1 衝突，時間追跡できる運動（等加速度運動，単振動）

【メモ】

・全て運動方程式を立てるだけの問題．

【解答】

問(1) (a) 物体間の静止摩擦力の大きさを R とする．運動方程式より，

$$\begin{cases} Ma_0 = F_0 - R\,, \\ ma_0 = R \end{cases} \qquad \therefore\ a_0 = \frac{F_0}{M+m}\,, \quad M_0 = \frac{F_0}{a_0} = M+m\,.$$

(b) 運動方程式より $R = \dfrac{m}{M+m}F_0$ ゆえ，滑らない条件 $R < \mu N$ を考えて，

$$\underbrace{\frac{m}{M+m}F_0}_{=ma_0} < \mu mg \qquad \therefore\ a_0 < \mu g\,.$$

問(2) (a) $F = F_1$ のとき滑りが生じることから，滑らない条件の対偶を考えて，

$$\frac{m}{M+m}F \geq \mu mg \qquad \therefore\ F \geq \mu(M+m)g\,(=F_1)\,.$$

(b) 滑りが生じていることから物体間には動摩擦力が生じている．運動方程式より，

$$Ma_1 = \mu(M+m)g - \mu' mg$$

$$\therefore\ a_1 = \left(1+\frac{m}{M}\right)\mu g - \frac{m}{M}\mu' g\,, \quad M_1 = \frac{F_1}{a_1} = \frac{(M+m)\mu}{(M+m)\mu - m\mu'}M\,.$$

問(3) (a) 滑りの向きが反転していることを考慮して[*1]，運動方程式より，

$$Ma_2 = \mu(M+m)g + \mu' mg$$

$$\therefore\ a_2 = \left(1+\frac{m}{M}\right)\mu g + \frac{m}{M}\mu' g\,, \quad M_2 = \frac{F_1}{a_2} = \frac{(M+m)\mu}{(M+m)\mu + m\mu'}M\,.$$

(b) 式の形から $M_2 < M_1$，$M_2 < M_0$ は明らか．M_1 と M_0 の大小関係については[*2]，

$$M+m \gtreqless \frac{(M+m)\mu}{(M+m)\mu - m\mu'}M$$

$$(M+m)\mu - m\mu' \gtreqless M\mu$$

$$m\underbrace{(\mu - \mu')}_{>0} \gtreqless 0$$

$$\therefore\ M+m > \frac{(M+m)\mu}{(M+m)\mu - m\mu'}M\,.$$

[*1] 容器内左面の壁と衝突した後の運動．

[*2] 1 行目から 2 行目の式変形では，$\mu > \mu'$ より分母が正であることから不等号の向きは変わらない（そもそも質量ゆえ正であることは明らか）．

以上より，大小関係は $M_2 < M_1 < M_0$ の順である．

(c) $a_0 = \dfrac{F_0}{M+m}$, $a_1 = \dfrac{F_1}{M} - \dfrac{m}{M}\mu' g$, $a_2 = \dfrac{F_1}{M} + \dfrac{m}{M}\mu' g$ より，

$$M = \frac{2F_1}{a_1 + a_2},$$

$$m = \frac{1}{a_0}(F_0 - Ma_0) = \frac{F_0}{a_0} - \frac{2F_1}{a_1 + a_2},$$

$$\mu = \frac{F_1}{(M+m)g} = \frac{a_0 g}{F_0 F_1},$$

$$\mu' = \frac{M}{mg}\left(a_2 - \frac{F_1}{M}\right) = \frac{F_1(a_2 - a_1)}{F_0(a_1 + a_2) - 2F_1 a_0}\frac{a_0}{g}.$$

2 荷電粒子の運動

【メモ】

・等加速度運動と等速円運動の時間追跡.

【解答】

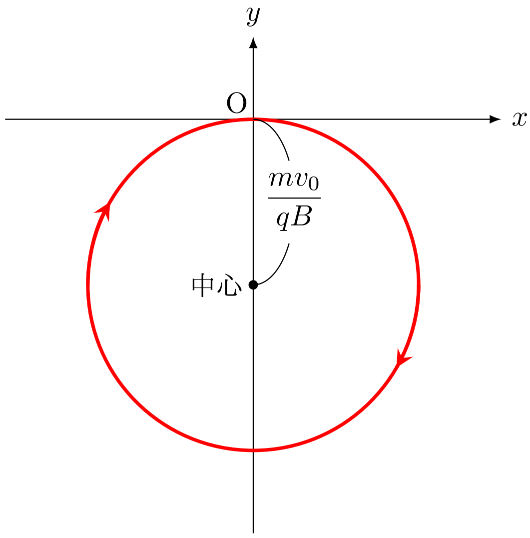
問(1) (a) つりあいより,

$$m \cdot 0 = qE_0 - mg \qquad \therefore E_0 = \underset{\sim\sim}{\frac{mg}{q}}\,.$$

(b) 粒子は x 軸正方向の初速度で運動を始め，この瞬間から速度に対して右回りの方向に速度と直行したローレンツ力を受け等速円運動を行う[*3]．運動方程式（中心成分）より円運動の半径 r は,

$$m\frac{{v_0}^2}{r} = qv_0B \qquad \therefore r = \frac{mv_0}{qB}\,.$$

以上より，粒子の軌跡は以下の図のようになる．



(c) xy 平面内は半径 $\dfrac{mv_0}{qB}$，中心 $\left(0, -\dfrac{mv_0}{qB}\right)$ の等速円運動．z 方向は運動方程式より,

$$ma_z = qE - mg \qquad \therefore a_z = \frac{qE}{m} - g\,.$$

[*3] ローレンツ力が速度と直交していることからローレンツ力は仕事をせず，粒子の速さは一定となる．

であり，等加速度運動を行う．よって，$t=0$ で $v_z=0$，$x=y=z=0$ を踏まえて，

$$\begin{cases} x = \dfrac{mv_0}{qB}\sin\left(\dfrac{qB}{m}t\right), \\ y = -\dfrac{mv_0}{qB}\left\{1-\cos\left(\dfrac{qB}{m}t\right)\right\}, \\ z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{qE}{m}-g\right)t^2 . \end{cases}$$

問(2) (a) 物体の位置 (x,y,z) は，

$$\begin{cases} x = v_0 t\,, \\ y = 0\,, \\ z = v_1 t - \dfrac{1}{2}gt^2 . \end{cases}$$

$z=0$ を満たす時刻は $t=\dfrac{2v_1}{g}$ ゆえ，

$$x = \frac{2v_0v_1}{g}, \quad y = 0 .$$

(b) 問(1)(c)の x，y に $t=\dfrac{2v_1}{g}$ を代入して，

$$x = \frac{mv_0}{qB}\sin\left(\frac{2qv_1B}{mg}\right), \quad y = -\frac{mv_0}{qB}\left\{1-\cos\left(\frac{2qv_1B}{mg}\right)\right\}.$$

(c) $y=0$ となる状況を考えて，

$$\cos\left(\frac{2qv_1B}{mg}\right) = 1$$
$$\frac{2qv_1B}{mg} = 2\pi n \quad (n=1,2,\cdots)$$
$$\therefore B = \frac{\pi mg}{qv_1}n \qquad \therefore B_{\min} = \frac{\pi mg}{qv_1} .$$

(d) 加速度の z 成分が $g-\dfrac{qE}{m}$ となる．したがって，問(2)(1)(b)の議論を $g \to g-\dfrac{qE}{m}$ とすれば，$z=0$ を通過する時刻は $t=\dfrac{2v_1}{g-qE/m}$ であり，$y=0$ となる状況を考えて，

$$\cos\left(\frac{qvB}{m}\frac{2v_1}{g-qE/m}\right) = 1$$
$$\frac{2qv_1B}{mg-qE} = 2\pi n \quad (n=1,2,\cdots)$$
$$\therefore E = \frac{mg}{q} - \frac{v_1B}{\pi}\frac{1}{n} \qquad \therefore E_{\min} = \frac{mg}{q} - \frac{v_1B}{\pi} .$$

$\boxed{3}$ 波の式，固有振動，ドップラー効果

【メモ】

・波の式のパートは誘導に従って計算するだけ．固有振動は，定常波の横波表現をの図を用いて，管長と波長の長さを対応させればよい．

・ドップラー効果は，公式を用いるだけの問題と公式を導出する問題に分けられ，前者の方が得点しやすい問題となる．今回は前者の問題である．が，ちらりと出てくるだけで，問題全体としては波の式と固有振動からなる．

【解答】

問(1) (a) $x = 0$ は固定端のため境界条件 $F_1(t,0) + F_2(t,0) = 0$ を満たし[*4]，

$$A_1 \sin(2\pi ft) + A_2 \sin(2\pi ft) = 0$$
$$(A_1 + A_2)\sin(2\pi ft) = 0 \qquad \therefore A_2 = -A_1$$

の関係を得る（問題文の誘導）．

同様に $x = L$ は自由端のため境界条件 $F_1(t,L) = F_2(t,L)$ を満たし，$A_2 = -A_1$ を考慮すれば，

$$A_1 \sin\left(2\pi ft + \frac{2\pi}{\lambda}L\right) + A_1 \sin\left(2\pi ft - \frac{2\pi}{\lambda}L\right) = 0$$
$$2A_1 \sin(\underbrace{2\pi ft}_{ア})\cos\left(\underbrace{\frac{2\pi}{\lambda}L}_{イ}\right) = 0$$

を得る．任意の時刻 t で上記等式が成り立つためには $\cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}L\right) = 0$ が必要で，

$$\frac{2\pi}{\lambda}L = \frac{\pi}{2}(2m-1) \qquad \therefore \lambda = \underbrace{\frac{4}{2m-1}L}_{ウ}.$$

以上より，管内で観測される合成波は，

$$\begin{aligned} F &= F_1(t,x) + F_2(t,x) \\ &= A_1 \sin\left(2\pi ft + \frac{2\pi}{\lambda}x\right) - A_1 \sin\left(2\pi ft - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \\ &= 2A_1 \sin\left\{\underbrace{\left(m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}}_{エ}\right\}\cos(\underbrace{2\pi ft}_{オ}) \end{aligned}$$

となる．

[*4] 任意の時刻 t で 0 となるには $A_1 + A_2 = 0$ となる必要がある．

(b) $m=3$ の下で $\sin\left\{\left(m-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi x}{L}\right\}=0$ となるときを考えて，

$$\frac{5}{2}\frac{\pi x}{L}=n\pi \qquad \therefore x=\frac{2}{5}nL\,.$$

ここで，n は整数である．$0\leq x\leq L$ より n は，

$$0\leq\frac{2}{5}nL\leq L \qquad \therefore n=0\,,\ 1\,,\ 2$$

と求まり，

$$x=0\,,\ \frac{2}{5}L\,,\ \frac{4}{5}L\,.$$

(c) $x=0$ が自由端であることから $F_1=F_2$ より $A_1=A_2$ が結論付けられ，同様に $x=L$ が自由端であることから，

$$A_1\sin\left(2\pi ft+\frac{2\pi}{\lambda}L\right)=A_2\sin\left(2\pi ft-\frac{2\pi}{\lambda}L\right) \qquad \therefore \lambda=\frac{2}{n}L\ （n\text{ は自然数}）.$$

また，このとき，

$$\begin{aligned}F(t,x)&=A_1\sin\left(2\pi ft+\frac{2\pi}{\lambda}x\right)+A_2\sin\left(2\pi ft-\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\\&=2A_1\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(2\pi ft\right).\end{aligned}$$

問(2) (a) 閉管の共鳴時の音の波長は $\lambda_{閉}=\dfrac{L}{2m-1}$ であり，開管の共鳴時の音の波長は $\lambda_{閉}=\dfrac{2}{n}L$ を満たす．さらに，閉管における振動数はドップラー効果の公式より $f_{閉}=\dfrac{V}{V+v_{\mathrm{s}}}f_{\mathrm{s}}$，同様に開管では $f_{開}=\dfrac{V}{V-v_{\mathrm{s}}}f_{\mathrm{s}}$ である．いずれの場合も音速は共通の値を取ることから，

$$\frac{4L}{2m-1}\frac{V}{V+v_{\mathrm{s}}}f_{\mathrm{s}}=\frac{2L}{n}\frac{V}{V-v_{\mathrm{s}}}f_{\mathrm{s}} \qquad \therefore \frac{v_{\mathrm{s}}}{V}=\frac{2n-2m+1}{2n+2m-1}\,.$$

(b) 波の基本式より，

$$V=\frac{4L}{2m-1}\frac{V}{V+v_{\mathrm{s}}}f_{\mathrm{s}} \qquad \therefore m=\frac{1}{2}+\frac{1}{170}\frac{f_{\mathrm{s}}}{1+v_{\mathrm{s}}/V}$$

ここで，$300\,\mathrm{Hz}\leq f_{\mathrm{s}}\leq 400\,\mathrm{Hz}$，$0\leq\dfrac{v_{\mathrm{s}}}{V}\leq\dfrac{1}{3}$ より[*5]，

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{170}\frac{300}{1+1/3}\leq m\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{100}\frac{400}{1+0}$$

$$\therefore 1+\frac{28}{34}\leq m\leq 2+\frac{29}{34} \qquad \therefore m=2\,.$$

[*5] 次のように回りくどく考えてもよい（ページを跨ぎます）：$f_{\mathrm{s}}=\dfrac{V}{2L}\left(m-\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{v_{\mathrm{s}}}{V}\right)$，$300\,\mathrm{Hz}\leq f_{\mathrm{s}}\leq 400\,\mathrm{Hz}$ より，

$$\frac{60}{17(2m-1)}-1\leq\frac{v_{\mathrm{s}}}{V}\leq\frac{80}{17(2m-1)}-1$$

(c) $m=2$ の下で[*6],

$$\frac{v_\mathrm{s}}{V}=\frac{2n-3}{2n+3}$$

であり，$0\leq\dfrac{v_\mathrm{s}}{V}\leq\dfrac{1}{3}$ より，

$$0\leq\frac{2n-3}{2n+3}\leq\frac{1}{3}$$
$$\therefore 1+\frac{1}{2}\leq n\leq 3 \qquad \therefore n=2,\ 3\,.$$

$n=2$ の下では，

$$\frac{v_s}{V}=\frac{1}{7}\,,\qquad \therefore f_\mathrm{s}=\frac{3}{4}\times 340\left(1+\frac{1}{7}\right)=291+\frac{3}{7}\,\mathrm{Hz}$$

となり，$300\,\mathrm{Hz}\leq f_\mathrm{s}\leq 400\,\mathrm{Hz}$ の範囲外であり不適.

$n=3$ の下では，

$$\frac{v_s}{V}=\frac{1}{3}\,,\qquad \therefore f_\mathrm{s}=\frac{3}{4}\times 340\left(1+\frac{1}{3}\right)=\underline{340\,\mathrm{Hz}}$$

となり $300\,\mathrm{Hz}\leq f_\mathrm{s}\leq 400\,\mathrm{Hz}$ の範囲を満たす.

となり，この不等式が $0\leq\dfrac{v_\mathrm{s}}{V}\leq\dfrac{1}{3}$ と共通部分を持つような m を考えればよい．共通部分を持たない場合の否定を考えて，

$$\begin{cases}\dfrac{60}{17(2m-1)}-1\leq\dfrac{1}{3}\,,\\ \dfrac{80}{17(2m-1)}-1\geq 0\end{cases}\qquad \therefore 1+\frac{14}{17}\leq m\leq 2+\frac{29}{34}\,,\qquad \therefore m=2\,.$$

[*6] $m=2$ を代入し，m と同様回りくどく考えると $1+\dfrac{13}{17}\leq n\leq 3+\dfrac{9}{17}$ となり $n=2,\ 3$ を得る.