# 1 衝突

【メモ】

・衝突は以下の 2 式を連立.

$$\begin{cases} \text{衝突の直前・直後の運動量保存則} \\ \text{問題で指示された条件} \end{cases}$$

なお，衝突に関与する物体が外力によって固定されているとき運動量保存則は成り立たない[*1].

【解答】

問(1) (a) 物体のエネルギー収支より，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0 - 2 = mgh\cos 0 \qquad \therefore v = \sqrt{2gh}\,.$$

(b) 鉛直線から 60° の方向に跳ね返るので，

$$v_x = v_0\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0\,,\quad v_y = v_0\sin 30^\circ = \frac{1}{2}v_0\,.$$

(c) 物体に生じる加速度は $\vec{a} = (0, -g)$ である．よって，時刻 $t$ における物体の位置は，

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}v_0 t\,, \\ y = \dfrac{v_0}{2}t - \dfrac{1}{2}gt^2\,. \end{cases}$$

この 2 式から $t$ を消去して，

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2g}{3{v_0}^2}x^2\,.$$

(d) 小球の軌道が $(L, -L/\sqrt{3})$ を通ればよく，

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}L = \frac{1}{\sqrt{3}}L - \frac{2g}{3\cdot 2gh}L^2 \qquad \therefore L = 2\sqrt{3}\,h\,.$$

問(2) (a) 衝突の前後での小球の運動量収支より，

$$\begin{cases} mv'_x - m\cdot 0 = \dfrac{1}{2}P\,, \\ mv'_y - m(-v_0) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}P \end{cases} \qquad \therefore v'_x = \frac{P}{2m}\,,\quad v'_y = -v_0 + \frac{\sqrt{3}\,P}{2m}\,.$$

(b) 作用・反作用の関係より $P_1 = P$ であり，台の運動量収支より，

$$\begin{cases} MV - M\cdot 0 = -\dfrac{1}{2}P\,, \\ M\cdot 0 - M\cdot 0 = P_2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}P \end{cases} \qquad \therefore V = -\frac{P}{2M}\,,\quad P_2 = -v_0 + \frac{\sqrt{3}\,P}{2m}\,.$$

[*1] 滑らかな面の場合，面に平行な力積を受けないことから面に平行な方向の速度成分は不変.

(c)　前問に示した．

(d)　小球と台からなる系の力学的エネルギー保存則より，$P \neq 0$ の解を選んで，

$$\frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{P}{2m}\right)^2+\left(-v_0+\frac{\sqrt{3}\,P}{2m}\right)^2\right\}+\frac{1}{2}M\left(-\frac{P}{2M}\right)^2=\frac{1}{2}m{v_0}^2$$

$$\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{4M}\right)P^2-\sqrt{3}\,v_0P=0$$

$$\therefore P=\frac{4\sqrt{3}\,Mm}{4M+m}v_0\,.$$

(e)　$M=5m$ のとき，$P=\dfrac{20\sqrt{3}}{21}mv_0$ であり，このとき台に対する小球の相対速度 $(\dot{x}_{\mathrm{re}},\dot{y}_{\mathrm{re}})$ は，

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_{\mathrm{re}}\\ \dot{y}_{\mathrm{re}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v'_x-V\\ v'_y-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\sqrt{3}/7\\ 3/7\end{pmatrix}v_0\,.$$

よって，水平方向とのなす角 $\alpha$ の正接は，

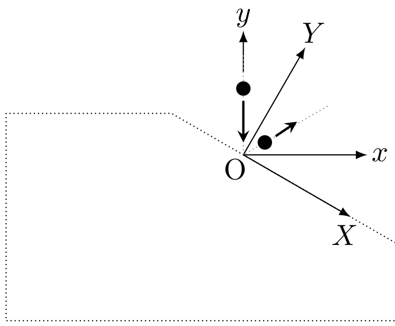
$$\tan\alpha=\left|\frac{\dot{y}_{\mathrm{re}}}{\dot{x}_{\mathrm{re}}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{4}\,.$$

【補足】衝突の条件「衝突の前後で小球と台の力学的エネルギーの和は保存する」の別解釈

この現象は，小球，台，床の 3 体衝突である．3 体衝突では，モデルを明確に設定しないと解答が一意に定まらない．ここでは，問題文にある「衝突の前後で小球と台の力学的エネルギーの和は保存する」という文章について意地悪く別の読み取り方をすることで別の結論を得ることを考える．

モデル設定としては，衝突を「小球と台が衝突した後，台と床（および固定具）が衝突する」という逐次的な現象として捉え，「衝突の前後で小球と台の力学的エネルギーの和は保存する」という文章を「小球と台との衝突」にのみ適用して考える．すなわち，台と床（および固定具）との衝突において力学的エネルギーの損失が生じてもよいという立場である．

図のように，衝突面に平行な方向と垂直な方向それぞれに $X$ 軸，$Y$ 軸を，はじめ台と重なるよう地面に固定された座標系として定める．




**■小球と台の衝突**

衝突直後の小球の速度の $X$ 成分，および $Y$ 成分をそれぞれ $v_X$，$v_Y$，台の速度の $Y$ 成分を $V_Y$ とする[*2]．小球と台の衝突では力学的エネルギーが保存することから物体間のはね返り係数 1 の衝突として，衝突の前後における運動量の $Y$ 成分の保存則，およびはね返り係数の式より，

$$\begin{cases} MV_Y + mv_Y = m(-v_0\cos 30^\circ)\,, \\ V_Y - v_Y = -1\{0 - (-v_0\cos 30^\circ)\} \end{cases} \qquad \therefore V_Y = -\frac{\sqrt{3}\,m}{M+m}v_0\,,\quad v_Y = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{M-m}{M+m}v_0\,.$$

また，面に平行な $X$ 方向には小球，台ともに力積を受けないことから運動量は一定であり速度成分も不変である．よって，衝突直後（台と床の衝突はまだ行われていない）の小球の速度 $\vec{v}$，および台の速度 $\vec{V}$ の $XY$ 成分はそれぞれ，

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}v_0 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{M-m}{M+m}v_0 \end{pmatrix}\,,\quad \vec{V} = \begin{pmatrix} V_X \\ V_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{\sqrt{3}\,m}{M+m}v_0 \end{pmatrix}\,.$$

**■問(1)について**

(a) 略.

(b) 衝突の計算結果より，

$$v_x = v_X\cos 30^\circ + v_Y\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{M}{M+m}v_0\,,$$

$$v_y = -v_X\sin 30^\circ + v_Y\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\frac{M-2m}{M+m}v_0\,.$$

(c) (b) の結果より，

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{M}{M+m}v_0 t\,, \\ y = \dfrac{1}{2}\dfrac{M-2m}{M+m}v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2\,. \end{cases}$$

[*2] 小球と台の衝突では，台は $X$ 方向に力積を受けないため，台の速度の $X$ 成分は $V_X = 0$ である．

この 2 式から $t$ を消去して,

$$y=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{2m}{M}\right)x-\frac{2}{3}\frac{g}{{v_0}^2}\left(1+\frac{m}{M}\right)^2x^2}\,.$$

(d)　$x=L$, $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}L$, ${v_0}^2=2gh$ より,

$$L=\frac{2\sqrt{3}\,M(M-m)}{(M+m)^2}h\,.$$

なお，台が床から受けた鉛直方向の力積 $P_{床}$，および固定具から受けた水平方向の力積 $P_{固定具}$ はそれぞれ，台が小球から受ける力積の大きさを $P$ とすると,

$$P_{床}=P\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}m\{v_Y-(-v_0\cos 30^\circ)\}=\frac{3}{2}\frac{Mm}{M+m}v_0\,,$$
$$P_{固定具}=P\sin 30^\circ=\frac{1}{2}m\{v_Y-(-v_0\cos 30^\circ)\}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{Mm}{M+m}v_0\,.$$

**■問(2)について**

(a)　**【解答】**に示したものと同じ.

(b)　作用・反作用の関係より $P_1=P$ である．小球と台の衝突後の台の速度の $xy$ 成分を $V_x$，$V_y$，台と床の衝突後の台の速度の $xy$ 成分を $V_x'$，$V_y'$ とすると，題意より $V_y'=0$ であり，台の運動量収支は,

$$\begin{cases}\text{小球と台}\begin{cases}MV_x-M\cdot 0=-P/2\,,\\ MV_y-M\cdot 0=-\sqrt{3}\,P/2\,,\end{cases}\\ \text{台と床}\begin{cases}MV_x'-MV_x=0\,,\\ M\cdot 0-MV_y=P_2\,.\end{cases}\end{cases}$$

よって，台の運動量収支の $y$ 成分の 2 式より,

$$P_2=\frac{\sqrt{3}}{2}P\,.$$

(c)　台の運動量収支の $x$ 成分の 2 式より,

$$V=V_x'=-\frac{P}{2M}\,.$$

(d)　小球と台の衝突の計算結果より,

$$P=|MV_Y-M\cdot 0|=\frac{\sqrt{3}\,Mm}{M+m}v_0\,.$$

(e)　一連の衝突後の台の速度の $xy$ 成分は，

$$V_x = V_Y \sin 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m}{M+m}v_0\,,\quad V_y = 0$$

であるから $M = 5m$ では，

$$\begin{aligned}\tan\alpha &= \frac{-v_X \sin 30^\circ + v_Y \sin 30^\circ - 0}{v_X \cos 30^\circ + v_Y \sin 30^\circ - V_Y \sin 30^\circ} \\ &= \frac{\dfrac{3}{4}\dfrac{5m-m}{5m+m}v_0 - \dfrac{1}{4}v_0 - 0}{\dfrac{\sqrt{3}}{4}v_0 + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\dfrac{5m-m}{5m+m}v_0 - \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{m}{5m+m}v_0\right)} \\ &= \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{2\sqrt{3}}}\,.\end{aligned}$$

なお，台が床から受けた鉛直方向の力積 $P_{床}$ は，

$$P_{床} = \frac{\sqrt{3}}{2}P = \frac{3}{2}\frac{Mm}{M+m}v_0\,.$$

**■小球と台の衝突におけるエネルギー保存則，台と床の衝突におけるエネルギー損失の確認**

小球と台：

$$\begin{aligned}\Delta E_1 &= \left[\frac{1}{2}M\left(\frac{\sqrt{3}\,m}{M+m}v_0\right)^2 + \frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{M-m}{M+m}v_0\right)^2\right\}\right] - \frac{1}{2}m{v_0}^2 \\ &= \frac{m{v_0}^2}{2(M+m)^2}\left\{3Mm + \frac{1}{4}(M^2 + 2Mm + m^2 + 3M^2 + 3m^2 - 6Mm)\right\} - \frac{1}{2}m{v_0}^2 \\ &= \frac{m{v_0}^2}{2(M+m)^2}(M+m)^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

台と床：

$$\Delta E_2 = \left\{\frac{1}{2}M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m}{M+m}v_0\right)^2\right\} - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = -\frac{1}{2}\left\{1 - \frac{3}{4}\frac{Mm}{(M+m)^2}\right\}m{v_0}^2\,.$$

この問題の「衝突の前後で小球と台の力学的エネルギーの和は保存する」は読み方次第では 2 通りの解釈ができ，上記に示したようにそれぞれの解釈で結果が異なる．そのため，この問題の文章は「小球が台と衝突し台が水平方向に動き出すこの一連の過程で，小球と台からなる系の力学的エネルギーの和は一定に保たれる」などとした方が良い．

## 2 荷電粒子の運動（静電場，静磁場）

【メモ】

・問(1)は抵抗の内部構造.

・問(2)は電場，磁場の入っただけの力学.

【解答】

問(1) (a) 電子の運動方程式より，

$$m \cdot 0 = eE - kv_0 \qquad \therefore v_0 = \frac{eE}{k}.$$

(b) 単位体積当たりの電子数が $n$ であるから，

$$N = nabv_0 t.$$

(c) 電流の定義より，

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{eN}{t-0} = enabv_0.$$

(d) 抵抗の合成則より，$m$ 個の直列接続では，

$$r_{直列} = \underbrace{r + r + \cdots + r}_{m\ 個} = mr_{①},$$

$m$ 個の並列接続では，

$$\frac{1}{r_{並列}} = \underbrace{\frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \cdots + \frac{1}{r}}_{m\ 個} \qquad \therefore r_{並列} = \frac{1}{m}r_{②}.$$

ここで，抵抗の直列接続は合成するごとに抵抗の長さが長くなると見做せるから，$i\,(=1, 2, \cdots n)$ 番目の抵抗値を $r_i$，抵抗の長さを $\ell_i$，比例定数を $\alpha$ としたとき，

$$r_{直列} = r_1 + r_2 + \cdots + r_n = \alpha\ell_1 + \alpha\ell_2 + \cdots + \alpha\ell_n$$
$$\therefore r_{直列} = \sum_{i=1}^{n} r_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \ell_i$$

と表せる．同様に，並列接続では合成するごとに抵抗の断面積が大きくなると見做せるから，$i\,(=1, 2, \cdots n)$ 番目の抵抗値を $r_i$，抵抗の断面積を $S_i$，比例定数を $\beta$ としたとき，

$$\frac{1}{r_{並列}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n} = \beta S_1 + \beta S_2 + \cdots + \beta S_n$$
$$\therefore r_{並列} = \sum_{i=1}^{n} r_i = \frac{1}{\beta \sum_{i=1}^{n} S_n}.$$

以上より，抵抗値は長さに比例，断面積に反比例するとわかる．したがって，長さ $L$，断面積 $ab$ の抵抗の抵抗値は，比例定数（抵抗率と呼ぶ）を $\rho$ として，

$$r' = \rho \times \underbrace{\frac{L}{ab}}_{③,\ ④} .$$

(e) $v_0 = \dfrac{eE}{k}$，$I = enabv_0$ より，

$$I = aben\frac{eE}{k}$$
$$\therefore \underbrace{EL}_{\text{電位差}} = \frac{k}{e^2n}\frac{L}{ab} \times I \qquad \therefore \rho = \frac{k}{e^2n} .$$

問(2) (a) ホールの受ける力は公式より，

$$\begin{pmatrix} F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ev_zB - eE' - kv_y \\ -ev_yB + eE - kv_z \end{pmatrix} .$$

(b) 題意より，$F_y = F_z = 0$，$v_y = 0$ より，

$$\begin{cases} 0 = ev_zB - eE' - k \cdot 0 , \\ 0 = eE - ev_yB - kv_z \end{cases} \qquad \therefore v_z = \frac{eE}{k} \, (= v_1) , \quad E' = v_zB = \frac{eEB}{k} .$$

(c) 平行一様電場ゆえ，電位差 $\Delta\phi$ は，電場 $\vec{E}$，変位 $\Delta\vec{r}$ と

$$\Delta\phi = -\vec{E} \cdot \Delta\vec{r}$$

の関係がある．よって[*3]，

$$\phi - 0 = -\left\{ 0 \cdot 0 + \left( -\frac{eBE}{k} \right) Y + EZ \right\} \qquad \therefore \phi = \frac{eBE}{k}Y - EZ .$$

(d) $V_1$，$V_2$ はそれぞれ，

$$V_1 = \frac{eBE}{k}b , \quad V_2 = -Ec + \frac{eBE}{k}b$$

であり，$V_2$ の $E$ の符号を反転させたものを $V_{3,E}$，$B$ の符号を反転させたものを $V_{3,B}$ とすると，

$$V_{3,E} = Ec - \frac{eBE}{k}b , \quad V_{3,B} = -Ec - \frac{eBE}{k}b$$

[*3] 各方向について，平行一様電場ゆえ，$\phi_x = 0$, $\phi_z = -EZ$, $\phi_y = \dfrac{eBE}{k}Y$ であり，電位の重ね合わせより，$\phi = \phi_x + \phi_y + \phi_z$ と計算するのが想定解答だろう．

である．$V_{3,E} = -V_2$ より，$E$ の符号を反転させたものは独立 $V_2$ とは独立とはならないので，$V_1$ を決定するためには $B$ の向きを変えればよい．このとき，

$$V_1 = \frac{V_2 - V_3}{2}\,.$$

# 3 熱あり過程

【メモ】

・熱力学の基本的（むらがなく熱あり）な過程に関する問題．定石は，可動部分のつりあいから圧力の決定，状態方程式から温度の決定．内部エネルギー変化を公式，気体のする仕事を $P-V$ 図の面積評価，熱力学第 1 法則を通じて熱を計算．

【解答】

問(1) (a) ピストンのつりあいより，

$$0 = P_1 S - (P_0 + \rho g h)S \qquad \therefore P_0 = \underline{P_0 + \rho g h}\,.$$

(b) 状態方程式より，

$$P_1 Sh = nRT_1 \qquad \therefore T_1 = \underline{\frac{(P_0 + \rho g h)Sh}{nR}}\,.$$

(c) ピストンのつりあい，および状態方程式より，

$$\begin{cases} 0 = PS - (P_0 + \rho g h)S\,, \\ P \cdot 2Sh = nRT_2 \end{cases} \qquad \therefore T_2 = \frac{2(P_0 + \rho g h)Sh}{nR} = \underline{2T_1}\,.$$

(d) $P-V$ 図の面積評価を行い（図略），

$$W_1 = P_1(2Sh - Sh) = \underline{P_1 Sh}\,.$$

(e) 熱力学第 1 法則より，

$$Q_1 = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) + P_1 Sh = \frac{3}{2}nR\frac{P_1 Sh}{nR} + P_1 Sh = \underline{\frac{5}{2}P_1 Sh}\,.$$

問(2) (a) ピストンが $x$ だけ下降したときの水面のストッパーからの高さを $y$ とする．総体積不変ゆえ，

$$Sx + 2Sy = Sh \qquad \therefore y = \frac{h-x}{2}\,.$$

よって，ピストンのつりあいより，

$$0 = PS - (P_0 + \rho g x)S \qquad \therefore P = \underline{P_0 + \frac{1}{2}\rho g(h+x)}\,.$$

(b)　状態 4 から状態 1 の過程において，ピストンが $x$ だけ下降したときの気体の体積 $V$ は $V = S(2h - x)$ と表されるので，$x = -\dfrac{V}{S} + 2h$ である．気体の圧力 $P$ を $V$ で表すと，

$$P = P_0 + \frac{1}{2}\rho g\left(3h - \frac{V}{S}\right).$$

となるので，$P$ は $V$ に関して傾きが負の 1 次関数であり (オ) のグラフが適当とわかる．

(c)　気体のした仕事は $P - V$ 図の面積評価を行い（図略）[*4]，

$$\begin{aligned} W = \int_{2Sh}^{Sh} P\,dV &= \int_0^h P\frac{dV}{dx}\,dx \\ &= \int_0^h \left\{P_0 + \frac{1}{2}\rho g(h + x)\right\}(-S)\,dx \\ &= -P_0Sh - \frac{3}{4}\rho Sgh^2 \end{aligned}$$

と求まるので，気体のされた仕事 $W_4$ は，

$$W_4 = -W = \underline{P_0Sh + \frac{3}{4}\rho Sgh^2}.$$

(d)　過程 1 から 2 における吸熱量を $Q_{1\to2}$，過程 2，3 から 4 における吸熱量を $Q_{2,3\to4}$，過程 4 から 1 における吸熱量を $Q_{4\to1}$ とする．

$Q_{1\to2}$：問(1)(e)より，

$$Q_{1\to2} = \frac{5}{2}P_1Sh = \frac{5}{2}(P_0 + \rho gh)Sh.$$

$Q_{2,3\to4}$：ピストンのつりあい，および状態方程式より，

$$\begin{cases} 0 = P_4S - \left(P_0 + \dfrac{1}{2}\rho gh\right)S, \\ P_4 \cdot 2Sh = nRT_4 \end{cases} \qquad \therefore T_4 = \frac{2Sh}{nR}\left(P_0 + \frac{1}{2}\rho gh\right)$$

であるから，熱力学第 1 法則より，

$$\begin{aligned} Q_{2,3\to4} &= \varDelta U + W \\ &= \frac{3}{2}nR\left\{\frac{2Sh}{nR}\left(P_0 + \frac{1}{2}\rho gh\right) - \frac{2Sh}{nR}(P_0 + \rho gh)\right\} + 0 \\ &= -\frac{3}{2}\rho Sgh^2. \end{aligned}$$

[*4] 置換積分の因子について：$\dfrac{dV}{dx} = \dfrac{d}{d}x\{S(2h - x)\} = -S$.

$Q_{4\to 1}$：熱力学第 1 法則より，

$$\begin{aligned}
Q_{4\to 1} &= \mathit{\Delta} U + W \\
&= \frac{3}{2} nR \left\{ \frac{Sh}{nR} \left( P_0 + \rho g h \right) - \frac{2Sh}{nR} \left( P_0 + \frac{1}{2} \rho g h \right) \right\} - P_0 Sh - \frac{3}{4} \rho S g h^2 \\
&= -\frac{5}{2} P_0 Sh - \frac{3}{4} \rho S g h^2 \,.
\end{aligned}$$

以上より，

$$Q_{\mathrm{c}} = Q_{1\to 2} + Q_{2,3\to 4} + Q_{4\to 1} = \frac{1}{4} \rho S g h^2 \,.$$