x_m + 2d\right) + \pi = 2m\pi\,, \qquad \therefore x_m = \frac{L\lambda}{2D}\left(m-\frac{1}{2}\right) - \underbrace{\frac{L}{D}d}_{=\Delta x}\ .$$

7. ニュートンリング（I は基本）

図のように，屈折率 n の平板ガラスと半径 R の平凸レンズを重ねて置く．平凸ガラスの上から単色光（波長 λ）を入射した．図のように x 軸を定め，m 番目の強め合いが作る環（明環）の半径を r_m とする（m は整数）．

I　まず，ニュートンリングの基本的な計算を行う．

(1)　m 番目の強め合い（明環）が観測される位置の平板ガラスと平凸レンズの間の距離を d_m とする．$d_m \fallingdotseq \dfrac{1}{2}\dfrac{{r_m}^2}{R}$ となることを示せ．なお，$d_m \ll R$ とする．

(2)　r_m を，m，λ，R を用いて表せ．

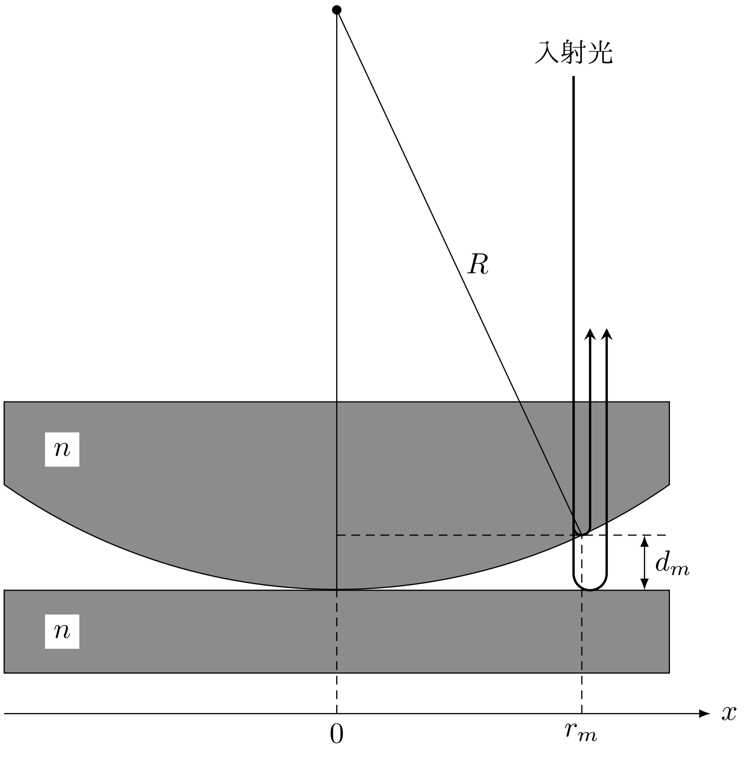
(3)　$x = 0$ に生じるのは明環，暗環のいずれか答えよ．

(4)　$m + 1$ 次の明環の半径は，m 次の明環の半径の何倍か．

II　以下の状況を考える．

(1)　隙間をガラスよりも屈折率の大きい屈折率 n の媒質で満たしたとき，r_m はどのようになるか．

(2)　赤と青のうち，明環の間隔が狭くなるのはいずれか．



【解答】

I (1)　図より，

$$
\begin{aligned}
{r_m}^2 + (R - d_m)^2 &= R^2 \\
\left(\frac{r_m}{R}\right)^2 + \left(1 - \frac{d_m}{R}\right)^2 &= 1 \\
\left(\frac{r_m}{R}\right)^2 + \left(1 - 2\frac{d_m}{R}\right) &\fallingdotseq 1\,, \qquad \therefore d_m = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}\frac{{r_m}^2}{R}}\,.
\end{aligned}
$$

(2)　反射による位相のずれを考慮して，

$$
\frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2d_m + \pi = 2m\pi\,, \qquad \therefore r_m = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)R\lambda}}\,.
$$

(3)　暗環の半径 r'_m は前問同様にして計算すると $r'_m = \sqrt{mR\lambda}$ であり，中心部 $r = 0$ を満たす m が存在するのは暗環の条件である．すなわち，中心では暗環が観測される．

(4)　明環の半径の式から，

$$
\frac{r_{m+1}}{r_m} = \frac{\sqrt{\left(m + 1 - \frac{1}{2}\right)R\lambda}}{\sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)R\lambda}} = \underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{2m+1}{2m-1}}}\,.
$$

II (1)　$\lambda \to \dfrac{\lambda}{n}$ となるので，

$$
r_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{R\lambda}{n}}
$$

と $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 倍となる．

(2)　明環間隔は，

$$
r_{m+1} - r_m = \left(\sqrt{2m+1} - \sqrt{2m-1}\right)\sqrt{R\lambda}
$$

であり，λ が大きいほどその間隔もまた大きくなる．よって．間隔が狭いのは 青．

8. マイケルソン干渉計（I は基本）

図 4 − 1 の HM はハーフミラーで，光路に対して 45° の角度で置かれている．A と B はそれぞれ，光路に対して垂直に置かれた 2 つの平面鏡の上の点である．HM の O に図の左から入射した単色光は透過光と反射光に分かれ，透過光は平面鏡の A で反射された後，さらに HM の O で反射されて光検出器 D に到達し，一方反射光は平面鏡の B で反射された後，HM の O を通過して光検出器 D に到達する．

2 つの平面鏡の O 点からの距離を $\mathrm{OA} - \mathrm{OB} = d$ になるように置く．入射光の波長を変化させていくと，光路 O → A → O → D と，光路 O → B → O → D を経た光の干渉によって，D で検出される光の強度が変化する．

I　まず，マイケルソン干渉計の基本的な計算を行う．

(1)　図 1 の装置を考える．m を自然数として，観測される光の強度が極大となる条件を立式せよ．

II　以下の状況を考える．

(1)　d を大きくしていくと，$d \to \alpha d\,(1 < \alpha < 2)$ となったとき次の極大が観測された．λ，および m を，α，d を用いて表せ．

(2)　図 1 で λ を大きくしていく実験を行う．$\lambda = \lambda_1$ のとき極大を観測しており，$\lambda = \lambda_2$ で次の極大が観測された．m，および d を，λ_1，λ_2 を用いて表せ．

(3)　図 2 に示すように，A を Δd だけ O に近づけ，O と A との間に厚さ t の透明平行板（屈折率 n）を挿入した．

(a)　ℓ を整数として，観測される光の強度が極大となる条件を立式せよ．ただし，$t < d - \Delta d$ とする．

(b)　図 2 で λ を大きくしていく実験を行う．$\lambda = \lambda_1$ のとき II(2) のときと同じく極大を観測しており，$\lambda = \lambda_2$ でも同じようにして次の極大が観測された．ℓ を m を用いて表せ．

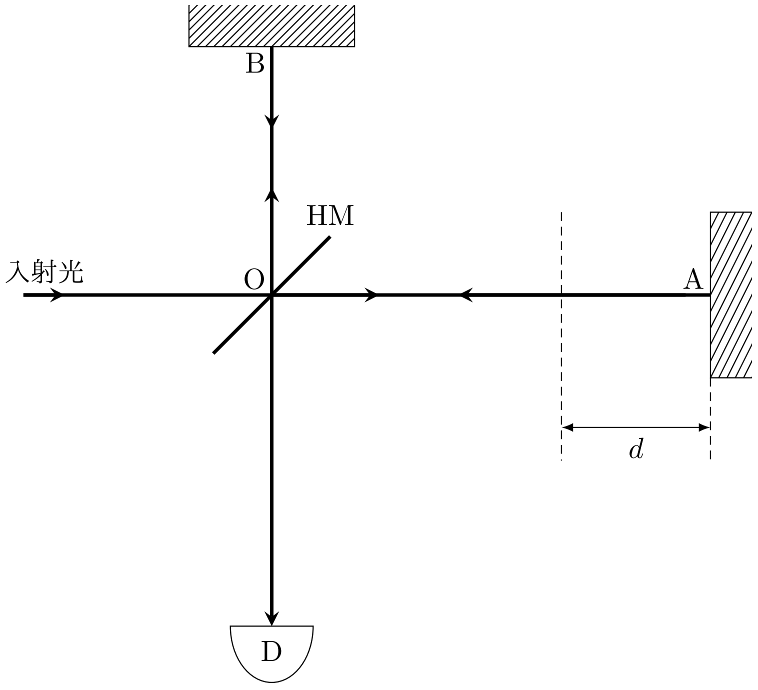


図 1

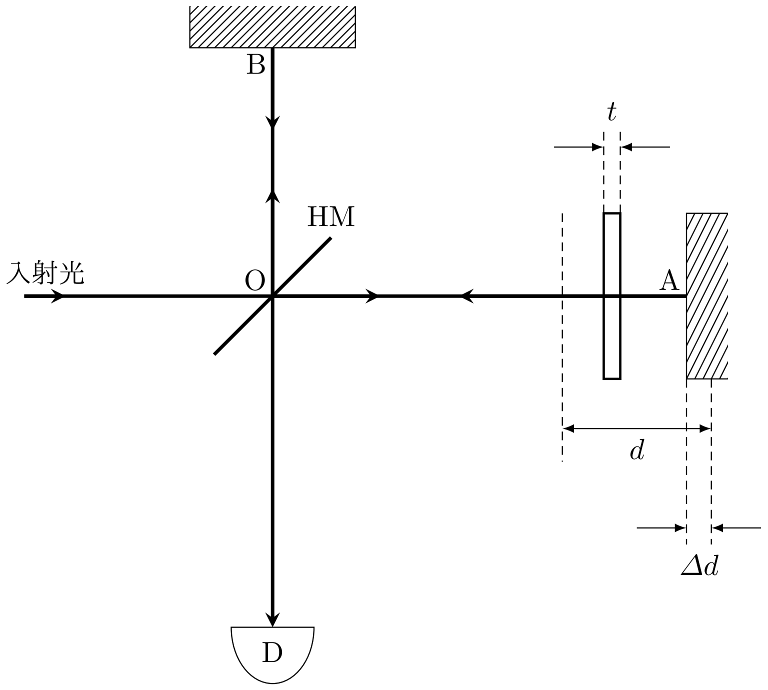


図 2

【解答】

I (1)　2 つの光は同位相である．強め合いの条件を考えて，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2d = 2m\pi\,,\qquad \therefore\ \underset{\sim\sim\sim\sim}{2d = m\lambda}\,.$$

II (1)　λ 一定の下で $d\to\alpha d$ としたとき，左辺が大きくなることから次の極大では $m\to m+1$ となる．よって，

$$\begin{cases} 2d = m\lambda\,, \\ 2\alpha d = (m+1)\lambda \end{cases}\qquad \therefore\ m = \frac{1}{\alpha-1}\,,\quad \lambda = 2(\alpha-1)d\,.$$

(2)　d 一定の下で λ を大きくすると，左辺が一定なことから次の極大では $m\to m-1$ となる．よって，

$$\begin{cases} 2d = m\lambda_1\,, \\ 2d = (m-1)\lambda_2\,, \end{cases}\qquad \therefore\ m = \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\,,\quad d = \frac{1}{2}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\,.$$

(3) (a)　強め合いの条件は，

$$\frac{2\pi}{\lambda_1/n}\cdot 2t + \frac{2\pi}{\lambda_1}\cdot 2(d-\Delta d-t) = 2\ell\pi\,,\qquad \therefore\ 2\{(n-1)t+d-\Delta d\} = \ell\lambda_1\,.$$

(b)　同様にして，

$$\begin{cases} 2\{(n-1)t+d-\Delta d\} = \ell\lambda_1\,, \\ 2\{(n-1)t+d-\Delta d\} = (\ell-1)\lambda_2\,, \end{cases}\qquad \therefore\ \ell = \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} = m\,.$$

9. 多重スリット干渉の一般論（難しい）

以下の文章を読み，[　　] に適した式，または数値を解答せよ．

(1)　まず，2 つの波源 S_1，S_2 から点 P に届くの波の干渉を考える．S_1 から P に届いた波の時刻 t における振動を $A\sin(\omega t)$ としたとき，S_2 から P に届いた波の時刻 t における振動は $A\sin(\omega t-\delta)$ と表される．このとき，P で観測される合成波 Y の振動は，

$$Y(t)=A\sin(\omega t)+A\sin(\omega t-\delta)=2A\cos\left(\boxed{①}\right)\sin\left(\omega t-\boxed{①}\right)$$

と表され，$2A\left|\cos\left(\boxed{①}\right)\right|$ が P で観測される波の振幅を与える．光の観測強度 I は振幅の 2 乗に比例しその比例定数を k とすれば，$\delta=0$ での観測強度 I_0 は $I_0=\boxed{②}$ であり，位相差 δ となる位置 P での観測強度 I と I_0 の比は $\dfrac{I}{I_0}=\boxed{③}$ となる．ここで，観測強度が最大となる条件，すなわち強め合いの条件は $\delta=\boxed{④}$ となり，弱め合いの条件は $\delta=\boxed{⑤}$ となる．これを踏まえて $\dfrac{I}{I_0}$ を図示したものが図 1 である．なお，反射や初期位相による位相のずれがなく経路差のみによって位相差 δ が生じる場合，経路差 $\Delta\ell$，波長 λ を用いれば $\delta=\boxed{⑥}$ と書くことができる．

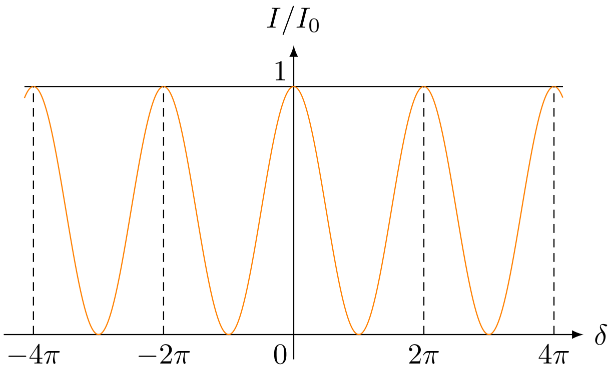


図 1　　$N=2$ の場合

(2)　続いて，3 つの波源 S_1，S_2，S_3 から点 P に届くの波の干渉を考える．S_1 から P に届いた波の時刻 t における振動を $A\sin(\omega t)$ としたとき，S_2 から P に届いた波の時刻 t における振動は $A\sin(\omega t-\delta)$，S_3 から P に届いた波の時刻 t における振動は $A\sin(\omega t-2\delta)$ と表される．このとき，P で観測される合成波 Y の振動は，$\theta=\omega t-\delta$ とすると，

$$Y(t)=A\sin(\theta-\delta)+A\sin\theta+A\sin(\theta+\delta)$$

を計算すればよく，P で観測される振動の振幅を A，δ を用いて表せば [⑦] となる．よって，$\delta=0$ での観測強度 I_0 は $I_0=$ [⑧] であり，位相差が δ の位置 P での観測強度 I と I_0 の比は $\dfrac{I}{I_0}=$ [⑨] となる．なお，$\dfrac{I}{I_0}$ を図示すると図 2 のようになる．

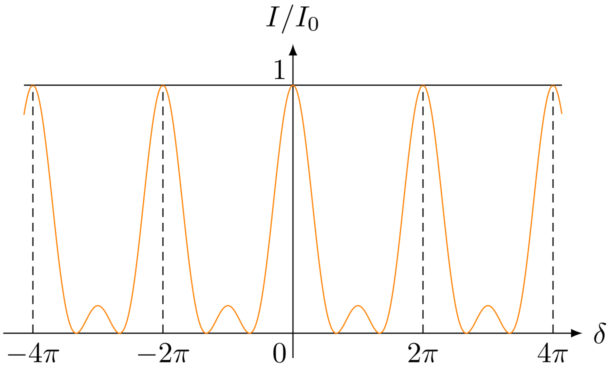


図 2　$N=3$ の場合

(3)　最後に，N 個の波源 $S_k\ (k=1,2,\cdots,N)$ から点 P に届く波の干渉を考える．S_k から P に届いた波の時刻 t における振動は $A\sin\{\omega t-(k-1)\delta\}$ と表される．P で観測される合成波の振動 Y は，三角関数の恒等式

$$2\sin\{\omega t-(k-1)\delta\}\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)=-\cos\left\{\omega t-(k-1)\delta+\frac{\delta}{2}\right\}+\cos\left(\omega t-k\delta+\frac{\delta}{2}\right)$$

を用いると，

$$Y(t)=\boxed{⑩}\sin\left(\omega t-\frac{N-1}{2}\delta\right)$$

となる．さて，$\delta\to 0$ における観測強度 I_0 は，極限の公式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を用いると $I_0=$ [⑪] と求まり，位置 P での観測強度 I と I_0 の比は $\dfrac{I}{I_0}=$ [⑫] となる．

以下では，回折格子のような N が 1 に比べて十分大きい場合を考える．

(a)　$\delta \neq 2m\pi$（m は整数）の場合を考える．このとき，$\sin\left(\dfrac{\delta}{2}\right) \neq 0$，$\sin\left(\dfrac{N}{2}\delta\right) \neq 0$ であり，$\left|\sin\left(\dfrac{N}{2}\delta\right)\right| \leq 1$ より，

$$\frac{I}{I_0} = \lim_{N\to\infty} \boxed{\text{⑫}} = \boxed{\text{⑬}}$$

となる．

(b)　$\delta = 2m\pi$ を考える．そのため $\delta = 2m\pi + \varepsilon$（$m$ は整数，ε は $|\varepsilon| \ll 1$ を満たす定数）の場合を考え，$\varepsilon \to 0$ と取る．このとき，$\sin\left(\dfrac{\delta}{2}\right) = \pm\sin\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right) \fallingdotseq \pm\dfrac{\varepsilon}{2}$，$\sin\left(\dfrac{N}{2}\delta\right) = \pm\sin\left(\dfrac{N\varepsilon}{2}\right)$ であり，最終的に $\varepsilon = 0$ を考えることから $\varepsilon \to 0$ の極限を考え，

$$\frac{I}{I_0} = \lim_{\varepsilon\to 0} \boxed{\text{⑫}} = \boxed{\text{⑭}}$$

となる．

以上を合わせると図 4 のようになり，N が十分大きい場合では鋭い明線が観測される（暗線は観測されない）ことがわかる．

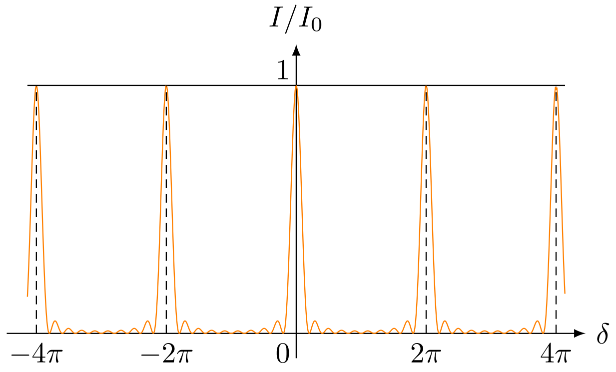


図 3　$N = 10$ の場合

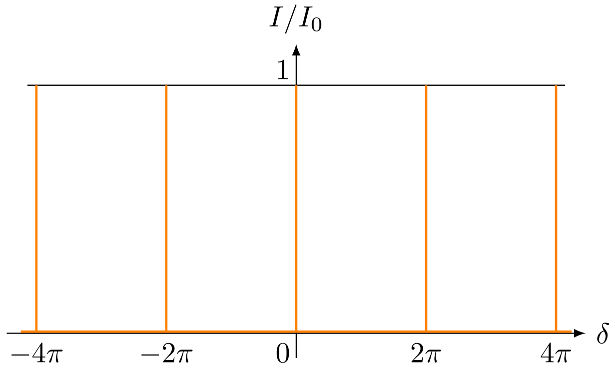


図 4　N が十分大きい場合

https://koremura.net/

【解答】

① $\dfrac{\delta}{2}$　② $4kA^2$　③ $\cos^2\left(\dfrac{\delta}{2}\right)$　④ $2m\pi$　⑤ $(2m-1)\pi$　⑥ $\dfrac{2\pi}{\lambda}\varDelta\ell$　⑦ $A(1+2\cos\delta)$

⑧ $9kA^2$　⑨ $\left(\dfrac{1+2\cos\delta}{3}\right)^2$　⑩ $A\dfrac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}$　⑪ kN^2A^2　⑪ $\left\{\dfrac{\sin(N\delta/2)}{N\sin(\delta/2)}\right\}^2$　⑬ 0

⑭ 1

(1)　波源が 2 つの場合，観測される振動は，

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= A\sin(\omega t) + A\sin(\omega t-\delta)\\
&= A\left\{\sin\left(\frac{\omega t+(\omega t-\delta)}{2}+\frac{\omega t-(\omega t+\delta)}{2}\right)\right.\\
&\qquad \left.+\sin\left(\frac{\omega t+(\omega t-\delta)}{2}-\frac{\omega t-(\omega t+\delta)}{2}\right)\right\}\\
&= 2A\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\sin\left(\omega t-\frac{\delta}{2}\right).
\end{aligned}
$$

すると，観測強度 I は，

$$I = k\left\{2A\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\right\}^2$$

と与えられ，$\delta=0$（同位相の 2 つの光の重ね合わせ）での観測強度 I_0 は，

$$I_0 = 4kA^2$$

となり，I の I_0 に対する比は，

$$\frac{I}{I_0} = \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

と求まる．

以上から，観測強度が最大となる条件は，

$$
\begin{aligned}
\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) &= 1\\
\frac{\delta}{2} &= m\pi\,, \qquad \therefore\ \delta = 2m\pi\,.
\end{aligned}
$$

弱め合いの条件は，

$$
\begin{aligned}
\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) &= 0\\
\frac{\delta}{2} &= \frac{2m-1}{2}\pi\,, \qquad \therefore\ \delta = (2m-1)\pi\,.
\end{aligned}
$$

なお，経路差 $\varDelta\ell$ による位相差 δ は，$\delta=\dfrac{2\pi}{\lambda}\varDelta\ell$ である．

(2)　波源が 3 つの場合，観測される振動は，

$$\begin{aligned} Y(t) &= A\sin\underbrace{(\omega t)}_{\theta-\delta} + A\sin\underbrace{(\omega t-\delta)}_{\theta} + A\sin\underbrace{(\omega t-2\delta)}_{\theta+\delta} \\ &= 2A\sin\theta\cos\delta + A\sin\theta \\ &= A(1+2\cos\delta)\sin(\omega t-\delta)\,. \end{aligned}$$

すると，観測強度 I は，

$$I = k\{A(1+2\cos\delta)\}^2$$

と与えられ，$\delta=0$ での観測強度 I_0 は，

$$I_0 = 9kA^2$$

となり，I の I_0 に対する比は，

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{1+2\cos\delta}{3}\right)^2 .$$

(3)　波源が N 個の場合，観測される振動は，

$$Y(t) = A\sin(\omega t) + A\sin(\omega t-\delta) + \cdots + A\sin\{\omega t-(N-1)\delta\}$$

であり，三角関数の恒等式を用いるため一度両辺に $2\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)$ をかけて，

$$\begin{aligned} 2\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)Y(t) &= -\cos\left(\omega t+\frac{\delta}{2}\right) + \cos\left(\omega t-\frac{\delta}{2}\right) \\ &\quad -\cos\left(\omega t-\frac{\delta}{2}\right) + \cos\left(\omega t-\frac{3}{2}\delta\right) \\ &\quad -\cdots \\ &\quad -\cos\left(\omega t-(N-1)\delta+\frac{\delta}{2}\right) + \cos\left(\omega t-N\delta+\frac{\delta}{2}\right) \\ &= -\cos\left(\omega t+\frac{\delta}{2}\right) + \cos\left(\omega t-N\delta+\frac{\delta}{2}\right) \\ &= 2A\sin\left(\frac{N}{2}\delta\right)\sin\left(\omega t-\frac{N-1}{2}\delta\right) \\ \therefore Y(t) &= A\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}\sin\left(\omega t-\frac{N-1}{2}\delta\right) . \end{aligned}$$

すると，観測強度 I は，

$$I = k\left\{A\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}\right\}^2$$

と与えられ，$\delta \to 0$ での観測強度 I_0 は，

$$\begin{aligned} I_0 &= \lim_{\delta\to 0} k \left\{ A \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \right\}^2 \\ &= \lim_{\delta\to 0} kA^2 \left\{ \frac{\sin(N\delta/2)}{N\delta/2} \right\}^2 \left\{ \frac{\delta/2}{\sin(\delta/2)} \right\}^2 \left(\frac{N\delta/2}{\delta/2} \right)^2 \\ &= \underset{\sim\sim}{kN^2A^2} \end{aligned}$$

となり，I の I_0 に対する比は，

$$\frac{I}{I_0} = \underset{\sim\sim}{\left\{ \frac{\sin(N\delta/2)}{N\sin(\delta/2)} \right\}^2}.$$

(a)　$\delta \neq 2m\pi$ のとき，$N \to \infty$ では，

$$\frac{I}{I_0} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \left\{ \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \right\}^2 = \underset{\sim}{0}.$$

(b)　$\delta = 2m\pi + \varepsilon$ のとき，$\varepsilon \to 0$ では，

$$\begin{aligned} \frac{I}{I_0} &= \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \frac{\sin(N\delta/2)}{N\sin(\delta/2)} \right\}^2 \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \frac{\sin(N\varepsilon/2)}{N\sin(\varepsilon/2)} \right\}^2 \\ &\fallingdotseq \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \frac{\sin(N\varepsilon/2)}{N\varepsilon/2} \right\}^2 \\ &= \underset{\sim}{1}. \end{aligned}$$

【補足】単スリット干渉

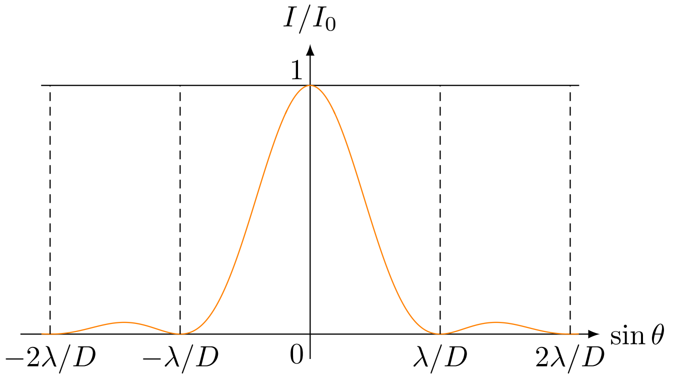
スリット間隔 D の単スリットを考える．この単スリットは，スリット間隔 D を N 等分した N スリットの $N\to\infty$ の極限と考えることができる．このとき，θ の方向に回折した光の観測強度の比 $\dfrac{I}{I_0}$ は，位相差が $\delta=\dfrac{2\pi}{\lambda}\dfrac{D}{N}\sin\theta$ となることから[*20]，

$$\begin{aligned}\frac{I}{I_0}&=\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{\sin(N\delta/2)}{N\sin(\delta/2)}\right\}^2\\&=\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{\sin(\pi D\sin\theta/\lambda)}{N\sin(\pi D\sin\theta/N\lambda)}\right\}^2\\&=\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{\sin(\pi D\sin\theta/\lambda)}{\pi D\sin\theta/\lambda}\frac{\pi D\sin\theta/N\lambda}{\sin(\pi D\sin\theta/N\lambda)}\right\}^2\\&=\left\{\frac{\sin(\pi D\sin\theta/\lambda)}{\pi D\sin\theta/\lambda}\right\}^2.\end{aligned}$$

よって，$I=0$ となる回折方向の $\sin\theta$ は，

$$\frac{\pi D\sin\theta}{\lambda}=m\pi\,,\qquad\therefore\sin\theta=\frac{\lambda}{D}m$$

と表される．$\dfrac{I}{I_0}$ を図示すれば以下のようになる．

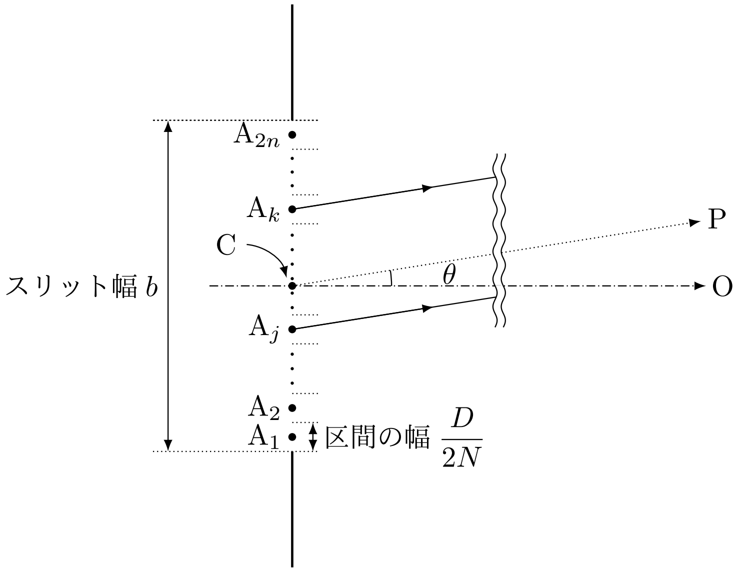


図から，およそ $|\sin\theta|<\dfrac{\lambda}{D}$ の方向に回折が起こることがわかる．よって，λ が大きいほど波はよく回折し，逆に D が大きいほど波の回折は起こりにくくなる．

なお，以下のような議論でも求めることができる．

スリット間隔 D を $2N$ 分割し（N は十分大きな自然数），各分割点を波源と見なし，その波源から波の重ね合わせを考える．

[*20] N スリットの結果に $d=\dfrac{D}{N}$ を代入すればよい．



$k\,(1 \leq k < N)$ 番目の波源と $N+k$ 番目の波源からの波の重ね合わせを考え，θ 方向の回折光の弱め合いの条件を考える．経路差が $\dfrac{D}{2N}\sin\theta$ となることから，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{D}{2N}\sin\theta = (2m-1)\pi\,, \qquad \therefore \sin\theta = N(2m-1)\frac{\lambda}{D}\,.$$

ここで，N は自然数，$2m-1$ は奇数であることから $N(2m-1)$ は整数を表し，これを新たに M とすれば，

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{D}M$$

となる．以上から，k 番目の波源と $N+k$ 番目の波源からの波は $\sin\theta = \dfrac{\lambda}{D}M$ の方向で弱め合うため，全ての波源からの波もまた同様に $\sin\theta = \dfrac{\lambda}{D}M$ の方向で弱め合うことが言える．