$\boxed{1}$ 単振動（エネルギー，時間追跡），等加速度運動（時間追跡），動く座標系

【メモ】

・等加速度運動，単振動は時間追跡とエネルギー収支のいずれでも解析できる運動である．問(1)では単振動のエネルギー[*1]，問(2)では動く座標系内部における等加速度運動の時間追跡，問(3)は等加速度運動，および単振動の時間追跡である．

・解答は物体のエネルギー収支で作成したが，力学的エネルギー収支を考えてもよい．エネルギーを論じる際はどこまでを 1 つの系と見做すかに意識を向ける．

【解答】

問(1) (a) つりあいより，

$$m\cdot 0=-kx_0+mg\sin\theta \qquad \therefore x_0=\frac{mg}{k}\sin\theta\,.$$

(b) 物体のエネルギー収支より，

$$\frac{1}{2}mV^2-\frac{1}{2}m\cdot 0^2=mg\ell_0\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}_{=\sin\theta} \qquad \therefore V=\sqrt{2g\ell_0\sin\theta}\,.$$

(c) 始状態の位置を x_{ini}，終状態の位置を x_{fin} とする．物体のエネルギー収支を計算して，

$$\begin{aligned}K_{\text{fin}}-K_{\text{ini}}&=\int_{x_{\text{ini}}}^{x_{\text{fin}}}(-kx+mg\sin\theta)\,dx\\&=-\frac{1}{2}k{x_{\text{fin}}}^2+mgx_{\text{fin}}\sin\theta+\frac{1}{2}k{x_{\text{ini}}}^2-mgx_{\text{ini}}\sin\theta\end{aligned}$$

$$\therefore K_{\text{fin}}+\underbrace{\frac{1}{2}k{x_{\text{fni}}}^2-mgx_{\text{fni}}\sin\theta}_{=U_{\text{fin}}}=K_{\text{ini}}+\underbrace{\frac{1}{2}k{x_{\text{ini}}}^2-mgx_{\text{ini}}\sin\theta}_{=U_{\text{ini}}}$$

となる．よって，位置エネルギーは，

$$U=\frac{1}{2}kx^2-mgx\sin\theta\,.$$

[*1] 時間追跡でもよいが手間である．

(d)　折り返しゆえ $v=0$ より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2-\frac{1}{2}m\left(\sqrt{2g\ell_0\sin\theta}\right)^2=\int_0^x(-kx+mg\sin\theta)\,dx$$

$$-mg\ell_0\sin\theta=-\frac{1}{2}kx^2+mgx\sin\theta$$

$$x^2-\underbrace{\frac{2mg}{k}\sin\theta}_{=2x_0}x-\underbrace{\frac{2mg}{k}\sin\theta}_{=2x_0}\ell_0=0$$

$$\therefore x=\frac{mg}{k}\sin\theta\left(1+\sqrt{1+\frac{2k\ell_0}{x_0}}\right).$$

問(2)　(a)　台固定系でのつりあいより[*2]，

$$\begin{cases} m\cdot 0=-kd+mg\sin\phi+mA\cos\phi\,, \\ m\cdot 0=-mg\cos\phi+mA\sin\phi \end{cases}\qquad \therefore A=\frac{g}{\tan\phi}\,,\quad d=\frac{mg}{k\sin\phi}\,.$$

(b)　台固定系（水平右向きに X 軸，鉛直上向きに Y 軸を定める）における物体の運動方程式より，台に対する物体の相対加速度は，

$$\begin{cases} m\ddot{X}=mA\,, \\ m\ddot{Y}=-mg \end{cases}\qquad \begin{cases} \ddot{X}=A\,, \\ \ddot{Y}=-g \end{cases}$$

と求まり，糸が切れた時刻を $t=0$ とすると相対初速度は $\dot{X}(0)=0$，$\dot{Y}(0)=0$ となり，相対初期位置を $X(0)=Y(0)=0$ と取れば，

$$\begin{cases} X(t)=\dfrac{1}{2}At^2\,, \\ Y(t)=-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}\qquad \therefore Y=-\frac{g}{A}X$$

となり (う) のグラフが適当．

問(3)　(a)　運動方程式より，

$$\begin{cases} ma=mg\sin\theta+\mu N\,, \\ m\cdot 0=N-mg\cos\theta \end{cases}\qquad \therefore a=g(\sin\theta+\mu\cos\theta)\,.$$

(b)　物体のエネルギー収支より，

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2-\frac{1}{2}m{v_0}^2=mg\ell_1\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\mu mg\cos\theta\ell_1\cos\pi$$

$$=-mg\ell_1(\sin\theta+\mu\cos\theta)$$

$$\therefore \ell_1=\frac{{v_0}^2}{2g(\sin\theta+\mu\cos\theta)}=\frac{{v_0}^2}{2a}\,.$$

[*2] 地面固定系での運動方程式：$\begin{cases} m(-A)=-kd\cos\phi\,, \\ m\cdot 0=kd\sin\phi-mg\,. \end{cases}$

(c)　物体のエネルギー収支より，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 &= mg\ell_1\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + \mu N\ell_1\cos\pi \\
&= mg\frac{{v_0}^2}{2g(\sin\theta+\mu\cos\theta)}(\sin\theta-\mu\cos\theta) \\
\therefore v &= v_0\sqrt{\frac{\sin\theta-\mu\cos\theta}{\sin\theta+\mu\cos\theta}}\,(=v_1)\,.
\end{aligned}
$$

(d)　物体のエネルギー収支より，

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}m\cdot 0^2 - \frac{1}{2}m{v_{N-1}}^2 = -mg\ell_N\sin\theta - \mu mg\ell_N\cos\theta\,, \\
&\frac{1}{2}m{v_N}^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = mg\ell_N\sin\theta - \mu mg\ell_N\cos\theta
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\therefore v_N = \sqrt{2g(\sin\theta-\mu\cos\theta)\ell_N} = v_{N-1}\sqrt{\frac{\sin\theta-\mu\cos\theta}{\sin\theta+\mu\cos\theta}} = \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^N v_0\,.
$$

(e)　$v_N = \left(\dfrac{v_1}{v_0}\right)^N v_0$ より，$N\to\infty$ で $v_N\to 0$ となり，このとき $\ell_N\to 0$ である[*3]．$v_N=0$ となった時刻を $t=0$ としたとき，$v(0)=0$，$x(0)=0$ である．摩擦のない面における物体の運動方程式は，

$$
m\ddot{x} = -kx + mg\sin\theta \qquad \therefore \ddot{x} = -\frac{mg}{k}\left(x - \frac{mg}{k}\sin\theta\right)
$$

となり，物体の位置 x は位置 $x=\dfrac{mg}{k}\sin\theta$ を中心に単振動を行い，初期条件を考慮すれば時刻 t における物体の位置 x は

$$
x = \frac{mg}{k}\sin\theta\left\{1-\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\right\}
$$

と表され，$x<0$ に到達することはない．よって，グラフは (ア) が適当．

[*3] $\ell_N = \dfrac{{v_N}^2}{2g(\sin\theta-\mu\cos\theta)}$ より．

2 $\boldsymbol{vB\ell}$ 公式の電磁誘導，単振動

【メモ】

・回路の一部が動く電磁誘導は，誘導起電力の決定では $vB\ell$ の公式が基本となる．また，磁場が仕事をしないことにより，誘導起電力の仕事（仕事率）とアンペール力のする仕事（仕事率）は相殺する．

・電磁誘導の問題は，①誘導起電力の決定，②回路の議論，③運動の議論，④エネルギーの議論，という作りが基本．

・単振動に関する問題．等加速度運動，単振動は時間追跡とエネルギー収支のいずれでも解析できる運動である．

【解答】

問(1) (a) キルヒホッフ則より，

$$V - RI = 0 \qquad \therefore I = \underset{\sim\sim}{\frac{V}{R}}, \quad F_0 = -IB\ell = \underset{\sim\sim\sim\sim}{-\frac{VB\ell}{R}}.$$

(b) キルヒホッフ則，および導体棒のつりあいより，

$$\begin{cases} V - RI = 0, \\ m \cdot 0 = -kx_0 - IB\ell \end{cases} \qquad \therefore x_0 = \underset{\sim\sim\sim\sim}{-\frac{VB\ell}{kR}}.$$

問(2) キルヒホッフ則，電流の定義，および導体棒の運動方程式は，

$$\begin{cases} vB\ell + \dfrac{Q}{C} = 0, \\ I = -\dfrac{dQ}{dt}, \\ ma = -kx - IB\ell. \end{cases}$$

(a) 公式，およびキルヒホッフ則より，

$$V_1 = \underset{\sim\sim\sim}{vB\ell}, \quad Q = \underset{\sim\sim\sim\sim}{-CvB\ell}.$$

(b) 物体，ばね，コンデンサからなる系の力学的エネルギーは，

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{Q^2}{2C} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}C(vB\ell)^2}.$$

(c) 力学的エネルギー保存則より，

$$E = \frac{1}{2}\{m + C(B\ell)^2\}v^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

と書け，質量 $m+C(B\ell)^2$，ばね定数 k のばね振り子と見做せる．したがって，振動の周期 T は，

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{m+C(B\ell)^2}}} = \utilde{2\pi\sqrt{\frac{m+C(B\ell)^2}{k}}}\,.$$

問(3)　キルヒホッフ則，および導体棒の運動方程式より，

$$\begin{cases} vB\ell - L\dfrac{dI}{dt} = 0\,, \\ ma = -kx - IB\ell\,. \end{cases}$$

(a)　キルヒホッフ則より，

$$V_2 = |vB\ell| = \utilde{L\left|\frac{\Delta I}{\Delta t}\right|}\,.$$

(b)　キルヒホッフ則より，

$$L\frac{\Delta I}{\Delta t} = B\ell\frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \therefore \Delta I = \underbrace{\utilde{\frac{B\ell}{L}}}_{=c}\Delta x\,.$$

(c)　$t=0$ で $I(0)=0$（コイルの性質：電流の連続性），$x(0)=x_1$ であり，前問より，

$$\begin{aligned} I(t) - I(0) &= \frac{B\ell}{L}\{x(t) - x(0)\} \\ I &= \frac{B\ell}{L}(x - x_1) \qquad \therefore \alpha = \utilde{\frac{B\ell}{L}}\,, \quad \beta = \utilde{x_1}\,. \end{aligned}$$

(d)　$I = \dfrac{B\ell}{L}(x - x_1)$ より，

$$F = -kx - \frac{(B\ell)^2}{L}(x - x_1) = \utilde{-\left\{k + \frac{(B\ell)^2}{L}\right\}\left(x - \frac{(B\ell)^2}{kL+(B\ell)^2}x_1\right)}\,.$$

(e)　運動方程式より導体棒は角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{kL+(B\ell)^2}{mL}}$，振動中心 $x = \dfrac{(B\ell)^2}{kL+(B\ell)^2}x_1\ (= x_{\mathrm{c}})$ の単振動を行い，その位置 x，および速度 v は未知定数 C，D を用いれば

$$\begin{cases} x = x_{\mathrm{c}} + C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)\,, \\ v = \omega C\cos(\omega t) - \omega D\sin(\omega t) \end{cases}$$

と書ける．初期条件 $x(0)=x_1$，$v(0)=0$ より，

$$\begin{cases} x_1 = x_{\mathrm{c}} + C\sin 0 + D\cos 0\,, \\ 0 = \omega C\cos 0 - \omega D\sin 0 \end{cases} \qquad \therefore C = 0\,,\quad D = x_1 - x_{\mathrm{c}}\,.$$

よって，

$$\begin{cases} x = x_{\mathrm{c}} + (x_1 - x_{\mathrm{c}})\cos(\omega t)\,, \\ v = -\omega(x_1 - x_{\mathrm{c}})\sin(\omega t) \end{cases}$$

であり，$\omega = \sqrt{\dfrac{kL + (B\ell)^2}{mL}}$，$x_{\mathrm{c}} = \dfrac{(B\ell)^2}{kL + (B\ell)^2}x_1$ と戻せば[*4]，

$$\begin{aligned} I &= \frac{B\ell}{L}\left[\left\{\frac{(B\ell)^2}{kL + (B\ell)^2}x_1 + \frac{kL}{kL + (B\ell)^2}x_1\cos\left(\sqrt{\frac{kL + (B\ell)^2}{mL}}\,t\right)\right\} - x_1\right] \\ &= \frac{B\ell}{L}\left[\frac{kL}{kL + (B\ell)^2}x_1\left\{-1 + \cos\left(\sqrt{\frac{kL + (B\ell)^2}{mL}}\,t\right)\right\}\right] \\ \therefore |I|_{\max} &= -\underline{\frac{2kB\ell x_1}{kL + (B\ell)^2}}\,. \end{aligned}$$

【補足】問(2)を運動方程式から確認

キルヒホッフ則，および運動方程式は，

$$\begin{cases} vB\ell + \dfrac{Q}{C} = 0\,, \\ ma = -kx - IB\ell\,. \end{cases}$$

キルヒホッフ則の両辺を t で微分して，

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{dv}{dt}CB\ell = aCB\ell\,.$$

よって，運動方程式より，

$$ma = -kx - aC(B\ell)^2$$

$$\{m + C(B\ell)^2\}a = -kx \qquad \therefore a = -\frac{k}{m + C(B\ell)^2}x$$

となり，角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m + C(B\ell)^2}}$，振動中心 $x = 0$ の単振動を行うことがわかる．

なお，電磁誘導において，コンデンサは仮想的な質量の増加に，コイルは仮想的なばね定数の増加に寄与することは覚えておくとよい．

[*4] $x_1 < 0$ に注意．

3 波（干渉），原子（ブラッグ干渉）

【メモ】

・前半は光波の干渉に関する問題．後半は X 線の干渉．干渉条件は m を整数として，

$$(\text{位相差}) = \begin{cases} 2m\pi & (\text{強め合い}), \\ (2m-1)\pi & (\text{弱め合い}) \end{cases}$$

と計算するようにする．位相差は $\dfrac{2\pi}{\lambda}$（経路差）に反射による位相のずれを加減すればよい[*5]．

【解答】

問(1) (a) (i) 経路差は図より，

$$\begin{aligned} \mathit{\Delta} L = L_2 - L_1 &= \sqrt{L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)} - \sqrt{L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)} \\ &= L\left\{\sqrt{1 + \left(\frac{x + d/2}{L}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{x - d/2}{L}\right)^2}\right\} \\ &\fallingdotseq L\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x + d/2}{L}\right)^2 - 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x - d/2}{L}\right)^2\right\} \\ &= \frac{xd}{L}. \end{aligned}$$

(ii) 位相差が 2π の整数倍となるとき強め合い，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{a_k d}{L} = 2\pi k \qquad \therefore a_k = \frac{L\lambda}{d}k.$$

(iii) 原点に最も近い $x > 0$ の位置で観測される暗線の位相差は π ゆえ，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{bd}{L} = \pi \qquad \therefore b = \frac{L\lambda}{2d}.$$

(b) 板 F を置く前，原点 O では位相差 0 の 2 つの波の合成波が観測され，その振幅は $2E_0$ である．原点 O で観測されていた光強度は比例定数を k とすれば，

$$I_0 = k(2E_0)^2 = 4k{E_0}^2.$$

さて，位置 $x = a_1$ において 2 つの波は同位相であり，観測される波の振幅は $E_0 + rE_0$ となる．翻って，位置 $x = b$ では 2 つの波の位相差は π（逆位相）であり，観測される波の振幅

[*5] 屈折率 n の媒質中では波長 λ を $\dfrac{\lambda}{n}$ とする．

は $E_0 - rE_0$ となる．したがって，

$$I(a_1) = k(E_0 + rE_0)^2 = \frac{I_0}{4{E_0}^2}(1+r)^2{E_0}^2 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\left(\frac{1+r}{2}\right)^2} I_0\,,$$

$$I(b) = k(E_0 - rE_0)^2 = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\left(\frac{1-r}{2}\right)^2} I_0\,.$$

問(2) (a) (i) 経路差は図より，

$$\Delta\ell = \underset{\sim\sim\sim}{2D\sin\theta}\,.$$

(ii) 位相差が 2π の整数倍となるとき強め合い，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2D\sin\theta = 2\pi m \qquad \therefore\ \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{2D\sin\theta = m\lambda}\,.$$

(b) このとき経路差は $\dfrac{2D}{\sqrt{2}}$ となり，問(2)(a)と同様に考えれば，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2\frac{D}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\pi m \qquad \therefore\ D = m\lambda = m\times 1.54\times 10^{-10}\,\mathrm{m}\,.$$

よって，$2.0\times 10^{-10}\,\mathrm{m} < D < 4.0\times 10^{-10}\,\mathrm{m}$ より，

$$\underbrace{\frac{2.0}{1.54}}_{=1.\cdots} < m < \underbrace{\frac{4.0}{1.54}}_{=2.\cdots} \qquad \therefore\ m = 2\,.$$

以上より，

$$D = 2\times 1.54\times 10^{-10}\,\mathrm{m} \fallingdotseq \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{3.1\times 10^{-10}\,\mathrm{m}}\,.$$

(c) 観測される X 線の強度 I は，原子 A のみからなる格子面からの散乱 X 線 X_1 と格子面 B のみからなる格子面からの散乱 X 線 X_2 の合成波の振幅を A，比例定数を k としたとき，

$$I = kA^2$$

となる．位相差が π の奇数倍（逆位相）となる方向での観測強度を I_{odd}，位相差が π の偶数倍（同位相）となる方向での観測強度を I_{even} とするとき，

$$I_{\mathrm{odd}} = k(A_1 - A_2)^2 = k(1-r)^2{A_1}^2\,,$$
$$I_{\mathrm{even}} = k(A_1 + A_2)^2 = k(1+r)^2{A_1}^2$$

である[*6]．このことから奇数倍の方向では弱い強め合い，偶数倍の方向では強い強め合いが観測される．$\theta > 0$ より位相差は 0 より大きな値を取ることから，最初に観測されるピーク（強

[*6] 詳しい話は【進んだ補足】を参照.

め合う位置）は位相差が π のときで，

$$\frac{2\pi}{\lambda}\Delta\ell' = \pi \qquad \therefore \Delta\ell' = \underset{\sim}{\frac{\lambda}{2}}.$$

(d)　以上のように，位相差が π の奇数倍では弱い強め合い，偶数倍では強い強め合いが観測される．すなわち，まず初めに位相差が π で弱い強め合いが観測され，次に 2π で強い強め合いが観測される．後は適当な範囲までこの繰り返しである．よって，(オ) のグラフが適当．

【進んだ補足】問(2)2(c)，(d)について，グラフの導出まで

以下の手順でグラフの導出を行う．

① 各格子面のみだけの状況を考え，その格子面からの散乱 X 線の合成波を求める．
② 各格子面のみだけの状況を考え，散乱 X 線の観測される方向の強度分布を調べる．
③ 以上を踏まえ，両格子面からの散乱 X 線の合成波を考えることで，観測される強度分布を得る．

やや計算が長いので，計算を追う人は根気よく付いて来てほしい．

■各格子面のみだけの合成波を求める

まず，原子 A のみからなる格子面（格子面 A と呼ぶ）による散乱 X 線の合成波 Y_{A}，原子 B のみからなる格子面（格子面 B と呼ぶ）による散乱 X 線の合成波 Y_{B} を求めよう．

図に従い，等間隔 D で N 層（N は十分大きい）の原子面からなる場合を考える．1 層目の原子面から θ 方向の観測点 P に届く X 線の振動を

$$y_1 = A\sin(\omega t)$$

と表すと，$k = 1, 2, \cdots, N$ 層目の原子面から点 P に届く X 線の振動は，$2\delta = \dfrac{2\pi}{\lambda}\cdot 2D\sin\theta$ として[*7*8]，

$$y_k = A\sin\{\omega t - 2(k-1)\delta\}$$

と表される．

点 P で観測される合成波は，y_k の $k=1$ から N までの総和であるから，

$$y_{\mathrm{P}} = \sum_{k=1}^{N} y_k = \sum_{k=1}^{N} A\sin\{\omega t - 2(k-1)\delta\}$$

[*7] 経路差は $2D\sin\theta$.
[*8] 後の計算の煩雑さを回避するために 2δ と置いている．

を計算すればよい．ここで[*9]，

$$
\begin{aligned}
2\sin\delta\sum_{k=1}^{N}y_k &= A\sum_{k=1}^{N}\left[-\cos\{\omega t-2(k-1)\delta+\delta\}+\cos\{\omega t-2k\delta+\delta\}\right] \\
&= A\left\{-\cos(\omega t+\delta)+\cos(\omega t-2N\delta+\delta)\right\} \\
&= 2A\sin(N\delta)\sin\{\omega t-(N-1)\delta\} \\
\therefore \sum_{k=1}^{N}y_k &= A\frac{\sin(N\delta)}{\sin\delta}\sin\{(\omega t-(N-1)\delta)\}
\end{aligned}
$$

より，

$$
y_{\mathrm{P}} = A\frac{\sin(N\delta)}{\sin\delta}\sin\{\omega t-(N-1)\delta\}
$$

となる．よって，格子面 A による散乱 X 線の振幅を $A\,(>0)$，格子面 B による散乱 X 線の振幅を $B\,(0<B<A)$ とし，格子面 A による波と格子面 B による波の位相差が $\dfrac{2\pi}{\lambda}D\sin\theta\,(=\delta)$ であることを考慮すれば，Y_{A}，Y_{B} はそれぞれ以下のように書ける．

$$
\begin{aligned}
Y_{\mathrm{A}} &= A\frac{\sin(N\delta)}{\sin\delta}\sin\{\omega t-(N-1)\delta\}, \\
Y_{\mathrm{B}} &= B\frac{\sin(N\delta)}{\sin\delta}\sin\{\omega t-(N-1)\delta+\delta\}.
\end{aligned}
$$

■各格子面だけの X 線強度を考え，各格子面から散乱され観測される合成 X 線の分布を調べる

まず，格子面 A のみの場合を考える．観測される X 線強度 $I^{(\mathrm{A})}$ は振幅の 2 乗に比例し，その比例定数を k_{A} とすると，

$$
I^{(\mathrm{A})} = k_{\mathrm{A}}\left\{A\frac{\sin(N\delta)}{\sin\delta}\right\}^2
$$

と表される．$\delta=0$ での観測強度を $I_0^{(\mathrm{A})}$ とすると，

$$
I_0^{(\mathrm{A})} = \lim_{\delta\to 0}k_{\mathrm{A}}A^2\left\{\frac{\sin(N\delta)}{\sin\delta}\right\}^2 = k_{\mathrm{A}}(AN)^2\lim_{\delta\to 0}\frac{\sin^2(N\delta)}{(N\delta)^2}\frac{\delta^2}{\sin^2\delta} = k_{\mathrm{A}}(AN)^2
$$

より，$I^{(\mathrm{A})}$ を $I_0^{(\mathrm{A})}$ で規格化すれば，

$$
\frac{I^{(\mathrm{A})}}{I_0^{(\mathrm{A})}} = \left\{\frac{\sin(N\delta)}{N\sin\delta}\right\}^2 \qquad \therefore I^{(\mathrm{A})} = \left\{\frac{\sin(N\delta)}{N\sin\delta}\right\}^2 I_0^{(\mathrm{A})}
$$

[*9] 以下の恒等式を用いた．

$$
2\sin\{\omega t-2(k-1)\delta\}\sin\delta = -\cos\{\omega t-2(k-1)\delta+\delta\}+\cos(\omega t-2k\delta+\delta).
$$

となる．

さて，$\delta \neq m\pi$ のとき，十分大きな N では $N \to \infty$ を計算して，

$$\frac{I^{(\mathrm{A})}}{I_0^{(\mathrm{A})}} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \underbrace{\left\{\frac{\sin N\delta}{\sin\delta}\right\}^2}_{\leq 1} = 0 \qquad \therefore I^{(\mathrm{A})} = 0$$

となり，$\delta \neq m\pi$ の方向では格子面 A による散乱 X 線は弱め合い観測されない（図 2）．

続いて，$\delta = m\pi$ のときを考える．この場合，$\delta = m\pi$ では $\dfrac{0}{0}$ で不定形となってしまうため $\delta = m\pi + \varepsilon\,(|\varepsilon| \ll 1)$ としてから最終結果に $\varepsilon \to 0$ と取ることを考える．このとき，$\sin\delta = \pm\sin\varepsilon \fallingdotseq \pm\varepsilon$，$\sin(N\delta) = \pm\sin(N\varepsilon)$ であり，$\varepsilon \to 0$ の極限を考え，

$$\frac{I^{(\mathrm{A})}}{I_0^{(\mathrm{A})}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\sin(N\delta)}{N\sin\delta}\right\}^2 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\pm\sin(N\varepsilon)}{\pm N\sin\varepsilon}\right\}^2 \fallingdotseq \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\sin N\varepsilon}{N\varepsilon}\right\}^2 = 1 \qquad \therefore I^{(\mathrm{A})} = I_0^{(\mathrm{A})}$$

となり，$\delta = m\pi$ の方向では格子面 A による散乱 X 線の鋭いピークが観測されることがわかる（図 2）．

格子面 B についても同様であり，それぞれの観測強度 $I^{(\mathrm{A})}$，$I^{(\mathrm{B})}$ を $\delta = 0$ での観測強度 $I_0^{(\mathrm{A})}$，$I_0^{(\mathrm{B})}$ で割った値は図 1，図 2 のようになる（上付き添え字の $^{(\mathrm{A})}$，$^{(\mathrm{B})}$ は省略している）．

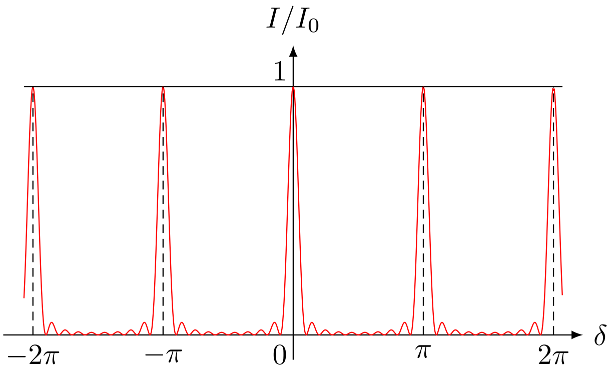

図 1　1 種類のみ：$N = 10$ の場合

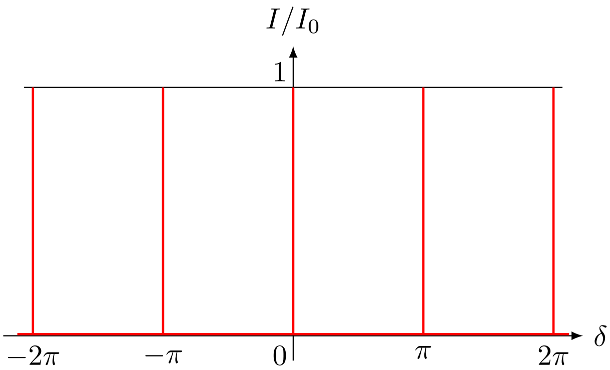

図 2　1 種類のみ：N が十分大きい場合

■両格子面からの X 線の合成波を計算する

以上の結果を用いて，両格子面からの散乱 X 線の干渉を考える．文字指定をあわせる場合 $A = A_1$，$B = RA_1$ とすればよい．

前提として，格子面 A，B からの散乱 X 線は $\delta = \dfrac{2\pi}{\lambda}D\sin\theta = m\pi$ を満たす角度 θ 方向のみで観測され，それ以外の方向では各々の X 線の干渉によって弱め合い観測されない．

時刻 t において，格子面 A による散乱 X 線の合成波 Y_{A}，格子面 B による散乱 X 線の合成波 Y_{B} はそれぞれ以下のように書けた．

$$
\begin{aligned}
Y_{\mathrm{A}} &= A\frac{\sin(N\delta)}{\sin\delta}\sin\{\omega t-(N-1)\delta\} = cA\sin(\omega t-\theta),\\
Y_{\mathrm{B}} &= B\frac{\sin(N\delta)}{\sin\delta}\sin\{\omega t-(N-1)\delta+\delta\} = cB\sin(\omega t-\theta+\delta).
\end{aligned}
$$

ここで，$c = \dfrac{\sin N\delta}{\sin\delta}$，$\theta = (N-1)\delta$ とした．

点 P において観測される合成波 Y は，

$$
\begin{aligned}
Y = Y_{\mathrm{A}} + Y_{\mathrm{B}} &= cA\sin\underbrace{(\omega t-\theta)}_{=\spadesuit} + cB\sin\underbrace{(\omega t-\theta+\delta)}_{=\spadesuit+\delta}\\
&= c\{A\sin\spadesuit + B\sin(\spadesuit+\delta)\}\\
&= c\{(A+B\cos\delta)\sin\spadesuit + B\sin\delta\cos\spadesuit\}\\
&= c\sqrt{(A+B\cos\delta)^2+(B\sin\delta)^2}\,\sin(\spadesuit+\phi)\\
&= c\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\delta}\,\sin(\omega t-\theta+\phi)
\end{aligned}
$$

となる．ここで ϕ は $\tan\phi = \dfrac{B\sin\delta}{A+B\cos\delta}\left(=\dfrac{B\sin(2\pi D\sin\theta/\lambda)}{A+B\cos(2\pi D\sin\theta/\lambda)}\right)$ を満たす角度である．

さて，振幅 $c\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\delta}$ に注目し，強度分布を調べよう．

Y_{A}，Y_{B} が $\delta = m\pi$ を満たす角度のみで観測されることから $\delta = \dfrac{2\pi}{\lambda}D\sin\theta \neq m\pi$ を満たすような角度 θ では X 線は観測されない．そのため，$\delta = \dfrac{2\pi}{\lambda}D\sin\theta = m\pi$ を満たす角度でのみ考察すればよく，このとき合成波 Y の振幅は，

$$
c\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos(m\pi)} = c\sqrt{A^2+B^2+(-1)^m 2AB} = c\{A+(-1)^m B\}
$$

と表せるので，観測強度 $I^{(\mathrm{A+B})}$ はその比例定数を k として，

$$
I^{(\mathrm{A+B})} = kc^2\{A+(-1)^m B\}^2
$$

となる．$\delta = 0\,(\theta = 0)$ での観測強度を $I_0^{(\mathrm{A+B})}$ とすると，

$$
I_0^{(\mathrm{A+B})} = \lim_{\delta\to 0} k\left\{\frac{\sin(N\delta)}{\sin\delta}\right\}^2 (A+B)^2 = \lim_{\delta\to 0}\frac{\sin^2(N\delta)}{(N\delta)^2}\frac{\delta^2}{\sin^2\delta}kN^2(A+B)^2 = k\{N(A+B)\}^2
$$

であり，$I^{(\mathrm{A+B})}$ を $I_0^{(\mathrm{A+B})}$ で規格化すれば，

$$\frac{I^{(\mathrm{A+B})}}{I_0^{(\mathrm{A+B})}} = \left\{ \frac{\sin(N\delta)}{N\sin\delta} \frac{A+(-1)^m B}{A+B} \right\}^2 ,$$

$\delta = m\pi$ では，

$$I^{(\mathrm{A+B})} = \left\{ \frac{A+(-1)^m B}{A+B} \right\}^2 I_0^{(\mathrm{A+B})} .$$

設定では θ を 0 より少しずつ大きくしていくことから，はじめに X 線が観測される方向 θ_1' は位相差 δ が π となるときで[*10]，

$$\frac{2\pi}{\lambda} D \sin\theta_1' = \pi \qquad \therefore \sin\theta_1' = \frac{\lambda}{2D}$$

の方向である．このときの観測強度は $\left(\dfrac{A-B}{A+B}\right)^2 I_0^{(\mathrm{A+B})}$ である．2 回目に観測される方向 θ_2' は位相差が 2π のときで，

$$\frac{2\pi}{\lambda} D \sin\theta_2' = 2\pi \qquad \therefore \sin\theta_2' = \frac{\lambda}{D}$$

の方向で，このときの観測強度は $I_0^{(\mathrm{A+B})}$ である．

以上より，一般に m 回目に X 線の観測される方向 θ_m' とその点での観測強度 $I_m^{(\mathrm{A+B})}$ をまとめれば，

$$\begin{cases} \sin\theta_m' = \dfrac{\lambda}{2D} m , \\ I_m = \left\{ \dfrac{A+(-1)^m B}{A+B} \right\}^2 I_0^{(\mathrm{A+B})} \end{cases}$$

となり，この結果を図示すれば(オ)のグラフが得られる（図 3）．

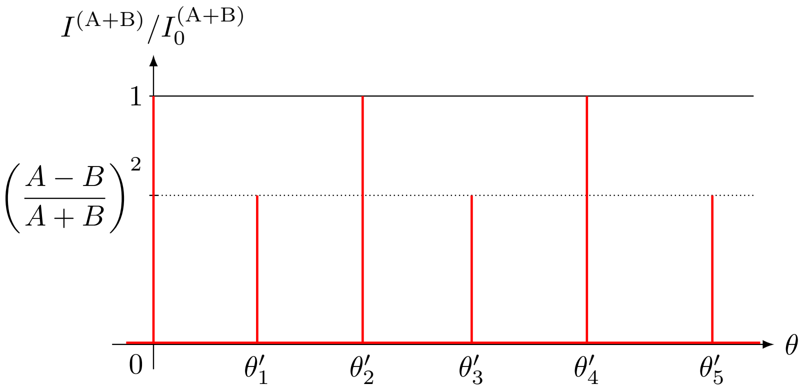

図 3　観測される X 線強度分布（$D = 3\lambda$ で図示）

[*10] 前提として，各格子面の散乱 X 線の重ね合わせより，X 線が観測される方向は $\delta = m\pi$ となる方向に限られている．