1 天体の絡む運動，等速円運動，単振動の時間追跡

【メモ】

・問(1)は等速円運動に関する問題．等速円運動は，以下の立式が定石（今回はつりあいは $0=0$ と自明な式であり不要）．

$$\begin{cases} \text{運動方程式（中心成分）} \\ \text{つりあい（←使わないことも）} \end{cases}$$

・等加速度運動，単振動は時間追跡とエネルギー収支のいずれでも解析できる運動であり，問(2)，問(4)では時間追跡（運動方程式），問(3)ではエネルギでの誘導が付いている．

・問(2)では単振動の時間追跡，問(3)は等加速度運動の時間追跡である．・問(3)では仕事の計算が問われている．仕事の計算は以下の通り．

$$W = \begin{cases} \text{・力 } f \text{ の具体的な形が既知} \quad \rightarrow \quad \text{定義から直接計算} \\ \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f \text{ 一定な場合：} |f||\varDelta x|\cos\theta = \vec{f}\cdot\varDelta\vec{x} (\varDelta\vec{x}\text{: 変位}) \\ f \text{ が一定出ない場合：（} f \text{ の } x \text{ 積分）＝（} f - x \text{ グラフの面積）} \end{cases} \\ \text{・力 } f \text{ の具体的な形が不明} \quad \rightarrow \quad \text{エネルギー収支から逆算} \end{cases}$$

【解答】

問(1) (a) 公式より，

$$F_1 = G\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{Mm}{(R+h)^2}}\,.$$

(b) 運動方程式（中心成分）より，

$$m\frac{V^2}{R+h} = G\frac{Mm}{(R+h)^2} \qquad \therefore V = \underset{\sim\sim\sim\sim}{\sqrt{\frac{GM}{R+h}}}\,.$$

(c) 速さ V で $2\pi(R+h)$ 進む時間を求めればよいので，

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{V} = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{2\pi(R+h)\sqrt{\frac{R+h}{GM}}}\,.$$

問(2) (a) 地球の密度 ρ は，密度の定義より，

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

であるから，半径 $r \leq R$ の球内の質量は，

$$M' = \frac{4}{3}\pi r^3\rho = \underset{\sim\sim\sim\sim}{\left(\frac{r}{R}\right)^3 M}\,.$$

(b) 前問より，

$$F_2 = -G\frac{M'm}{r^2} = \underset{\sim\sim\sim}{-\frac{GMm}{R^3}}r\,.$$

(c) 運動方程式より，

$$m\ddot{r} = -\frac{GMm}{R^3}r \qquad \therefore \ddot{r} = -\frac{GM}{R^3}r$$

となり，角振動数 $\omega = \sqrt{\dfrac{GM}{R^3}}$，振動中心 $r = 0$ の単振動を行うことがわかる．以上より周期 T_2 は，

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega} = \underset{\sim\sim\sim}{2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}}}\,.$$

問(3) (a) 仕事の定義より，

$$W_1 = \int_{R+h}^{R}\left(-\frac{GMm}{r^2}\right)dr = \left[\frac{GMm}{r}\right]_{R+h}^{R} = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{GMmh}{R(R+h)}}\,.$$

(b) 仕事の定義より，

$$W_2 = \int_{R}^{0}\left(-\frac{GMm}{R^3}r\right)dr = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}\frac{GMm}{R}}\,.$$

(c) 物体のエネルギー収支より，

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = \frac{GMmh}{R(R+h)} + \frac{1}{2}\frac{GMm}{R} \qquad \therefore v = \sqrt{\left(1+\frac{2h}{R+h}\right)\frac{GM}{R}}\,.$$

(d) 位置エネルギーの定義より[*1]，

$$\begin{aligned} U = -\int_{\infty}^{r}F\,dr &= -\left\{\int_{\infty}^{R}\left(-\frac{GMm^2}{r}\right)dr + \int_{R}^{r}\left(-\frac{GMm}{R^3}r\right)dr\right\} \\ &= \left[-\frac{GMm}{r}\right]_{\infty}^{R} + \left[\frac{1}{2}\frac{GMm}{R^3}r^2\right]_{R}^{r} \\ &= \underset{\sim\sim\sim}{\frac{GMm}{2R^3}\left(r^2 - 3R^2\right)}\,. \end{aligned}$$

問(4) 小球 1，2 の中心からの距離をそれぞれ r_1，r_2 と記す．$t : 0 \to t_0$ において，$r_1 = R$，$r_2 : R \to 0 \to R$ であり，$t : t_0 \to 2t_0$ において，$r_1 : R \to 0 \to R$，$r_2 = R$ より，小球 1 が (お)，小球 2 が (か) となる．

[*1] 詳しくは【補足】を参照．

【補足】位置エネルギーの定義

物体の始状態における位置を x_{ini}，運動エネルギーを K_{ini}，終状態における位置を x_{fin}，運動エネルギーを K_{fin} とする．物体にはたらく力を f とすると，物体のエネルギー収支の式は，

$$K_{\mathrm{fin}} - K_{\mathrm{ini}} = \int_{x_{\mathrm{ini}}}^{x_{\mathrm{fin}}} f\,dx$$

と書ける．ここで，適当な位置 x_0 を定めると，

$$\begin{aligned}
K_{\mathrm{fin}} - K_{\mathrm{ini}} &= \int_{x_{\mathrm{ini}}}^{x_{\mathrm{fin}}} f\,dx \\
&= \int_{x_{\mathrm{ini}}}^{x_0} f\,dx + \int_{x_0}^{x_{\mathrm{fin}}} f\,dx \\
&= -\int_{x_0}^{x_{\mathrm{ini}}} f\,dx + \int_{x_0}^{x_{\mathrm{fin}}} f\,dx \\
\therefore K_{\mathrm{fin}} + \left(-\int_{x_0}^{x_{\mathrm{fin}}} f\,dx\right) &= K_{\mathrm{ini}} + \left(-\int_{x_0}^{x_{\mathrm{ini}}} f\,dx\right)
\end{aligned}$$

のように，（終状態）=（始状態）の形で記述することができる．両辺第 2 項が x_0 から x までの経路に依存せず一意に決まるとき[*2]，物体の位置情報を含んでいることから位置エネルギーと呼び，位置エネルギーが定義できる力を保存力と呼ぶ．x_0 は任意の位置に取ることができるため，位置エネルギー U が 0 となる位置（基準点）に定めるのが慣例である．

[*2] 一意に決まらない例は摩擦がはたらく場合を考えてみるとよい．摩擦力の仕事の場合，始点と終点が同一であっても，その仕事の値は面上をずりずりと滑った道のりの長さに依存し，始点と終点だけでは一意に決まらない．このような場合，位置エネルギーは定義されなず，このような力を非保存力と呼ぶ．

2 $\boldsymbol{vB\ell}$ 公式の電磁誘導，多体系の力学

【メモ】

・回路の一部が動く電磁誘導は，誘導起電力の決定では $vB\ell$ の公式が基本となる．

・電磁誘導の問題は，①誘導起電力の決定，②回路の議論，③運動の議論，④エネルギーの議論，という作りが基本．

・ジュール熱 J の計算は以下のように行う．

$$J = \begin{cases} RI^2 \times (\text{経過時間}) & (I\text{ 一定のとき}), \\ \text{エネルギー収支から逆算} & (I\text{ 一定でないとき}). \end{cases}$$

【解答】

問(1) (a) (i) 公式より，

$$E = \underset{\sim\sim\sim}{v_0 B\ell}\,.$$

(ii) キルヒホッフ則より，

$$v_0 B\ell - 2rI_1 = 0 \qquad \therefore I_1 = \frac{v_0 B\ell}{2r}\,.$$

(iii) 導体棒の運動方程式（つりあい）より，

$$m \cdot 0 = F - I_1 B\ell \qquad \therefore F = I_1 B\ell = \frac{(B\ell)^2}{2r} v_0\,.$$

(b) キルヒホッフ則，および導体棒の運動方程式より，

$$\begin{cases} \underbrace{v_0 B\ell}_{=E} - r(I_\mathrm{A} - I_\mathrm{B}) - rI_\mathrm{A} = 0\,, \\ E_0 - rI_\mathrm{A} - rI_\mathrm{B} = 0\,, \\ (m \cdot 0 = F - (I_\mathrm{A} - I_\mathrm{B})B\ell) \end{cases} \qquad \therefore I_\mathrm{A} = \frac{E_0 + E}{3r}\,,\quad I_\mathrm{B} = \frac{2E_0 - E}{3r}\,.$$

問(2) キルヒホッフ則，および導体棒の運動方程式は，

$$\begin{cases} v_0 B\ell - (R + r)I - \dfrac{Q}{C} = 0\,, \\ m \cdot 0 = F - IB\ell\,. \end{cases}$$

(a) 十分時間経過後 $\dfrac{dQ}{dt} = 0\,(= I)$ となるため，キルヒホッフ則より，

$$Q = Cv_0 B\ell\,.$$

(b)　回路のエネルギー収支より，

$$v_0 B\ell \Delta Q = J + \Delta\left(\frac{Q^2}{2C}\right) \qquad \therefore J = v_0 B\ell \cdot C v_0 B\ell - \frac{1}{2}\frac{(C v_0 B\ell)^2}{C} = \frac{1}{2}C(v_0 B\ell)^2 .$$

問(3)　キルヒホッフ則，および導体棒の運動方程式は，

$$\begin{cases} v_1 B\ell - v_2 B\ell - 2rI_3 = 0\,, \\ m\dot{v}_1 = -I_3 B\ell\,, \\ 2m\dot{v}_2 = I_3 B\ell\,. \end{cases}$$

(a)　キルヒホッフ則より，

$$v_1 B\ell - v_2 B\ell - 2rI_3 = 0 \qquad \therefore I_3 = \frac{B\ell}{2r}(v_1 - v_2)\,.$$

(b)　運動方程式より，

$$\begin{cases} m\dfrac{\Delta v_1}{\Delta t} = -I_3 B\ell\,, \\ 2m\dfrac{\Delta v_2}{\Delta t} = I_3 B\ell \end{cases} \qquad \Delta v_1 = -\frac{I_3 B\ell}{m}\Delta t\,,\quad \Delta v_2 = \frac{I_3 B\ell}{2m}\Delta t\,.$$

(c)　題意より $\dot{v}_1 = \dot{v}_2 = 0$ であるから，運動方程式より $I_3 = 0$ であり，キルヒホッフ則より $v_1 = v_2\,(= V)$ を得る．運動量保存則より[*3][*4]，

$$mV + 2mV = mv_0 \qquad \therefore V = \frac{1}{3}v_0\,(= V_1 = V_2)\,.$$

【補足１】問(2)の外力がした仕事

キルヒホッフ則，および導体棒の運動方程式は，

$$\begin{cases} 0 = v_0 B\ell - (R+r)I - \dfrac{Q}{C}\,, \\ m\cdot 0 = F - IB\ell\,. \end{cases}$$

キルヒホッフ則，および導体棒の運動方程式より，系全体のエネルギー収支は[*5][*6]，

$$0\cdot v_0 = v_0 B\ell I - (R+r)I^2 - \frac{Q}{C}I + Fv_0 - IB\ell v_0 \qquad \therefore \underbrace{Fv_0}_{\text{外力の仕事率}} = \underbrace{(R+r)I^2}_{\text{消費電力}} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{Q^2}{2C}\right)}_{\substack{\text{静電エネルギーの}\\ \text{時間変化率}}}\,.$$

[*3] 運動量保存則の導出については【補足２】を参照．

[*4] 誘導に従うのなら 1 つ前の結果より，

$$\Delta v_1 + 2\Delta v_2 = 0 \qquad \therefore (V_1 - v_0) + 2(V_2 - 0) = 0$$

が成り立ち，これを用いればよい．

[*5] キルヒホッフ則に電流 I を，運動方程式に速度 $v\,(= v_0)$ をかけ 2 式の和を取ればよい．

[*6] $\dfrac{Q}{C}\dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{Q^2}{2C}\right)$ であることを利用．

よって，外力のする仕事 $W_{\rm ex}$ は設問で求めた誘導起電力のする仕事に等しく，

$$W_{\rm ex}=v_0B\ell\Delta Q=C(v_0B\ell)^2\,.$$

なお，キルヒホッフ則は，

$$\frac{dQ}{dt}=-\frac{1}{(R+r)C}\left(Q-Cv_0B\ell\right)$$

と空気抵抗型の微分方程式となる．この微分方程式の一般解は指数関数であり，$t=0$ で $Q=0$ であることから，

$$Q=Cv_0B\ell\left(1-e^{-\frac{1}{(R+r)C}t}\right)$$

を得る．ここで，運動方程式より，

$$F=IB\ell=\frac{dQ}{dt}B\ell=\frac{v_0(B\ell)^2}{R+r}e^{-\frac{1}{(R+r)C}t}$$

となり，外力のする仕事は仕事の定義から，

$$\begin{aligned}W_{\rm ex}=\int_{x_{\rm ini}}^{x_{\rm fin}}F\,dx=\int_0^\infty F\frac{dx}{dt}\,dt=\int_0^\infty\frac{(v_0B\ell)^2}{R+r}e^{-\frac{1}{(R+r)C}t}\,dt\\=\left[-(R+r)C\frac{(v_0B\ell)^2}{R+r}e^{-\frac{1}{(R+r)C}t}\right]_0^\infty\\=C(v_oB\ell)^2\end{aligned}$$

と求めることもできる．設問で問われたジュール熱 J も同様である．

【補足２】問(3)の運動量保存則

キルヒホッフ則，および導体棒の運動方程式は，

$$\begin{cases}v_1B\ell-v_2B\ell-2rI_3=0\,,\\ m\dot{v}_1=-I_3B\ell\,,\\ 2m\dot{v}_2=I_3B\ell\,.\end{cases}$$

運動方程式の和を取って，

$$\begin{aligned}&m\frac{dv_1}{dt}+2m\frac{dv_2}{dt}=0\\&\frac{d}{dt}\left(mv_1+2mv_2\right)=0\qquad\therefore mv_1+2mv_2=\mathrm{const}\,.\end{aligned}$$

3 熱力学（熱あり過程，断熱過程）

【メモ】

・熱力学の基本的（むらがなく熱あり）な過程に関する問題．定石は，可動部分のつりあいから圧力の決定，状態方程式から温度の決定．内部エネルギー変化を公式，気体のする仕事を $P-V$ 図の面積評価，熱力学第 1 法則を通じて熱を計算．

・問(4)は準静的な断熱過程に関する問題．準静的な断熱過程では，ポアソンの公式から圧力か体積の決定，状態方程式から温度の決定．熱力学第 1 法則は仕事の決定方程式となる．

・全体的に使用する文字が統一されていなくややこしい．

【解答】

問(1)　可動部分（シリンダ，ピストン）のつりあい，および状態方程式は[*7]，

$$\begin{cases} \begin{cases} \text{シリンダ}: 0 = P_0S + mg - P_1S\,, \\ \text{ピストン}: 0 = P_1S - (P_0 + \rho g d)S\,, \end{cases} \\ P_1SL_1 = nRT_0\,. \end{cases}$$

(a)　状態方程式より，

$$L_1 = \underline{\frac{nRT_0}{P_1S}}\,.$$

(b)　つりあいの 2 式より，

$$\rho S g d = mg \qquad \therefore d = \underline{\frac{m}{\rho S}}\,.$$

(c)　シリンダのつりあいより，

$$P_1 = \underline{P_0 + \frac{mg}{S}}\,.$$

なお，以上より $L_1 = \dfrac{nRT_0}{P_0S + mg}$ とわかる．

問(2)　(a)　ピストンの液面からの深さを x とする．可動部分（シリンダ，ピストン）のつりあい，および状態方程式より[*8]，

$$\begin{cases} \begin{cases} \text{シリンダ}: 0 = P_0S + mg - P_2S\,, \\ \text{ピストン}: 0 = P_2S - (P_0 + \rho g x)S\,, \end{cases} \\ P_2SL_2 = nRT_2 \end{cases} \qquad \therefore T_2 = \frac{P_0S + mg}{nR}L_2 = \underline{\frac{L_2}{L_1}T_0}\,.$$

[*7] シリンダのつりあいから P_1 を決定→ピストンのつりあいから d，状態方程式から L_1 を決定．

[*8] シリンダのつりあいから P_2 を決定→ピストンのつりあいから x，状態方程式から T_2 を決定．

(b) シリンダのつりあいより気体の圧力 P は一定である．よって，気体のする仕事 W は $P-V$ 図の面積より，

$$W=\left(P_0+\frac{mg}{S}\right)S(L_2-L_1)=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{P_1S(L_2-L_1)}\,.$$

(c) 熱力学第 1 法則より，

$$\begin{aligned}Q&=\frac{3}{2}nR\left(\frac{L_2}{L_1}T_0-T_0\right)+P_1S(L_2-L_1)\\&=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{5}{2}\left(\frac{L_2}{L_1}-1\right)P_1SL_1}\,.\end{aligned}$$

問(3) (a) 張力の大きさを F とする．可動部分（シリンダ，ピストン）のつりあい，および状態方程式より[*9]，

$$\begin{cases}\begin{cases}\text{シリンダ}:0=P_0S+mg-P_3S-F\,,\\\text{ピストン}:0=P_3S-P_0S\,,\end{cases}\\P_3SL_3=nRT_0\end{cases}\qquad\therefore L_3=\frac{nRT_0}{P_0S}=\underset{\sim\sim\sim}{\frac{P_1}{P_0}L_1}\,.$$

(b) ピストンのつりあい，および状態方程式より[*10]，

$$\begin{cases}0=P_LS-\{P_0+\rho g(L-L_3)\}S\,,\\P_LSL=nRT\end{cases}\qquad\therefore P_L=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{P_0+\rho g(L-L_3)}\,.$$

(c) $P-V$ 図の面積より，

$$W=\int_{L_2}^{L_3}\{P_0+\rho g(L-L_3)\}\,S\,dL=P_0S(L_3-L_2)-\frac{1}{2}\rho gS(L_3-L_2)^2\,.$$

ここで，$d=L_2-L_3$，$d=\dfrac{m}{\rho S}$，$P_1S=P_0S+mg$ より，

$$W=P_0S(L_3-L_2)-\frac{1}{2}\rho gS(L_3-L_2)^2=-P_0Sd-\frac{1}{2}\rho Sgd^2=-\frac{1}{2}(P_0+P_1)Sd\,.$$

よって，気体のされた仕事 W' は，

$$W'=-W=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{1}{2}(P_0+P_1)Sd}\,.$$

(d) 気体の内部エネルギー変化は，

$$\Delta U=\frac{3}{2}nR(T_0-T_2)=\frac{3}{2}nR\left(T_0-\frac{L_2}{L_1}T_0\right)=\frac{3}{2}P_1S(L_1-L_2)=-\frac{3}{2}W\,.$$

よって，熱力学第 1 法則より，

$$Q=\Delta U+W=-\frac{3}{2}W-W'\qquad\therefore Q'=-Q=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{W'+\frac{3}{2}W}\,.$$

[*9] ピストンのつりあいから P_3 を決定→シリンダのつりあいから F，状態方程式から L_3 を決定．

[*10] ピストンのつりあいから P_L を決定→状態方程式から T を決定．

問(4)　ピストンの液面からの深さを x とする．可動部分（シリンダ，ピストン）のつりあい，ポアソンの公式，および状態方程式は[*11][*12][*13]，

$$\begin{cases} \begin{cases} \text{シリンダ}: 0 = P_0S + mg - P_4S\,, \\ \text{ピストン}: 0 = P_4S - (P_0 + \rho g x)S\,, \end{cases} \\ P_4(SL_4)^{\frac{5}{3}} = P_3(SL_3)^{\frac{5}{3}} = P_0(SL_3)^{\frac{5}{3}}\,, \\ P_4SL_4 = nRT_4\,. \end{cases}$$

$L_3 = \dfrac{P_1}{P_0}L_1$，$P_1S = P_0S + mg$ より，

$$\left(P_0 + \frac{mg}{S}\right)L_4{}^{\frac{5}{3}} = P_0L_3{}^{\frac{5}{3}} = P_0\left(\frac{P_0 + mg/S}{P_0}L_1\right)^{\frac{5}{3}}$$

$$\therefore L_4 = \left(\frac{P_0 + mg/S}{P_0}\right)^{\frac{2}{5}} L_1 = \underbrace{\left(1 + \frac{mg}{P_0S}\right)^{\frac{2}{5}}}_{>1} L_1\,.$$

よって，$L_4 > L_1$ であり (あ)．

[*11] シリンダのつりあいから P_4 を決定→ピストンのつりあいから x，ポアソンの公式から L_4，状態方程式から T_4 を決定．

[*12] $L_3 = \left(1 + \dfrac{mg}{P_0S}\right)L_1$ より，$L_3 > L_4$ である．このことから体積は減少しており，この過程において気体のする仕事が負になることがわかる（1 つ下の脚注で計算している）．

[*13] この過程で気体が外部にした仕事：$W = -\Delta U = -\dfrac{3}{2}nR(T_4 - T_0) = -\dfrac{3}{2}\left\{\left(1 + \dfrac{mg}{P_0S}\right)^{\frac{2}{5}} - 1\right\}nRT_0\,.$