

1 単振動, 回転座標系

【メモ】

・問(1), 問(2)共に単振動の問題で, 問(1)はエネルギー, 問(2)は時間追跡に関する問題. 等加速度運動, 単振動は時間追跡とエネルギー収支のいずれでも解析できる運動である.

・遠心力は, 角速度 ω で回転する回転座標系の回転軸から半径 r の位置にある物体 (質量 m) に対し, 座標系とともに回転する座標系内部において生じ, その大きさは $m r \omega^2$, 向きは回転軸から遠ざかる向きである.

【解答】

問(1) (a) つりあいより,

$$m \cdot 0 = k d_0 - mg \cos \theta \quad \therefore d_0 = \frac{mg}{k} \cos \theta.$$

(b) 物体のエネルギー収支より*1*2,

$$\frac{1}{2} m V^2 - \frac{1}{2} m \cdot 0^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -h \end{pmatrix} = mgh \quad \therefore V = \sqrt{2gh}.$$

(c) 衝突の直前・直後の運動量保存則より,

$$2mv = m\sqrt{2gh} \quad \therefore v = \sqrt{\frac{gh}{2}}.$$

(d) 物体, ばね, 重力場からなる系の力学的エネルギーは,

$$E = \frac{1}{2} \cdot 2mv^2 + \frac{1}{2}kd^2 + 2mg(-d \cos \theta) = \underbrace{mv^2 + \frac{1}{2}kd^2 - 2kd_0d}.$$

(e) 力学的エネルギー保存則より*3,

$$\frac{1}{2}kx^2 - 2kd_0x = mv_0^2 + \frac{1}{2}kd^2 - 2kd_0d \quad \therefore x = \underbrace{d_0 \left(2 + \sqrt{1 + \frac{2mv_0^2}{kd_0^2}} \right)} (= d_1).$$

問(2) (a) 物体が位置 x にあるとき, 回転軸からの距離 (円運動の半径) は $x \sin \theta$ であることに留意して,

$$F_x = \underbrace{-k(x - L) - mg \cos \theta + m\omega^2 x \sin^2 \theta}.$$

*1 力学的エネルギー保存則: $\frac{1}{2}mV^2 = mgh$.

*2 仕事の計算 (いつも通り). 重力と変位 (大きさ l) のなす角を θ とする: $W = mg l \cos \theta = mg l \frac{h}{l} = mgh$.

*3 つりあい時 $x = \frac{2mg}{k} \cos \theta = 2d_0$ であり, この点よりも更に縮むため $x > 2d_0$ と判断する.

(b) $F_x = 0$ を解いて,

$$0 = -k(x_0 - L) - mg \cos \theta + m\omega^2 x_0 \sin^2 \theta \quad \therefore x_0 = \frac{kL - mg \cos \theta}{\underbrace{k - m\omega^2 \sin^2 \theta}} \dots$$

(c) F_x を整理して,

$$F_x = -(k - m\omega^2 \sin^2 \theta)x + kL - mg \cos \theta.$$

x の係数が負であればよいので,

$$k - m\omega^2 \sin^2 \theta > 0 \quad \therefore \omega < \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{\frac{k}{m}}, (= \omega_0).$$

(d) 運動方程式より, 単振動の角振動数 Ω は,

$$m\ddot{x} = -(k - m\omega^2 \sin^2 \theta) \left(x - \frac{kL - mg \cos \theta}{k - m\omega^2 \sin^2 \theta} \right) \quad \therefore \Omega = \sqrt{\frac{k - m\omega^2 \sin^2 \theta}{m}}.$$

よって, 単振動の周期 T は,

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\underbrace{k - m\omega^2 \sin^2 \theta}}}$$

(e) 図より, 物体が回転軸の周りを 1 周する時間と単振動の周期が一致すればよい. よって,

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k - m\omega^2 \sin^2 \theta}} \quad \therefore \omega = \sqrt{\frac{1}{\underbrace{1 + \sin^2 \theta}} \frac{k}{m}}.$$

2 電磁誘導（ファラデー則）

【メモ】

- ・問(1)は静磁場中を導体棒が運動する電磁誘導．誘導起電力の起源はローレンツ力 (vBl 公式) であるが，ファラデー則でも整合した結果を得ることができる．誘導はファラデー則となっている．
- ・問(2)は磁場が時間変化することによる電磁誘導．そのため，現象を支配する物理法則はファラデー則であり，誘導起電力の計算もファラデー則一択となる*4．・磁場が仕事をしないことにより，誘導起電力の仕事（仕事率）とアンペール力のする仕事（仕事率）は相殺する．磁場を介することで，力学的エネルギーが回路のエネルギーへと変換される（逆もまた同様）．

【解答】

問(1) (a) 磁束の定義より，

$$\Phi = \underline{Bavt}.$$

(b) ファラデー則より，

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = \underline{-Bav}.$$

(c) キルヒホッフ則より，

$$E - RI = 0 \quad \therefore I = \underline{-\frac{Bav}{R}}.$$

(d) 公式より，

$$J = RI^2 = \underline{\frac{(Bav)^2}{R}},$$

(e) 梯子コイルのつりあいより，

$$M \cdot 0 = F + IBa = F - \frac{B^2 a^2 v}{R} \quad \therefore F = \underline{\frac{B^2 a^2 v}{R}}.$$

問(2) (a) 重力の位置エネルギーの基準点を最下点に定める．回路，および力学系を合わせたエネルギー収支より*5，

$$\begin{aligned} Q &= -\Delta K - \Delta U \\ &= -\left(\frac{1}{2}M \cdot 0^2 - \frac{1}{2}M \cdot 0^2\right) - \{Mg \cdot 0 - MgL(1 - \cos \theta_0)\} \\ &= \underline{MgL(1 - \cos \theta_0)}. \end{aligned}$$

*4 vBl 公式でも整合した結果を得ることもできる場合もあるが，法則の適用としては誤りである．

*5 導出は【補足】を参照．

- (b) 磁石がコイルの左辺を通過する瞬間を考える。磁石の位置を x としたとき、磁石の速度が $u = \frac{dx}{dt}$ であることから、磁束 Φ 、誘導起電力 \mathcal{E} （時計回りを正）、コイルに流れる電流 I （時計回りを正）はそれぞれ、

$$\begin{aligned}\Phi &= Ba(x - a), \\ \mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -Bau, \\ I &= \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{Ba}{R}u,\end{aligned}$$

であり、コイル左辺の受けるアンペール力は右向きを正として、

$$F = -IBa = \frac{B^2 a^2}{R}u$$

となり、梯子コイルは磁場から水平右向きに大きさ $\frac{B^2 a^2 u}{R}$ のアンペール力を受ける*6。各糸からの張力の合力の大きさを T とすれば、梯子コイルのつりあい（中心成分、鉛直成分）より、

$$\begin{cases} M \cdot 0 = T - \frac{B^2 a^2 u}{R} \sin \theta - Mg \cos \theta, \\ M \cdot 0 = \frac{B^2 a^2 u}{R} \cos \theta - Mg \sin \theta \end{cases}$$

$$\therefore \tan \theta_1 = \frac{B^2 a^2 u}{MgR} (\equiv \theta_1), \quad T = \sqrt{\left(\frac{B^2 a^2 u}{R}\right)^2 + (Mg)^2}.$$

よって、 $X_1 = L \sin \theta_1$ より、

$$X_1 = L \sin \theta_1 \doteq L \theta_1 = \frac{B^2 a^2 u}{MgR} L.$$

- (c) 一般に、磁石の床面に対する速度を $U (= \text{const})$ 、梯子コイルが θ だけ傾いているときの梯子コイルの速度（接線方向）を $V_\theta \left(= L \frac{d\theta}{dt}\right)$ とする*7。このとき、コイルに生じる誘導起電力 E は $E = \mp Ba(U - V \cos \theta)$ であり*8、いずれの場合でもコイルに生じるアンペール力は水平右向きに大きさ $\frac{B^2 a^2}{R}(U - V_\theta \cos \theta)$ である。よって、梯子回路の運動方程式（中心）

*6 【補足】では一般論を論じている。

*7 この辺の詳しい解説は全て【補足】に詳細に記してある。なお、【補足】では $U \rightarrow v$ であることに注意。

*8 負符号が、磁場がコイルの左側の辺を通過する間の誘導起電力であり、正符号が磁場がコイルの右側の辺を通過する間の誘導起電力である。

は*9*10,

$$\begin{aligned}
 M \frac{dV_\theta}{dt} &= -Mg \sin \theta + \frac{B^2 a^2}{R} (U - V_\theta \cos \theta) \cos \theta \\
 &\doteq -Mg \theta + \frac{B^2 a^2}{R} U - \frac{B^2 a^2}{R} L V_\theta \\
 \therefore L \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= -\frac{g}{L} \left(L \theta - \frac{B^2 a^2 U}{MgR} L \right) - \frac{B^2 a^2}{MgR} L V_\theta \\
 \therefore \frac{d^2 X}{dt^2} &\doteq -\frac{g}{L} \left(X - \frac{B^2 a^2 U}{MgR} L \right) - \frac{B^2 a^2}{MgR} \frac{dX}{dt}
 \end{aligned}$$

となり, $X = \frac{B^2 a^2 U}{MgR} L$ を振動中心とした振幅の減衰していく振動 (減衰振動) を行う*11.

$U = \frac{1}{4}u$ での振動中心は

$$X = \frac{B^2 a^2 u}{4MgR} L = \frac{1}{4} X_1$$

であるから, グラフは (v) のようになる.

*9 微小角 θ に対し次の近似式を利用: $\sin \theta \doteq \theta$, $\cos \theta \doteq 1$.

*10 最後の行で次の式を利用: $\frac{dX}{dt} = V_\theta \cos \theta = L \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \doteq L \frac{d\theta}{dt}$.

*11 単振動に, 速度に比例した抵抗力が加わった運動を行うことからわかる. なお, こちらについて詳しくは【補足】を参照.

【補足】問(2)(c)を事細かに

■誘導起電力，およびアンペール力について

磁石（質量 m ）磁場領域の右端の位置を x ，コイルの右辺の位置を X とし， $t = 0$ においてコイルの左辺と磁石の右端の位置が揃っているものとする．すなわち $X(0) = x(0) + a$ である．磁石の速度は $v = \frac{dx}{dt}$ ，梯子コイルが θ （反時計回りを正）だけ傾いているときの梯子コイルの速度（糸と直交した方向成分）は $V_\theta = L \frac{d\theta}{dt}$ であり，速度の水平成分は $V_x = \frac{dX}{dt}$ ($= V_\theta \cos \theta$) である．

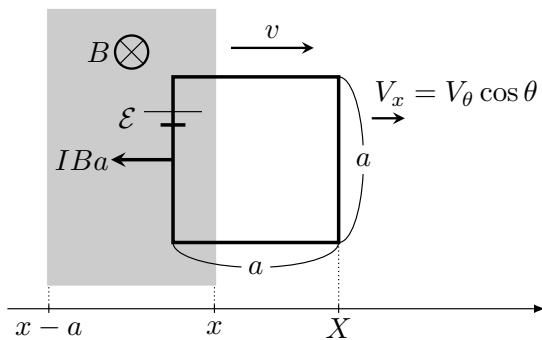


図 1

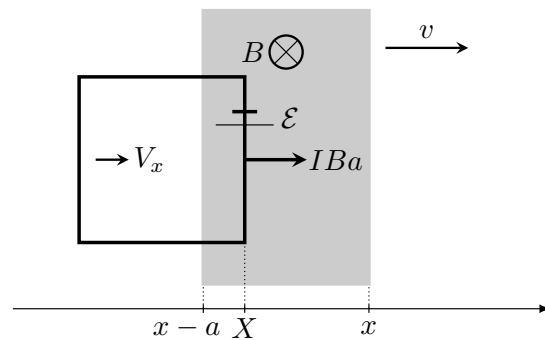


図 2

まずは，磁石がコイルの左側の辺を通過する状況を考えよう（図 1）．ここでは，磁石がコイルの右辺を通過する時刻を T_1 としたとき， $0 \leq t \leq T_1$ の間の運動を論じる^{*12}．時刻 t においてコイルを貫く磁束 Φ は，

$$\Phi = Ba\{x - (X - a)\}$$

であり，コイル 1 周に生じる誘導起電力 \mathcal{E} は時計回りを正として，

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -Ba \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dX}{dt} \right) = -Ba(v - V_x).$$

コイルに流れる電流 I は，誘導起電力と同様時計回りを正とすると，

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{Ba}{R}(v - V_x).$$

よって，コイルの左辺に生じるアンペール力は右向きを正として，

$$F = -IBa = -\frac{\mathcal{E}}{R}Ba = \frac{B^2 a^2}{R}(v - V_x).$$

続いて，磁石がコイルの右側の辺を通過する状況を考えよう（図 2）．ここでは，磁石がコイルの右辺を通過し終わる時刻を T_2 としたとき， $T_1 \leq t \leq T_2$ の間の運動を論じる． $X(T_1) = x(T_1)$ であることに留

^{*12} 相対速度 $v - V_x$ が定数でないことから $T_1 \neq \frac{a}{v - V_x}$ であることに注意．

意して、時刻 t においてコイルを貫く磁束 Φ は、

$$\Phi = Ba\{X - (x - a)\}$$

であり、コイル 1 周に生じる誘導起電力 \mathcal{E} は時計回りを正として、

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = Ba(v - V_x).$$

コイルに流れる電流 I は、誘導起電力と同様時計回りを正とすると、

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Ba}{R}(v - V_x).$$

よって、コイルの左辺に生じるアンペール力は右向きを正として、

$$F = +IBa = \frac{\mathcal{E}}{R}Ba = \frac{B^2a^2}{R}(v - V_x).$$

以上のように、磁石を速度 v で運動させる場合、磁石がコイルの左右いずれの辺を通過する場合においても同一の式で表されるアンペール力が生じる^{*13}。

■コイル、磁石の運動方程式とキルヒホッフの法則

キルヒホッフ則は^{*14}、

$$\mathcal{E} = \mp Ba(v - V_\theta \cos \theta) = RI.$$

磁石に加える外力を F_{ex} 、各糸の張力の合力の大きさを T とする。磁石にはコイルに生じるアンペール力の反作用が生じることに留意すると、コイルの運動方程式（接線成分，中心成分），および磁石の運動方程式（水平成分）はそれぞれ、

$$\begin{cases} M \frac{dV_\theta}{dt} = -Mg \sin \theta + \frac{B^2a^2}{R}(v - V_\theta \cos \theta) \cos \theta, \\ M \frac{V_\theta^2}{L} = T - Mg \cos \theta - \frac{B^2a^2}{R}(v - V_\theta \cos \theta) \sin \theta, \\ m \frac{dv}{dt} = F_{\text{ex}} - \frac{B^2a^2}{R}(v - V_\theta \cos \theta). \end{cases}$$

■力学系と回路を合わせた系のエネルギー収支

コイルの運動方程式の接線成分にコイルの速度 V_θ 、磁石の運動方程式に磁石の速度 v 、キルヒホッフ則に回路に流れる電流 I をかけることでそれぞれのエネルギー収支の式を得ることができ、3 式の和を取ることで力学系と回路を合わせた系のエネルギー収支の式を得ることができる。

^{*13} $V_x > v$ となる場合（磁石を動かす速さがゆっくりでコイルが磁石を抜かすような状況）では左向きのアンペール力となる。

^{*14} $V_x = V_\theta \cos \theta$ （ $\Leftrightarrow \frac{dX}{dt} = L \frac{d\theta}{dt} \cos \theta$ ）である。

梯子コイルのエネルギー収支の式は*15,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M V_{\theta}^2 \right) = -MgV_{\theta} \sin \theta + \frac{B^2 a^2}{R} V_{\theta} (v - V_{\theta} \cos \theta) \cos \theta .$$

磁石のエネルギー収支の式は,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = F_{\text{ex}} v - \frac{B^2 a^2}{R} v (v - V_{\theta} \cos \theta) .$$

回路のエネルギー収支の式は,

$$RI^2 = \mp Ba (v - V_{\theta} \cos \theta) I$$

$$\therefore RI^2 = \frac{B^2 a^2}{R} (v - V_{\theta} \cos \theta)^2 = \frac{B^2 a^2}{R} (v^2 + V_{\theta}^2 \cos^2 \theta - 2vV_{\theta} \cos \theta) .$$

以上 3 式の和を取ると,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M V_{\theta}^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) + RI^2 &= -MgV_{\theta} \sin \theta + \frac{B^2 a^2}{R} V_{\theta} (v - V_{\theta} \cos \theta) \cos \theta \\ &\quad + F_{\text{ex}} v - \frac{B^2 a^2}{R} v (v - V_{\theta} \cos \theta) \\ &\quad + \frac{B^2 a^2}{R} (v^2 + V_{\theta}^2 \cos^2 \theta - 2vV_{\theta} \cos \theta) \\ &= -MgV_{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

となり, アンペール力の仕事率と誘導起電力の仕事率が相殺する. この式を整理すれば,

$$\frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2} M V_{\theta}^2}_{\substack{\text{コイルの} \\ \text{運動エネルギー}}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\substack{\text{磁石の} \\ \text{運動エネルギー}}} \right) + \underbrace{RI^2}_{\text{ジュール熱}} = \underbrace{-MgV_{\theta} \sin \theta}_{\text{重力の仕事率}}$$

のように, 重力が系にする仕事の一部が 2 物体の運動エネルギー変化に, 残りがジュール熱に変換されることがわかる. また, 次のように変形すれば*16,

$$-\frac{d}{dt} \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} M V_{\theta}^2}_{\substack{\text{コイルの} \\ \text{運動エネルギー}}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\substack{\text{磁石の} \\ \text{運動エネルギー}}} + \underbrace{Mg(-L \cos \theta)}_{\substack{\text{重力場の蓄える} \\ \text{位置エネルギー}}} \right\} = \underbrace{RI^2}_{\text{ジュール熱}}$$

コイル, 磁石, 重力場からなる系の力学的エネルギーの減少分が回路で生じるジュール熱に等しいとも解釈できる. 問(2)(a)では磁石が静止していることから恒等的に $v = 0$ であり, コイルと重力場からなる系の力学的エネルギーの減少分がジュール熱に等しいことを用いている.

*15 次の恒等式を利用: $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} A^2 \right) = \frac{d}{dA} \left(\frac{1}{2} A^2 \right) \frac{dA}{dt} = A \frac{dA}{dt}$.

*16 次の式を利用: $V_{\theta} = L \frac{d\theta}{dt}$.

■微分方程式を解く

設問に合わせ、磁石の速度が $v = \frac{1}{4}u$ で一定の場合を論じる。また、ここでは物理量 O の時間微分を $\dot{O} = \frac{dO}{dt}$ と記す。

梯子コイルの運動方程式（接線成分）は、

$$ML\ddot{\theta} = -Mg \sin \theta + \frac{B^2 a^2}{R} \left(\frac{1}{4}u - L\dot{\theta} \cos \theta \right) \cos \theta \equiv -Mg \theta + \frac{1}{4} \frac{B^2 a^2 u}{R} - \frac{B^2 a^2}{R} L\dot{\theta}$$

$$\therefore \ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \left(\theta - \frac{B^2 a^2 u}{4MgR} \right) - \frac{B^2 a^2}{MgR} \dot{\theta}.$$

ここで、 $\Theta = \theta - \frac{B^2 a^2 u}{4MgR}$, $2\gamma = \frac{B^2 a^2}{MgR}$, $\omega^2 = \frac{g}{L}$ とすると、この微分方程式は、

$$\ddot{\Theta} + 2\gamma\dot{\Theta} + c\Theta = 0$$

となる。

さて、解として $\Theta = ce^{\lambda t}$ (c, λ は定数) を仮定すると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (ce^{\lambda t}) + 2\gamma \frac{d}{dt} (ce^{\lambda t}) + \omega^2 ce^{\lambda t} &= 0 \\ c\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma c\lambda e^{\lambda t} + \omega^2 ce^{\lambda t} &= 0 \\ ce^{\lambda t} (\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2) &= 0 \end{aligned}$$

となり、この式が任意の t で成り立つような λ は^{*17},

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0 \quad \therefore \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

である。この解は (i) $\gamma > \omega$, (ii) $\gamma = \omega$, (iii) $\gamma < \omega$ の 3 つの場合に分類され、振動しながら徐々に振幅が小さくなる解は (iii) である^{*18}。この場合、

$$\lambda = -\gamma \pm i \underbrace{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}_{>0} (= \lambda_{\pm})$$

となり、 Θ の一般解は $e^{\lambda_+ t}$ と $e^{\lambda_- t}$ の線形結合で与えられ、初期条件から決まる未知定数を A, B とすれば^{*19},

$$\begin{aligned} \Theta &= Ae^{-\gamma t + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t} + Be^{-\gamma t - i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t} \\ &= e^{-\gamma t} \left(Ae^{i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t} + Be^{-i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t} \right) \\ &= e^{-\gamma t} \left\{ (A+B) \cos \left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t \right) + i(A-B) \sin \left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t \right) \right\} \\ &= e^{-\gamma t} \left\{ C \cos \left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t \right) + D \sin \left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t \right) \right\} \end{aligned}$$

^{*17} $c = 0$ は $\Theta = 0$ の自明な解（振動中心で静止している解）である。

^{*18} この辺は大学に入ってからすぐにやる内容なので掘り下げることなく省略します。

^{*19} オイラーの公式を利用： $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 。

と書ける. なお, 最後に $C = A + B$, $D = i(A - B)$ とした. また, 角速度 $\dot{\theta} (= \dot{\theta})$ は,

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & -\gamma e^{-\gamma t} \left\{ C \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) + D \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) \right\} \\ & + \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} e^{-\gamma t} \left\{ -C \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) + D \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) \right\}. \end{aligned}$$

考える解は初期条件 $\theta(0) = \theta_1$, $\dot{\theta}(0) = 0$ を満たすものであり*20,

$$\begin{cases} \frac{3}{4}\theta_1 = C + 0, \\ 0 = -\gamma C + D\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \end{cases} \quad C = \frac{3}{4}\theta_1, \quad D = \frac{3}{4}\theta_1 \frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}$$

と未知定数 C , D が決定され,

$$\theta = \frac{\theta_1}{4} \left\{ 1 + 3e^{-\gamma t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t - \delta) \right\}$$

を得る (図3)*21. ただし, $\tan \delta = \sqrt{\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)^2 - 1}$, $\theta_1 = \frac{B^2 a^2 u}{MgR}$, $\gamma = \frac{B^2 a^2}{2MgR}$, $\omega^2 = \frac{g}{L}$ である.

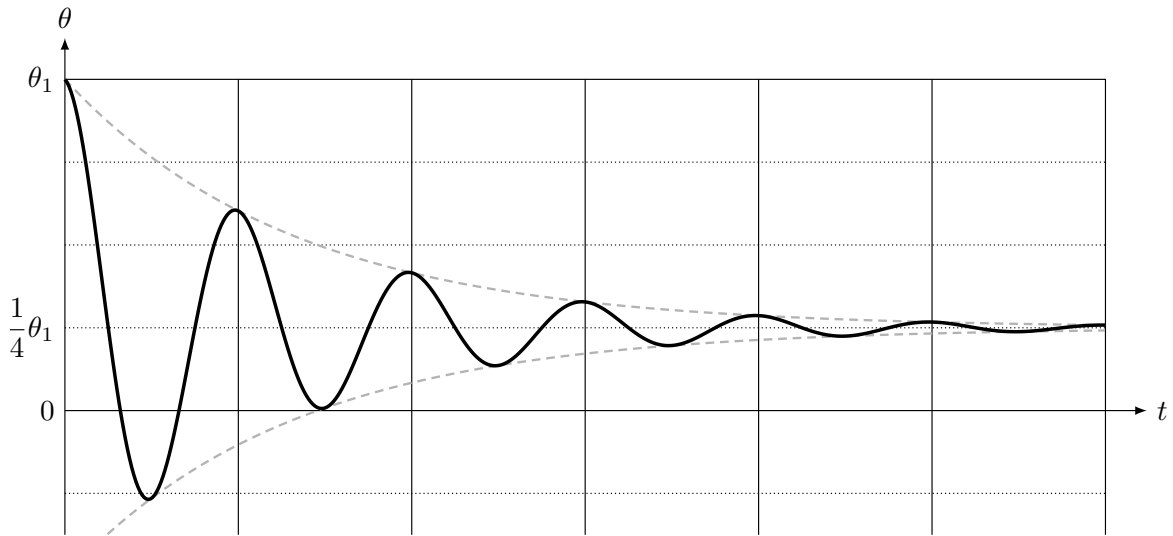


図3

*20 $\theta(0) = \frac{3}{4}\theta_1$, $\dot{\theta}(0) = 0$.

*21 X で書きたい場合は両辺を L 倍すればよい.

3 熱あり過程

【メモ】

・ A 室については，熱力学の基本的（むらがなく熱あり）な過程．定石は，可動部分のつりあいから圧力の決定，状態方程式から温度の決定．内部エネルギー変化を公式，気体のする仕事を $P - V$ 図の面積評価，熱力学第 1 法則を通じて熱を計算．

・ C 室については，準静的な断熱過程．準静的な断熱過程では，ポアソンの公式から圧力が体積の決定，状態方程式から温度の決定．熱力学第 1 法則は仕事の決定方程式となる．

・ 問(1)(d)は気体にむらが生じている過程．気体にむらが生じている場合，気体の圧力や温度は定義されず，仕事も計算できない．そのため，途中過程は問うことはできず，解法選択としては始状態と終状態のエネルギー収支一択となる．

【解答】

問(1) (a) 公式より，

$$U = \frac{3}{2}RT.$$

(b) 状態方程式より，

$$P = \frac{RT}{SL}.$$

(c) ピストンのつりあいより，

$$0 = K_0 \Delta x - PS \quad \therefore \Delta x = \frac{PS}{K_0} = \frac{RT}{K_0 L}.$$

(d) 気体とばねからなる系のエネルギー保存則より，

$$\frac{3}{2}RT' + \frac{1}{2}K_0 \cdot 0^2 = \frac{3}{2}RT + \frac{1}{2}K_0(\Delta x)^2 \quad \therefore T' = T + \frac{1}{3} \frac{K_0}{R} (\Delta x)^2.$$

問(2) (a) ポアソンの公式より，

$$P_1' \left(\frac{2}{3}SL \right)^{\gamma} = P_1 (SL)^{\gamma} \quad \therefore P_1' = \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma} P_1.$$

(b) 状態方程式より，

$$\left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma} P_1 \cdot \frac{2}{3}SL = RT_2 \quad \therefore T_2 = \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma-1} \frac{P_1 SL}{R} = \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma-1} T_1.$$

(c) ばねの縮みを Δy とする。ピストンのつりあいより A 室の気体の圧力 P_A は、

$$P_A S = K_1 \Delta y = \left(\frac{3}{2}\right)^\gamma P_1 S \quad \therefore P_A = \left(\frac{3}{2}\right)^\gamma P_1.$$

よって、状態方程式より、

$$\left(\frac{3}{2}\right)^\gamma P_1 \cdot \frac{3}{2} S L = R T_3 \quad \therefore T_3 = \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^{\gamma+1}} T_1.$$

(d) ばねの自然長を ℓ とする。始状態と終状態のピストンのつりあい^{*22*23}、および状態方程式より、

$$\begin{cases} 0 = P_1 S - K_1(\ell - L), \\ 0 = \left(\frac{3}{2}\right)^\gamma P_1 S - K_1\left(\ell - \frac{5}{6}L\right), \\ 0 = P_1 S - K_1(\ell - L) \end{cases}$$

$$\therefore K_1 = 6 \underbrace{\left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^\gamma - 1 \right\} \frac{R T_1}{L^2}} , \quad \ell = \frac{(3/2)^\gamma - 5/6}{(3/2)^\gamma - 1} L.$$

(e) 公式より^{*24}、

$$\Delta E = \frac{1}{2} K_1 \left(\ell - \frac{5}{6}L\right)^2 - \frac{1}{2} K_1 (\ell - L)^2 = \frac{1}{12} \underbrace{\left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^\gamma + 1 \right\} R T_1}.$$

*22 中央の部屋が真空なことからはばねは縮んでいる

*23 終状態のばねの長さ： $3L - \left(\frac{3}{2}L + \frac{2}{3}L\right) = \frac{5}{6}L$.

*24 $\ell - \frac{5}{6}L = \left(\frac{3}{2}\right)^\gamma (\ell - L)^2$, $\ell - L = \frac{1/6}{(3/2)^\gamma - 1} L$.

【補足】問(2)(c)を事細かに

A 室, および C 室の気体の圧力を P_A, P_C , 温度を T_A, T_C , ピストンの位置を x, y とする (図 1). 始状態において $x = L, y = 2L$, 終状態では $x = \frac{3}{2}L, y = \frac{7}{3}L$ であり, 体積 $V_A = Sx, V_C = S(3L - y)$ である.

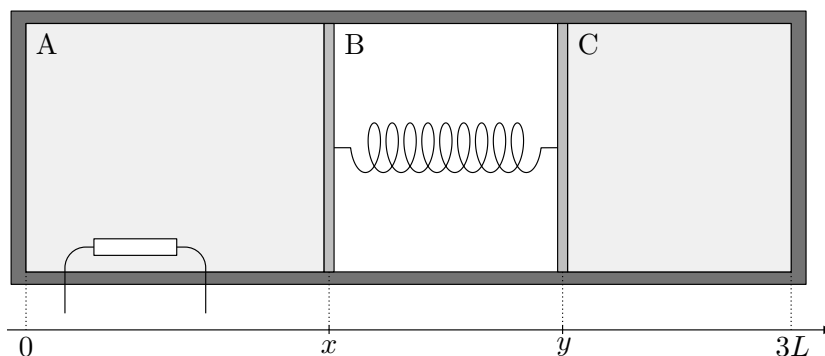


図 3

■気体の圧力, 温度を求める

ピストンのつりあい, 状態方程式, ポアソンの公式 (C 室) より,

$$\begin{cases} 0 = P_A S - K_1 \{ \ell - L(y - x) \}, \\ 0 = P_C S - K_1 \{ \ell - L(y - x) \}, \\ P_A S x = R T_A, \\ P_C S (3L - y) = R T_C, \\ P_C \{ S(3L - y) \}^\gamma = \frac{R T_1}{S L} (S L)^\gamma. \end{cases}$$

つりあいより $P = P_A = P_C$ とする. また, $K_1 = 6 \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^\gamma - 1 \right\} \frac{R T_1}{L^2}$, $\ell = \frac{(3/2)^\gamma - 5/6}{(3/2)^\gamma - 1} L$ を用いれば, つりあい, およびポアソンの公式から位置 x は y を用いて,

$$\begin{aligned} \left(\frac{L}{3L - y} \right)^\gamma \frac{R T_1}{S L} &= \frac{6}{S} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^\gamma - 1 \right\} \frac{R T_1}{L^2} \left\{ \frac{(3/2)^\gamma - 5/6}{(3/2)^\gamma - 1} L - (y - x) \right\} \\ \therefore x &= y + \frac{1}{6} \frac{L}{(3/2)^\gamma - 1} \left(\frac{L}{3L - y} \right)^\gamma - \frac{(3/2)^\gamma - 5/6}{(3/2)^\gamma - 1} L \end{aligned}$$

と表せる. 以上より, A 室, C 室それぞれの気体の状態は以下のように求まる.

$$\begin{cases} P = \left(\frac{L}{3L - y} \right)^\gamma \frac{R T_1}{S L}, \\ T_A = \left(\frac{L}{3L - y} \right)^\gamma \left\{ \frac{y}{L} + \frac{1}{6} \frac{L}{(3/2)^\gamma - 1} \left(\frac{L}{3L - y} \right)^\gamma - \frac{(3/2)^\gamma - 5/6}{(3/2)^\gamma - 1} \right\} T_1, \\ T_C = \left(\frac{L}{3L - y} \right)^{\gamma-1} T_1, \\ V_A = S x, \\ V_C = S(3L - y). \end{cases}$$

■仕事，熱の計算の全て

まず，A 室の気体について．内部エネルギー変化 ΔU_A は，

$$\Delta U_A = \frac{3}{2}R\Delta T_A = \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma+1} - 1 \right\} RT_1.$$

仕事 W_A は，

$$W_A = \int_{SL}^{\frac{3}{2}SL} P dV_A = \int_{x=L}^{x=\frac{3}{2}L} P \frac{dV_A}{dx} dx = \int_{y=2L}^{y=\frac{7}{3}L} P \frac{dV_A}{dx} \frac{dx}{dy} dy$$

を計算すればよい．置換積分に伴う因子はそれぞれ，

$$\begin{aligned} \frac{dV_A}{dx} &= S, \\ \frac{dx}{dy} &= 1 + \frac{\gamma}{6} \frac{L}{(3/2)^\gamma - 1} \left(\frac{L}{3L-y} \right)^{\gamma+1} \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} W_A &= \frac{RT_1}{L} \int_{2L}^{\frac{7}{3}L} \left(\frac{L}{3L-y} \right)^\gamma \left\{ 1 + \frac{\gamma}{6} \frac{L}{(3/2)^\gamma - 1} \left(\frac{L}{3L-y} \right)^{\gamma+1} \right\} dy \\ &= \frac{RT_1}{L} \int_{2L}^{\frac{7}{3}L} \left(\frac{L}{3L-y} \right)^\gamma dy + \frac{RT_1}{L} \int_{2L}^{\frac{7}{3}L} \frac{\gamma}{6} \frac{L}{(3/2)^\gamma - 1} \left(\frac{L}{3L-y} \right)^{2\gamma+1} dy \\ &= \frac{1}{\gamma-1} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right\} RT_1 + \frac{1}{12} \frac{1}{(3/2)^\gamma - 1} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{2\gamma} - 1 \right\} RT_1 \\ &= \frac{1}{\gamma-1} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right\} RT_1 + \frac{1}{12} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^\gamma + 1 \right\} RT_1. \end{aligned}$$

よって，A 室の気体の吸熱量 Q_A は，熱力学第 1 法則より，

$$\begin{aligned} Q_A &= \Delta U_A + W_A \\ &= \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma+1} - 1 \right\} RT_1 + \frac{1}{\gamma-1} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right\} RT_1 + \frac{1}{12} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^\gamma + 1 \right\} RT_1. \end{aligned}$$

続いて，C 室の気体について．内部エネルギー変化 ΔU_C は，

$$\Delta U_C = \frac{3}{2}R\Delta T_C = \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right\} RT_1.$$

仕事 W_C は*25，

$$W_C = \int_{y=2L}^{y=\frac{7}{3}L} P \frac{dV_C}{dy} dy = -\frac{RT_1}{L} \int_{2L}^{\frac{7}{3}L} \left(\frac{L}{3L-y} \right)^\gamma dy = -\frac{1}{\gamma-1} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right\} RT_1.$$

*25 置換積分の因子： $\frac{dV_C}{dy} = -S$.

よって、熱力学第 1 法則より、

$$0 = \Delta U_C + W_C = \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right\} RT_1 - \frac{1}{\gamma-1} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right\} RT_1.$$

であり、 $\gamma = \frac{5}{3}$ より右辺が 0 になることが確認できる。

■ A, B, C からなる系の熱力学第 1 法則から弾性エネルギーを逆算して求める

先の計算結果より、

$$W_A + W_C = \frac{1}{12} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma} + 1 \right\} RT_1$$

であるから、

$$Q_A = \underbrace{\frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma+1} - 1 \right\} RT_1}_{=\Delta U_A} + \underbrace{\frac{1}{\gamma-1} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right\} RT_1}_{=\Delta U_C} + \underbrace{\frac{1}{12} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma} + 1 \right\} RT_1}_{=W_A+W_C}.$$

と見ることができる。

翻って、A 室の気体、ばね（弾性エネルギー変化を ΔU_B とする）、C 室の気体からなる系の熱力学第 1 法則は、

$$Q_A = \Delta U_{A+B+C} + W_{A+B+C} = \Delta U_A + \Delta U_B + \Delta U_C$$

である*26。よって、2 式を比較すれば、

$$\Delta U_B = W_A + W_C = \frac{1}{12} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{\gamma} + 1 \right\} RT_1$$

と弾性エネルギー変化を逆算的に求めることができる。

*26 系全体は外界に仕事をしていない、すなわち $W = 0$ であることに注意。