1 非等速円運動，動く座標系（回転座標系）

【メモ】

・非等速円運動は，以下 2 式を立式．

$$\begin{cases} \text{運動方程式（中心成分）} \\ \text{力学的エネルギー保存則} \end{cases}$$

・問(2)，問(3)は単振動の時間追跡に関する問題．等加速度運動，単振動は時間追跡とエネルギー収支のいずれでも解析できる運動である．

・遠心力は，角速度 ω で回転する回転座標系の回転軸から半径 r の位置にある物体（質量 m）に対し，座標系とともに回転する座標系内部において生じ，その大きさは $mr\omega^2$，向きは回転軸から遠ざかる向きである．

【解答】

問(1) (a) 公式より，最下点が基準であることに注意して，

$$U = \underline{mgR(1-\cos\theta)}\,.$$

(b) 物体，重力場からなる系の力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + 0 \qquad \therefore v = \underline{\sqrt{{v_0}^2 - 2gR(1-\cos\theta)}}\,.$$

(c) v が最小値を取る最高点で $v>0$ であればよい[*1]．よって，

$$\sqrt{{v_0}^2 - 2gR(1-\cos\pi)} > 0 \qquad \therefore v > \underline{2\sqrt{gR}}\,(=v_1)\,.$$

問(2) (a) 角度 θ の位置にあるとき回転軸からの距離は $R\sin\theta$ である．よって，

$$F = \underline{mR\omega^2\sin\theta\cos\theta - mg\sin\theta}\,.$$

(b) $v = R\dfrac{d\theta}{dt}$ より，回転座標系内部における物体の加速度の接線成分は $\dfrac{dv}{dt} = R\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ である．運動方程式より，$|\theta| \ll 1$ ゆえ $\sin\theta \fallingdotseq \theta$，$\cos\theta \fallingdotseq 1$ と近似して，

$$mR\frac{d^2\theta}{dt^2} = mR\omega^2\sin\theta\cos\theta - mg\sin\theta \fallingdotseq mR\omega^2\theta - mg\theta$$

$$\therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{g}{R} - \omega^2\right)\theta\,.$$

*1 リングが変形しないので垂直抗力の大きさは常に 0 以上となり，軌道は円に拘束されている．

よって，$\dfrac{g}{R}-\omega^2$ が正であれば単振動を行うことがわかる．よって，単振動となるための ω の条件を考えて，

$$\frac{g}{R}-\omega^2>0 \qquad \therefore \omega<\underset{\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{g}{R}}}\,(=\omega_0)\,.$$

(c)　問(2)(b)より，単振動の角振動数は $\varOmega=\sqrt{\dfrac{g}{R}-\omega^2}$ である．よって，周期 T は，

$$T=\frac{2\pi}{\varOmega}=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{2\pi\sqrt{\frac{R}{g-R\omega^2}}}\,.$$

問(3)　(a)　$F=0$ を解いて[*2]，

$$mR\omega^2\sin\theta_0\cos\theta_0-mg\sin\theta_0=0$$
$$mR\omega^2\sin\theta_0\left(\cos\theta_0-\frac{g}{R\omega^2}\right)=0 \qquad \therefore \omega=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{g}{R\cos\theta_0}}}\,.$$

(b)　$\theta=\theta_0+\varepsilon\,(|\varepsilon|\ll 1)$ では，$\dfrac{d^2}{dt^2}(\theta_0+\varepsilon)=\dfrac{d^2\varepsilon}{dt^2}$，$\cos\theta_0=\dfrac{g}{R\omega^2}$，$\sin\theta_0=\dfrac{\sqrt{(R\omega^2)^2-g^2}}{R\omega^2}$，$\varepsilon^2\fallingdotseq 0$ より，

$$\begin{aligned}
mR\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}&=mR\omega^2\sin(\theta_0+\varepsilon)\cos(\theta_0+\varepsilon)-mg\sin(\theta_0+\varepsilon)\\
&=-mg\sin(\theta_0+\varepsilon)\left\{-\frac{R\omega^2}{g}\cos(\theta_0+\varepsilon)+1\right\}\\
&=-mg(\sin\theta_0\cos\varepsilon+\cos\theta_0\sin\varepsilon)\left\{-\frac{R\omega^2}{g}(\cos\theta_0\cos\varepsilon-\sin\theta_0\sin\varepsilon)+1\right\}\\
&\fallingdotseq -mg(\sin\theta_0\cdot 1+\cos\theta_0\cdot\varepsilon)\left\{-\frac{R\omega^2}{g}(\cos\theta_0\cdot 1-\sin\theta_0\cdot\varepsilon)+1\right\}\\
&=-mg\left(\frac{\sqrt{(R\omega^2)^2-g^2}}{R\omega^2}+\frac{g}{R\omega^2}\varepsilon\right)\left(-1+\frac{\sqrt{(R\omega^2)^2-g^2}}{g}+1\right)\\
\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}&=-\frac{(R\omega^2)^2-g^2}{(R\omega)^2}\varepsilon-\underbrace{\frac{g\sqrt{(R\omega^2)^2-g^2}}{(R\omega)^2}\varepsilon^2}_{\varepsilon^2\text{の項で無視}}\\
&\fallingdotseq -\frac{(R\omega^2)^2-g^2}{(R\omega)^2}\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

よって，$\omega>\sqrt{\dfrac{g}{R}}$，$|\varepsilon|\ll 1$ では角振動数 $\varOmega=\dfrac{\sqrt{(R\omega^2)^2-g^2}}{R\omega}$，振動中心 $\theta=\theta_0$ の単振動を行うため，(あ)は起こり得る．また，$\omega>\sqrt{\dfrac{g}{R}}$ では $\theta=0$ を中心とした微小な往復運動は起こ

[*2] $\sin\theta=0$ の解でない方の解を考える．

り得ないため (う) が不適切なものとなる．(い)については，(あ)における往復運動の振幅を大きくしていったときに起こる，折り返すことなく周回を行う軌道を表す．

2 荷電粒子の運動（静電場，静磁場），時間追跡（等加速度運動），等速円運動

【メモ】

・問(1)は等加速度運動の時間追跡に関する問題．等加速度運動，単振動は時間追跡とエネルギー収支のいずれでも解析できる運動である．・問(2)は等速円運動に関する問題．等速円運動は以下 2 式を立式．

$$\begin{cases} \text{運動方程式（中心成分）} \\ \text{つりあい（←使わないことも）} \end{cases}$$

【解答】

問(1) (a) 平行一様電場の公式より，

$$E = \frac{V_0}{d_1}\,.$$

よって，粒子の加速度は運動方程式より，

$$ma = qE = \frac{qV_0}{d_1} \qquad \therefore\ a = \frac{qV_0}{md_1}\,.$$

(b) 加速度一定より粒子の位置 y，および速度 v は，

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}\dfrac{qV_0}{md_1}t^2\,, v = \dfrac{qV_0}{md_1}t\,. \end{cases}$$

$y = d_1$ を解いて，

$$\frac{1}{2}\frac{qV_0}{md_1}t^2 = d_1 \qquad \therefore\ t = d_1\sqrt{\frac{2m}{qV_0}}\,,\quad v_1 = \sqrt{\frac{2qV_0}{m}}\,.$$

(c) 粒子のエネルギー収支より[*3*4]，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}m{v_n}^2 - \dfrac{1}{2}m{v_{n-1}}^2 = qV_0 \\ \dfrac{1}{2}m{v_{n-1}}^2 - \dfrac{1}{2}m{v_{n-2}}^2 = qV_0 \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{1}{2}m{v_2}^2 - \dfrac{1}{2}m{v_1}^2 = qV_0 \end{cases} \qquad \therefore\ v_n = \sqrt{{v_1}^2 + \frac{2qV_0}{m}(n-1)} = \sqrt{n}\,v_1\,.$$

(d) 電極板 D_{n-1} から D_n の区間，加速度は $\dfrac{qV_0}{md_n}$ で一定であり，電極板 D_{n-1} の位置を y_{n-1} とし，D_{n-1} を通過する瞬間の粒子の速度を v_{n-1}，この時刻を $\tau = 0$ と定める．すると，時

---

*3 粒子が電場からされる仕事：$W = qE\cdot d_n\cdot\cos 0 = q\dfrac{V_0}{d_n}d_n = qV_0\,.$

*4 力学的エネルギー保存則で考える場合：$\dfrac{1}{2}m{v_n}^2 + q(-nV_0) = \dfrac{1}{2}m{v_1}^2 + q(-V_0)\,.$

刻 τ における粒子の位置 y，および速度 v は，

$$\begin{cases} y = y_{n-1} + v_{n-1}\tau + \dfrac{1}{2}\dfrac{qV_0}{md_n}\tau^2\,, \\ v = v_{n-1} + \dfrac{qV_0}{md_n}\tau\,. \end{cases}$$

電極板 D_n を通過する瞬間の速さ v_n は $\sqrt{n}\,v_1$ であるから，題意より $\tau = t_1$ で $v = v_n$ を考えて[*5]，

$$\sqrt{n}\,v_1 = \sqrt{n-1}\,v_1 + \frac{qV_0}{md_n}\cdot d_1\sqrt{\frac{2m}{qV_0}}$$

$$\therefore d_n = \frac{d_1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} = \underline{(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})d_1}\,.$$

問(2) (a) 正電荷が時計回りの中心向きに力を受ければよいので，磁場は $\underline{z\text{ 軸正方向}}$ が正しい．

(b) 粒子のエネルギー収支より[*6]，

$$\frac{1}{2}m{u_1}^2 - \frac{1}{2}m{u_0}^2 = q\frac{V_0}{d}d\cos 0 = qV_0 \qquad \therefore u_1 = \underline{\sqrt{{u_0}^2 + \frac{2qV_0}{m}}}\,.$$

また，円運動の加速度は公式より，

$$b_1 = \frac{{u_1}^2}{r} = \underline{\frac{1}{r}\left({u_0}^2 + \frac{2qV_0}{m}\right)}\,.$$

(c) N 周目の粒子の速さ u_N は，粒子のエネルギー収支より[*7]，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}m{u_N}^2 - \dfrac{1}{2}m{u_{N-1}}^2 = qV_0 \\ \dfrac{1}{2}m{u_{N-1}}^2 - \dfrac{1}{2}m{u_{N-2}}^2 = qV_0 \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{1}{2}m{u_1}^2 - \dfrac{1}{2}m{u_0}^2 = qV_0 \end{cases} \qquad \therefore u_N = \sqrt{{n_0}^2 + \frac{2qV_0}{m}N}\,.$$

よって，周回に要する時間 T_N は，

$$T_N = \frac{2\ell}{u_N} + \frac{2\pi r}{u_N} = \underline{\frac{2(\ell+\pi r)}{\sqrt{{u_0}^2 + \frac{2qV_0}{m}N}}}\,.$$

また，運動方程式（中心成分）より，

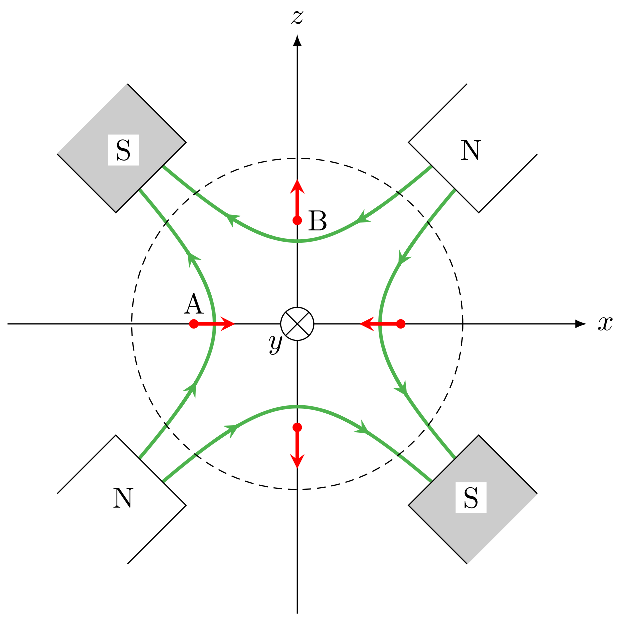
$$m\frac{{u_N}^2}{r} = qu_NB_N \qquad \therefore B_N = \underline{\frac{m}{qr}\sqrt{{u_0}^2 + \frac{2qV_0}{m}N}}\,.$$

[*5] $y_n = d_n + y_{n-1}$ を満たす時刻が $\tau = t_1$ としてもよい．このとき，${d_n}^2 - 2\sqrt{n-1}\,d_1d_n - {d_1}^2 = 0$ の 2 次方程式を解くこととなる．

[*6] 力学的エネルギー保存則：$\dfrac{1}{2}m{u_1}^2 + q(-V_0) = \dfrac{1}{2}m{u_0}^2 + Q\cdot 0$．

[*7] 力学的エネルギー保存則で考える場合：$\dfrac{1}{2}m{u_N}^2 + q(-nV_0) = \dfrac{1}{2}m{n_0}^2 + q\cdot 0$．

問(3) (a)　磁力線は緑色の線，各点で生じる力は赤色の矢印で示した（後の設問のため 4 点図示してある）．



(b)　前問に示した．

(c)　荷電粒子にはたらく力は上図のようになる．よって，荷電粒子の分布は (イ) のようになる．

3　波の式（定常波），ドップラー効果の公式導出（波の式）

【メモ】

・波の式は日本語で整理しながら立式するのが良い．

・ドップラー効果は，大きく分けて公式導出問題と公式を使い問題に分類でき，この問題は両方に問題に属する．公式導出は時系列を考える方法である．

【解答】

問(1)　(a)　波の基本式より，

$$\lambda = \frac{V}{f}\,.$$

(b)　n を整数とする．固定端ゆえ境界（位置 $x=d$）での変位は恒等的に 0 となり，

$$\begin{aligned} 0 &= F + F_{\mathrm{R}} \\ &= A\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{d}{V}\right)\right\} - A\sin\left\{2\pi f\left(t+\frac{d-a}{V}\right)\right\} \end{aligned}$$

$$\therefore -\frac{2\pi f}{V}d = \frac{2\pi f}{V}(d-a) + 2\pi n$$

$$\therefore a = 2d + n\lambda\,.$$

(c)　生じる合成波は，

$$\begin{aligned} y &= F + F_{\mathrm{R}} \\ &= A\sin\left\{2\pi f\left(t-\frac{x}{V}\right)\right\} - A\sin\left\{2\pi f\left(t+\frac{x-2d}{V}\right)+2\pi n\right\} \\ &= \underbrace{-2A\sin\left\{\frac{2\pi f}{V}(x-d)\right\}}_{\substack{\text{各点の振動の幅を表す因子} \\ \text{（この因子の絶対値が振幅）}}} \underbrace{\cos\left\{2\pi f\left(t-\frac{d}{V}\right)\right\}}_{-1\sim 1\ \text{の間で振動する因子}} \end{aligned}$$

となり，定常波が観測される．よって，振幅は，

$$A_{\mathrm{S}} = 2A\left|\sin\left\{\frac{2\pi f}{V}(x-d)\right\}\right|\,.$$

(d)　任意の時刻 t で $A_{\mathrm{S}}=0$ となる点が，$0<x<d$ の範囲で存在すればよいので，

$$\begin{cases} \dfrac{2\pi f}{V}(x-d) = n\pi\,, \\ 0 < x < d \end{cases} \qquad \therefore -\frac{2f}{V} < n < 0$$

を満たす n が 1 つ以上存在するために，$-\dfrac{2fd}{V} \leq -1$ となればよい．よって，

$$-\frac{2fd}{V} \leq -1 \qquad \therefore\, d \geq \frac{V}{2f}\,.$$

問(2) (a) 速度の定義より，

$$x = x_0 + u\Delta t\,.$$

(b) 与式 F に $t = t_0 + \Delta t$，$x = x_0 + u\Delta t$ を代入して，

$$F' = A\sin\left\{2\pi f\left(t_0 + \Delta t - \frac{x_0 + u\Delta t}{V}\right)\right\}.$$

(c) 時刻 $t = t_0$ における観測者 P の位置を $x_\mathrm{P} = x_0$ とすると，時刻 t における P の位置 x_P は，

$$x_\mathrm{P} = x_0 + u(t - t_0)$$

と書けるので，時刻 $t = t_0 + \Delta t$ では，

$$x_\mathrm{P} = x_0 + u\Delta t\,.$$

したがって，

$$\left(\begin{array}{c}\text{時刻 } t_0 + \Delta t \text{ における}\\ \text{位置 } x_\mathrm{P} \text{での波の変位}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{時刻 } x_\mathrm{P}/V \text{ 過去の}\\ \text{原点での波の変位}\end{array}\right)$$

より，

$$\begin{aligned}
F_\mathrm{P}(t_0 + \Delta t, x_\mathrm{P}) &= A\sin\left\{2\pi f\left(t_0 + \Delta t - \frac{x_0 + u\Delta t}{V}\right)\right\}\\
&= A\sin\left\{2\pi f\left(t_0 + \Delta t - \frac{x_0 + u(t_0 + \Delta t) - ut_0}{V}\right)\right\}\\
&= A\sin\left[2\pi f\left\{\left(1 - \frac{u}{V}\right)(t_0 + \Delta t) - \frac{x_0 - ut_0}{V}\right\}\right]\\
&= A\sin\left\{2\pi \underbrace{\left(1 - \frac{u}{V}\right)f}_{=f'}\left(t_0 + \Delta t - \frac{x_0 - ut_0}{V - u}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

よって，P の観測する波の振動数は $f' = \left(1 - \dfrac{u}{V}\right)f$ であり，P に対する相対的な音速は $V - u$ であることがわかる．

問(3) (a)　余弦定理より，

$$
\begin{aligned}
r^2 &= {r_0}^2 + (u\Delta t)^2 - 2r_0 u\Delta t\cos(\pi - \theta_0) \\
&\fallingdotseq {r_0}^2 + 2r_0 u\Delta t\cos\theta_0 \\
\therefore r &= \sqrt{{r_0}^2 + 2r_0 u\Delta t\cos\theta_0} \\
&= r_0\sqrt{1 + \frac{2u\cos\theta_0}{r_0}\Delta t} \\
&\fallingdotseq r_0 + u\Delta t\cos\theta_0\,.
\end{aligned}
$$

(b)　与式より，与式 F に $t = t_0 + \Delta t$，$r = r_0 + u\Delta t\cos\theta_0$ を代入して，

$$
F_r' = A\sin\left\{2\pi f\left(t_0 + \Delta t - \frac{r_0 + u\Delta t\cos\theta_0}{V}\right)\right\}.
$$

(c)　問(2)(c)同様に，

$$
\begin{aligned}
F_r'(t_0 + \Delta t, r_{\mathrm{P}}) &= A\sin\left\{2\pi f\left(t_0 + \Delta t - \frac{r_0 + u\Delta t\cos\theta}{V}\right)\right\} \\
&= A\sin\left\{2\pi f\left(t_0 + \Delta t - \frac{r_0 + u(t_0 + \Delta t)\cos\theta_0 - ut_0\cos\theta}{V}\right)\right\} \\
&= A\sin\left[2\pi f\left\{\left(1 - \frac{u\cos\theta}{V}\right)(t_0 + \Delta t) - \frac{r_0 - ut_0\cos\theta}{V}\right\}\right] \\
&= A\sin\left\{2\pi \underbrace{\left(1 - \frac{u\cos\theta}{V}\right) f}_{=f'}\left(t_0 + \Delta t - \frac{r_0 - ut_0\cos\theta}{V - u\cos\theta}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore f' = \left(1 - \frac{u}{V}\cos\theta\right) f\,.
$$

また，$\dfrac{f'}{f} = 1 - \dfrac{u}{V}\cos\theta$ を $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で図示すれば以下のようになる．