1 衝突，時間追跡できる運動（等加速度運動，単振動）

【メモ】

・衝突，および時間追跡（等加速度運動，単振動）から構成される．

・問(1)は等加速度運動，問(2)は単振動．時刻 t は問われていないのでエネルギーで論じればよい．

【解答】

問(1) (a) つりあいより，

$$M \cdot 0 = Mg - \rho S d g \qquad \therefore d = \underset{\sim\sim}{\frac{M}{\rho S}}\,, \quad F_0 = -\rho S d g = \underset{\sim\sim}{Mg}\,.$$

(b) 衝突直前の小球の速度 v_0 は，小球のエネルギー収支より[*1]，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = mgh\cos 0 \qquad \therefore v_0 = \underset{\sim\sim}{\sqrt{2gh}}\,.$$

また，衝突の直前・直後の運動量保存則，およびはね返り係数の式より，

$$\begin{cases} MV + mv = m\sqrt{2gh}\,, \\ V - v = -(0 - \sqrt{2gh}) \end{cases} \qquad \therefore V = \underset{\sim\sim}{\frac{2m}{M+m}\sqrt{2gh}}\,, \quad v = \underset{\sim\sim}{\frac{m-M}{M+m}\sqrt{2gh}}\,.$$

(c) 衝突後の小球は x 軸正方向に大きさ g の加速度の等加速度運動を行う．衝突後の小球のエネルギー収支より[*2]，

$$\frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}m\left(\frac{m-M}{M+m}\sqrt{2gh}\right)^2 = mgH\cos\pi \qquad \therefore H = \underset{\sim\sim}{\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 h}\,.$$

問(2) (a) 物体間の垂直抗力の大きさを N とする．つりあいより，

$$\begin{cases} 0 = Mg - \rho S d g\,, \\ 0 = Mg + N - kx_0 - \rho S g(d + x_0)\,, \\ 0 = mg - N \end{cases} \qquad \therefore x_0 = \underset{\sim\sim}{\frac{mg}{k + \rho S g}}\,.$$

(b) 2 物体が接触している間を考えるため，2 物体の加速度は等しい（束縛条件）．2 物体の加速度 a は運動方程式より，

$$\begin{cases} Ma = Mg + N - kx - \rho S g\left(\dfrac{M}{\rho S} + x\right)\,, \\ ma = mg - N \end{cases} \qquad \therefore a = -\frac{k + \rho S g}{M+m}\left(x - \frac{mg}{k + \rho S g}\right)$$

[*1] 力学的エネルギー保存則：$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = mgh$，　時間追跡：$\begin{cases} x = -h + \frac{1}{2}gt^2\,, \\ v = gt\,. \end{cases}$

[*2] 力学的エネルギー保存則：$mgH = \frac{1}{2}m\left(\frac{m-M}{M+m}\sqrt{2gh}\right)^2$，　時間追跡：$\begin{cases} x = \frac{m-M}{M+m}\sqrt{2gh}\,t + \frac{1}{2}gt^2\,, \\ v = \frac{m-M}{M+m}\sqrt{2gh} + gt\,. \end{cases}$

となり，$K = k + \rho S g$ とわかる．また，2 物体は一体のまま角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{k+\rho S g}{M+m}}$，振動中心 $x = x_0$ の単振動を行い，その周期 T は，

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k+\rho S g}}\,.$$

(c)　初期条件より，おもりと一体の間の円柱の運動は振幅 x_0，角振動数 $\dfrac{K}{M+m}$，振動中心 $x = x_0$ の単振動である．したがって，$x = x_0$ を通過する瞬間の円柱の速さは $x_0\omega$ である．それから，おもりを取り除いた後の円柱の運動は，運動方程式より，

$$Ma = Mg - kx - -\rho S g\left(\frac{M}{\rho S} + x\right) = -(k+\rho S g)x = -Kx$$

であるから，円柱は角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{M}}$，振動中心 $x = 0$ の単振動を行う．よって，円柱のエネルギー収支より振幅を $A\,(>0)$ として[*3]，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}m\cdot 0^2 - \frac{1}{2}m\left(x_0\sqrt{\frac{K}{M+m}}\right)^2 &= \int_{x_0}^{A}(-Kx)\,dx \\
&= -\frac{1}{2}KA^2 + \frac{1}{2}K{x_0}^2 \\
\therefore A &= x_0\sqrt{\frac{2M+m}{M+m}}\,.
\end{aligned}$$

[*3] 円柱，ばね，重力場からなる力学的エネルギー収支：

$$\underbrace{\left\{\frac{1}{2}M\cdot 0^2 - \frac{1}{2}M\,(x_0\omega)^2\right\}}_{\text{円柱}} + \underbrace{\{MgA - Mg(-x_0)\}}_{\text{重力場}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}k{x_0}^2\right)}_{\text{ばね}} = \int_{x_0}^{A}\left\{-\rho S g\left(\frac{M}{\rho S} + x\right)\right\}dx\,,$$

時間追跡：$\begin{cases} x = x_0\sin\left(\sqrt{\dfrac{K}{M}}\,t\right) + x_0\sqrt{\dfrac{M}{M+m}}\,\cos\left(\sqrt{\dfrac{K}{M}}\,t\right), \\ v = x_0\sqrt{\dfrac{K}{M}}\,\cos\left(\sqrt{\dfrac{K}{M}}\,t\right) - x_0\sqrt{\dfrac{K}{M+m}}\,\sin\left(\sqrt{\dfrac{K}{M}}\,t\right). \end{cases}$

2 中身の見えるコンデンサ

【メモ】

・問(1)は中身の見えるコンデンサに関する出題．と言っても，問(1)(c)のみ．

・問(2)はコンデンサを含む回路の問題．電気回路は，以下の 3 式によって一意に決まる．

$$\begin{cases} \text{キルヒホッフ則} \\ \text{電荷保存則} \\ \text{素子の性質} \end{cases}$$

【解答】

問(1) (a)　公式より，

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{x}\,.$$

(b)　$a \leq x \leq b$ では $C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{x}$ ゆえ，帯電量 Q_1 はキルヒホッフ則より，

$$V - \frac{Q_1}{C_1} = 0 \qquad \therefore Q_1 = C_1 V = \frac{\varepsilon_0 S V}{x}\,.$$

また，静電エネルギーは公式より，

$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{{Q_1}^2}{C_1} = \frac{1}{2}\frac{(C_1 V)^2}{C_1} = \frac{\varepsilon_0 S V}{2x}\,.$$

$b < x < c$ では極板は孤立し，帯電量は $x = b$ での電荷で保存する．よって，帯電量 $Q_1 = \dfrac{\varepsilon_0 S V}{b}$ であり，静電エネルギーは公式より，

$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{{Q_1}^2}{C_1} = \frac{\varepsilon_0 S V}{2b}\,.$$

(c)　回路のエネルギー収支より[*4]，

$$\underbrace{\Delta Q V}_{\text{電池の仕事}} + W = \Delta U \qquad \therefore W = \left(\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S V^2}{b} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S V^2}{1}\right) - \left(\frac{\varepsilon_0 S V}{b} - \frac{\varepsilon_0 S V}{a}\right) V$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\varepsilon_0 S V\,.$$

問(2) (a)　並列合成則より

$$C_{\mathrm{GP}} = C_c + C_2\,.$$

[*4] 極板間引力が求まるので，仕事の定義から計算もできる．【補足】を参照．

(b)　キルヒホッフ則，および電荷保存則より，

$$\begin{cases} -\dfrac{Q_1}{C_c}+\dfrac{Q_2}{C_2}=0\,, \\ Q_1+Q_2=Q_b \end{cases} \qquad \therefore Q_2=\frac{C_2}{C_c+C_2}Q_b\,,\quad Q_c=\frac{C_c}{C_c+C_2}Q_b\,.$$

(c)　n 回目操作終了後のコンデンサ 1，2 の帯電量をそれぞれ $Q_1^{(n)}$，$Q_2^{(n)}$ とする．n 回目操作終了後のキルヒホッフ則，および電荷保存則は，

$$\begin{cases} -\dfrac{Q_1^{(n)}}{C_c}+\dfrac{Q_2^{(n)}}{C_2}=0\,, \\ Q_1^{(n)}+Q_2^{(n)}=Q_b+Q_2^{(n-1)}\,. \end{cases}$$

無限回操作後，電荷がある値に収束することから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}Q_1^{(n)}=\lim_{n\to\infty}Q_1^{(n-1)}=Q_1^{(\infty)}$（2 も同様）ゆえ[*5]，

$$\begin{cases} -\dfrac{Q_1^{(\infty)}}{C_c}+\dfrac{Q_2^{(\infty)}}{C_2}=0\,, \\ Q_1^{(\infty)}+Q_2^{(\infty)}=Q_b+Q_2^{(\infty)}\,. \end{cases} \qquad \therefore \frac{Q_2^{(\infty)}}{C_2}=\frac{Q_1^{(\infty)}}{C_c}=\frac{Q_b}{C_c}=\frac{c}{b}V\,(=V_{\mathrm{F}})\,.$$

【補足】問(1)(c)の仕事を定義通り

コンデンサ 1 の極板に生じる極板間引力 F（鉛直上向きを正）は，極板間の電場の大きさ $E=\dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$ を踏まえて，

$$F=-\frac{1}{2}QE=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2}=\frac{1}{2\varepsilon_0 S}\left(\frac{\varepsilon_0 SV}{x}\right)^2=\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2x^2}$$

となる．つりあいより，ピストンに加える外力 F_{ex} は $F_{\mathrm{ex}}=-F$ であり[*6]，$x=a$ から $x=b$ までに外力のする仕事は，

$$W=\int_a^b F_{\mathrm{ex}}\,dx=-\int_a^b \frac{\varepsilon_0 SV^2}{2x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\varepsilon_0 SV\,.$$

---

*5 等比数列になるので漸化式を解いてもよいが解答としては回りくどい．一般項を求めたい人は各自求めてみよう．

*6 つりあいの式：$m\cdot 0=F_{\mathrm{ex}}+F$．

3 干渉

【メモ】

・干渉条件は m を整数として，

$$（位相差）= \begin{cases} 2m\pi & （強めあい）, \\ (2m-1)\pi & （弱めあい） \end{cases}$$

と計算するようにする．位相差は $\dfrac{2\pi}{\lambda}$（経路差）に反射による位相のずれを加減すればよい[*7]．

【解答】

問(1) (a) 三平方の定理より，

$$\ell_{\mathrm{A}} = \sqrt{\ell^2 + \left(Y - \frac{d}{2}\right)^2}\,, \quad \ell_{\mathrm{B}} = \sqrt{\ell^2 + \left(Y + \frac{d}{2}\right)^2}\,.$$

(b) 経路差 $\ell_{\mathrm{B}} - \ell_{\mathrm{A}}$ は，

$$\begin{aligned} \ell_{\mathrm{B}} - \ell_{\mathrm{A}} &= \sqrt{\ell^2 + \left(Y + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{\ell^2 + \left(Y - \frac{d}{2}\right)^2} \\ &= \ell\left\{\sqrt{1 + \left(\frac{Y + d/2}{\ell}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{Y - d/2}{\ell}\right)^2}\right\} \\ &\fallingdotseq \ell\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{Y + d/2}{\ell}\right)^2 - 1 - \left(\frac{Y - d/2}{\ell}\right)^2\right\} \\ &= \frac{Yd}{\ell}\,. \end{aligned}$$

よって，強め合いが観測される位置 $Y = Y_m$ は，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{Yd}{\ell} = 2m\pi\,, \qquad \therefore Y_m = \frac{\ell\lambda}{d}m\,.$$

(c) 前問同様に位相差を計算して[*8]，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{Dd}{L} + \frac{Y'_m d}{\ell}\right) = 2m\pi \qquad \therefore Y'_m = \frac{\ell\lambda}{d}m - \frac{D\ell}{L}\,.$$

よって，強め合いの位置のずれ $\mathit{\Delta} Y$ は，

$$\mathit{\Delta} Y = Y'_m - Y_m = -\frac{D\ell}{L}\,.$$

[*7] 屈折率 n の媒質中では波長 λ を $\dfrac{\lambda}{n}$ とする．

[*8] 左側の領域の経路差：$\sqrt{L^2 + \left(D + \dfrac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{L^2 + \left(D - \dfrac{d}{2}\right)^2} \fallingdotseq \dfrac{Dd}{L}\,.$

問(2) (a) O において，温度の上昇の過程に伴い強め合いと弱め合いの繰り返しが観測され，4 回目の強め合いを観測していることから 2 つの波の位相差は $\pm 2\times 3\pi$ である．よって，

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{\lambda_\mathrm{B}}w-\frac{2\pi}{\lambda_\mathrm{A}}w&=\pm 6\pi\\ \frac{1}{\lambda_\mathrm{B}}&=\frac{1}{\lambda_\mathrm{A}}\pm\frac{3}{w}\\ &=\frac{10}{w}\pm\frac{3}{w}\qquad \therefore\ \lambda_\mathrm{B}=\frac{1}{7}w\,,\ \frac{1}{13}w\,.\end{aligned}$$

ここで，温度の上昇とともに音速が上昇したことから（振動数が不変のため）波長も増加することから $\lambda_\mathrm{B}=\dfrac{1}{7}w$ が適当で（$m=-3$ に対応），

$$\frac{V_\mathrm{B}}{V_\mathrm{A}}=\frac{\lambda_\mathrm{B}}{\lambda_\mathrm{A}}=\underline{\frac{10}{7}}\,.$$

(b) $\lambda_\mathrm{B}=\dfrac{10}{7}\lambda_\mathrm{A}=\dfrac{10}{7}\left(\dfrac{w}{10}-\varDelta\lambda'\right)$ である[*9]．また，前問の結果より考える強め合いは $m=-3$ の強め合いに対応することから位相差は，

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{\lambda_\mathrm{B}}w-\frac{2\pi}{\lambda_\mathrm{A}}w+\frac{2\pi}{\lambda_\mathrm{A}}\left(\ell_\mathrm{B}-\ell_\mathrm{A}\right)&=-6\pi\\ \frac{7}{10}w-w+\frac{\varDelta Y'd}{\ell}&=-3\lambda_\mathrm{A}=-3\left(\frac{w}{10}-\varDelta\lambda'\right)\\ \therefore\ \varDelta Y'&=\underline{\frac{3\ell}{d}\varDelta\lambda'}\ \underline{(y\text{ 軸正方向})}\,.\end{aligned}$$

[*9] 温度は一定なままなので $V_\mathrm{B}=\dfrac{10}{7}V_\mathrm{A}$ は保たれ，波長も常に $\lambda_\mathrm{B}=\dfrac{10}{7}\lambda_\mathrm{A}$ の関係性を満たす．